

Théorèmes et démonstrations

Théorème du point fixe de Brouwer

Soit $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $\forall x \in [a, b]$,

$$\phi(x) \in [a, b].$$

Alors, ϕ admet au moins un point fixe α sur $[a, b]$.

Preuve: Soit $d(x) = \phi(x) - x$. On cherche à montrer qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $d(\alpha) = 0$.

$$d(a) \cdot d(b) = \underbrace{(\phi(a) - a)}_{\geq 0} \underbrace{(\phi(b) - b)}_{\leq 0} \text{ par hypothèses.}$$

Ainsi, la fonction $d(x)$ change de signe sur l'intervalle $[a, b]$ et est continue. Par le théorème de Bolzano, il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $d(\alpha) = 0$, donc $\phi(\alpha) = \alpha$.



Théorème de convergence de $\phi(x_k)$

Soit $\phi: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction K -contractante.

Si $\phi([a,b]) \subset [a,b]$, alors la suite $\{x_k\}$ telle que $x_{k+1} = \phi(x_k)$ est convergente.

Preuve: ① La suite est bornée

Comme $x_0 \in [a,b]$ et $x_{k+1} = \phi(x_k) \in [a,b]$, alors $x_k \in [a,b] \forall k$. Elle est donc bornée.

② La suite est de Cauchy

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - x_k| &= |\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})| \leq K |x_k - x_{k-1}| \\ &\leq K^k |x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Cette quantité tend vers 0 quand $k \rightarrow \infty$, mais cela ne suffit pas pour montrer qu'elle est de Cauchy.

On considère deux rangs m et n , $m > n$.

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \\ &= \sum_{k=n}^{m-1} |x_{k+1} - x_k| \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} K^k |x_1 - x_0| = |x_1 - x_0| \sum_{k=n}^{m-1} K^k \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \sum_{k=n}^{m-1} K^k = K^n \frac{1 - K^{m-n}}{1 - K} < \frac{K^n}{1 - K} \rightarrow 0.$$

Ainsi, $|x_m - x_n| \rightarrow 0$, $m, n \rightarrow \infty$.

Comme la suite est bornée et de Cauchy, alors elle converge.

Théorème d'unicité du point fixe

Si $\phi(x)$ satisfait les conditions du théorème de Brouwer et qu'en plus elle est K -contractante, alors elle admet un unique point fixe α sur I .

Preuve: Admettons que la fonction ait deux points fixes différents α_1 et α_2 sur I . (Preuve par l'absurde). Alors la K -contractance nous dit que:

$$|f(\alpha_1) - f(\alpha_2)| \leq K |\alpha_1 - \alpha_2|$$

$$\begin{array}{cc} \nearrow & \uparrow \\ = \alpha_1 & = \alpha_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow |\alpha_1 - \alpha_2| \leq K |\alpha_1 - \alpha_2| < |\alpha_1 - \alpha_2|$$

Ce résultat est absurde $\Rightarrow$ il n'existe qu'un seul point fixe α . ■

Théorème de convergence vers un point fixe

Si la suite $\{x_k\}$ définie par l'itération de Picard converge vers $\hat{x}$ et si ϕ est continue, alors $\hat{x}$ est un point fixe de ϕ .

Preuve:
$$\hat{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(x_k) = \phi\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k\right) = \phi(\hat{x})$$

$\nearrow$ convergence $\uparrow$ Picard $\uparrow$ Continuité $\nearrow$ Convergence

Ainsi, $\hat{x} = \phi(\hat{x})$. Le point $\hat{x}$ est donc point fixe de ϕ . ■