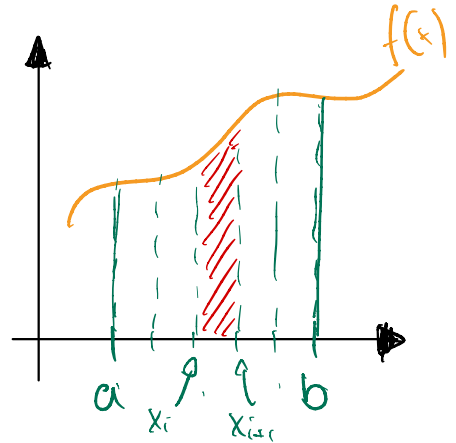


III. Formules de quadrature de Newton-Cotes

Rappel $\rightarrow$ on cherche à approcher $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$, pour calculer $\sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$.



Pour généraliser le formalisme, on remplace le sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ par l'intervalle canonique $[-1, +1]$ grâce au changement de variable:

$$t = 2 \cdot \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} - 1$$

, ou

$$x = \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \cdot t + \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

$$x = x_i \Rightarrow t = -1$$

$$x = x_{i+1} \Rightarrow t = +1$$

Ainsi, $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx =$

$$= \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} t + \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \cdot \frac{x_{i+1} - x_i}{2} dt$$



Ainsi,
$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \int_{-1}^{+1} g_i(t) dt$$

Définition

Soit g une fonction continue sur $[-1, +1]$.

La formule de quadrature

$$I(g) = \sum_{j=1}^M w_j g(t_j)$$

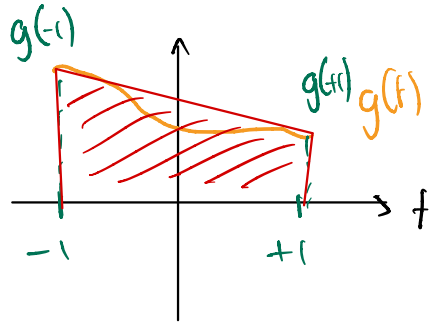
est une approximation de $\int_{-1}^{+1} g(t) dt$.

Les M t_j ($-1 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_M \leq +1$) sont appelés noeuds d'intégration, et les M w_j sont les poids de la formule associés à ces noeuds.

Exemple (M=2, Trapèzes)

Géométriquement,

$$J(g) = \underbrace{2}_{\text{base}} \cdot \underbrace{\frac{g(-1) + g(1)}{2}}_{\text{mi-hauteur}} = g(-1) + g(1)$$



Selon la formule de quadrature:

$$\begin{aligned} J(g) &= \sum_{j=1}^{M=2} w_j g(t_j) = w_1 g(t_1) + w_2 g(t_2) \\ &= w_1 \cdot g(-1) + w_2 g(+1). \end{aligned}$$

Par identification, $w_1 = w_2 = 1$.

Pour retourner à l'intervalle original $[x_i, x_{i+1}]$,

$$\begin{aligned} J_i(f) &= \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \cdot [f(x_i) + f(x_{i+1})] \\ &= \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{\text{base}} \cdot \underbrace{\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}}_{\text{mi-hauteur}} \end{aligned}$$

Il s'agit de la méthode des Trapèzes.

Soit $f(x) = x^2$ qu'on aimerait intégrer sur $[2, 3]$.

① Changement de variable

$$\begin{aligned} g(t) &= f(x(t)) = f\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \cdot t + \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \cdot t + \frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}t + \frac{5}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

② Approximation de l'intégrale

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \int_{-1}^{+1} g(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1}{2}t + \frac{5}{2}\right)^2 dt$$

à approximer

$$\begin{aligned} &\stackrel{JT}{\approx} \frac{1}{2} J(g) = \frac{1}{2} \left[1 \cdot g(-1) + 1 \cdot g(+1) \right] \\ &= \frac{1}{2} (4 + 9) = \underline{\underline{6.5}} \end{aligned}$$

③ Sans changement de variable (géom.)

$$\int_2^3 f(x) dx \approx 1 \cdot \frac{f(2) + f(3)}{2} = \frac{4 + 9}{2} = \underline{\underline{6.5}}$$

④ Résultat exact

$$\int_2^3 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_2^3 = \frac{1}{3} (27 - 8) = \frac{19}{3} = \underline{\underline{6.\overline{33}}}$$

Définition

Une formule de quadrature est dite exacte pour tous les polynômes de degré ≥ 0 si

$$J(p) = \sum_{j=1}^M \omega_j p(t_j) = \int_{-1}^{+1} p(t) dt, \text{ pour tout polynôme } p(t) \text{ de degré } \leq r.$$

Question

Comment déterminer les poids ω_j étant donnés M nœuds t_j pour approcher au mieux $\int_{-1}^{+1} g(t) dt$.

En utilisant la base de Lagrange appropriée, on peut écrire le polynôme $\tilde{g}(t)$ qui interpole $g(t)$ aux nœuds.

$$\tilde{g}(t) = \sum_{j=1}^M g(t_j) \varphi_j(t)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} g(t) dt &\approx \int_{-1}^{+1} \tilde{g}(t) dt = \int_{-1}^{+1} \underbrace{\sum_{j=1}^M g(t_j) \varphi_j(t)}_{\text{ne dép. pas de } t} dt \\ &= \sum_{j=1}^M g(t_j) \cdot \underbrace{\int_{-1}^{+1} \varphi_j(t) dt}_{\equiv \omega_j} = \sum_{j=1}^M g(t_j) \omega_j \\ &\equiv J(g) \end{aligned}$$

En posant $w_j = \int_{-1}^{+1} \varphi_j(t) dt$, alors $J(g) = \sum_{i=1}^n w_i g(t_i)$ est une approximation de $\int_{-1}^{+1} g(t) dt$.

Théorème

Soient $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ M nœuds d'intégration dans l'intervalle $[-1, +1]$, et $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)\}$ la base de Lagrange associée à ces nœuds.

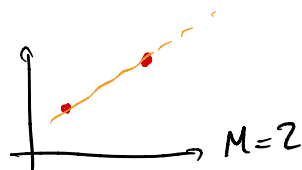
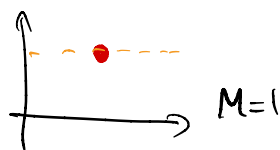
Alors, la formule de quadrature

$$J(g) = \sum_{j=1}^n w_j g(t_j)$$

est exacte pour les polynômes de degré $M-1$

si et seulement si

$$w_j = \int_{-1}^{+1} \varphi_j(t) dt.$$



Exemple ($M=1$)

$$t_1 = 0 \Rightarrow \varphi_1(t) = 1. \quad \text{car } \varphi_1(t_1) = \varphi_1(0) = 1$$

Ainsi,

$$w_1 = \int_{-1}^{+1} \varphi_1(t) dt = \int_{-1}^{+1} 1 dt = 2$$

Donc,

$$J(p) = \sum_{j=1}^{M=1} p(t_j) w_j = 2 \cdot p(t_1) = 2 \cdot p(0).$$

Ainsi, $J(p)$ devrait être exacte pour les polynômes de degré $M-1=0$.

$$\text{Soit } p(t) = B. \text{ Alors, } \int_{-1}^{+1} p(t) dt = \int_{-1}^{+1} B dt = 2B$$

$$\text{et } J(p) = 2p(0) = 2B$$

L'exactitude est vérifiée.

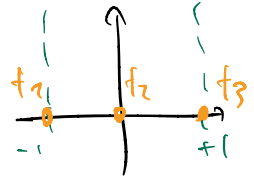
Remarque

On peut prouver en utilisant $p(t) = A \cdot t + B$ que la formule de quadrature du point milieu est exacte pour tous les polynômes de degré 1.

Exemple (N=3, formule de Simpson)

$$t_1 = -1, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = +1$$

La base de Lagrange associée vaut :



$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 1), \quad \varphi_2(t) = 1 - t^2, \quad \varphi_3(t) = \frac{1}{2}(t^2 + t)$$

Alors,

$$\begin{aligned} w_1 &= \int_{-1}^{+1} \varphi_1(t) dt = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2}(t^2 - 1) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \right]_{t=-1}^{t=+1} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$w_2 = \int_{-1}^{+1} \varphi_2(t) dt = \dots = \frac{4}{3}$$

$$w_3 = \int_{-1}^{+1} \varphi_3(t) dt = \dots = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } \mathcal{I}(g) &= w_1 g(-1) + w_2 g(0) + w_3 g(+1) \\ &= \frac{1}{3} g(-1) + \frac{4}{3} g(0) + \frac{1}{3} g(+1) \end{aligned}$$

est la formule de quadrature associée aux $N=3$ noeuds t_j .

J'aimerais la ramener au sous-espace original

$[x_i, x_{i+1}]$.

$$\begin{aligned} J_i(f) &= \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \cdot J(g) \\ &= \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \left[\frac{1}{3} f(x_i) + \frac{4}{3} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + \frac{1}{3} f(x_{i+1}) \right] \\ &= \frac{x_{i+1} - x_i}{6} \left[f(x_i) + 4f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) + f(x_{i+1}) \right] \end{aligned}$$

Il s'agit de la formule de Simpson. Selon le théorème précédent, cette formule est exacte pour tous les polynômes de degré $M-1=2$.

Remarque

On peut même prouver comme pour le cas $M=1$ que la formule de Simpson est exacte pour tous les polynômes de degré 3.