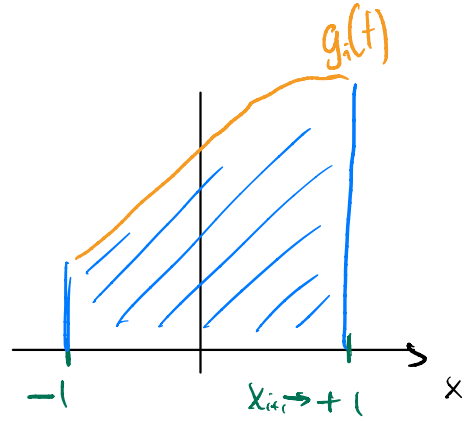
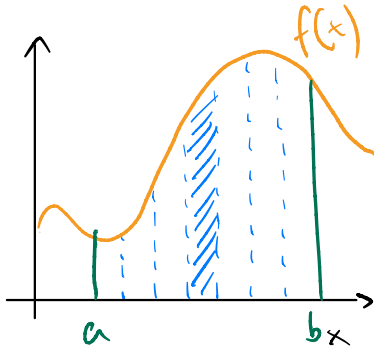


Récapitulatif



$$\rightarrow \sum_{i=0}^{N-1} \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx}_{\text{à approcher par } \mathcal{I}(f)}$$

$$\rightarrow \sum_{i=0}^{N-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \underbrace{\int_{-1}^{+1} g_i(t) dt}_{\text{à approcher par } \mathcal{I}(g_i)} = \sum_i \omega_i g(t_i)$$

Remarque

Nous avons approché $\mathcal{I}_i(f) = \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \int g_i(t) dt$.

L'approximation de $I = \int_a^b f(x) dx$ est donnée par

$\mathcal{I}(f) = \sum_{i=0}^{N-1} \mathcal{I}_i(f)$, où $\mathcal{I}_i(f)$ est la formule de quadrature utilisée pour le $i^{\text{ème}}$ intervalle.

Pour une partition régulière, $x_{i+1} - x_i = h = \frac{b-a}{N}$

Théorème

Supposons $\mathcal{I}(f)$ définie précédemment exacte pour les polynômes de degré r .

Alors, l'erreur absolue sur l'estimation de l'intégrale vérifie l'inégalité:

$$e_{abs} = \left| \int_a^b f(x) dx - \mathcal{I}(f) \right| \leq C \cdot h^{r+1},$$

où C est une constante indépendante de h .

On étudie souvent l'évolution de l'erreur en fonction de la finesse de la partition.

Par exemple, si $h' = \frac{h}{2}$.

$$\begin{aligned} * (e_{abs}^S)' &\stackrel{\substack{= \text{car cas extrême}}}{=} C \cdot (h')^{r+1} = C \left(\frac{h}{2}\right)^{r+1} = C \left(\frac{h}{2}\right)^4 = \frac{C}{16} h^4 \\ &= \frac{1}{16} \cdot e_{abs}^S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * (e_{abs}^{PM})' &= C \cdot (h')^{r+1} = C \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^{r+1} = C \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} C \cdot h^2 \\ &= \frac{1}{4} e_{abs}^{PM} \end{aligned}$$

Récapitulatif

Nous avons étudié trois formules de quadrature basées sur M noeuds ($M \leq 3$), et étudié leur exactitude

① Point milieu ($M=1, t_1=0$)

$$\mathcal{I}_i^{PM}(f) = (x_{i+1} - x_i) \cdot f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right)$$

Cette formule est exacte pour les polynômes de degré $r \leq 1$.

② Trapèzes ($M=2, t_1=-1, t_2=+1$)

$$\mathcal{I}_i^T(f) = (x_{i+1} - x_i) \cdot \frac{f(x_i) + f(x_{i+1}))}{2}$$

Cette formule est exacte pour tous les polynômes de degré $r \leq 1$.

③ Simpson ($M=3, t_1=-1, t_2=0, t_3=+1$)

$$\mathcal{I}_i^S(f) = \frac{x_{i+1} - x_i}{6} \left(f(x_i) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_{i+1}) \right)$$

Formule exacte pour les polynômes de degré ≤ 3 .