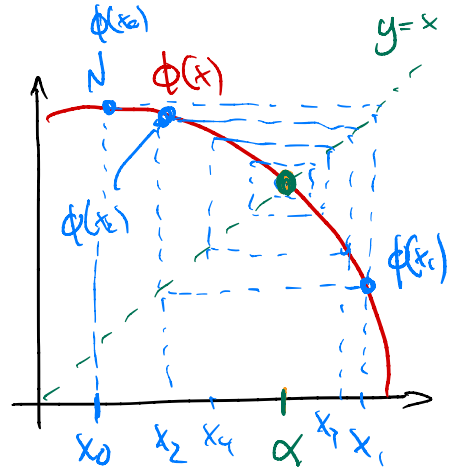


Méthode de Picard

Etant donnée une "bonne" approximation x_0 , on construit une suite $\{x_k\}$ telle que

$$x_{k+1} = \phi(x_k)$$

Cette relation est appelée itération de Picard.

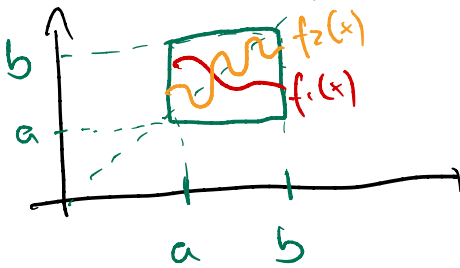


Remarque

Même si $\phi(\alpha) = \alpha$, la convergence de la suite de Picard n'est pas assurée.

Théorème (Brouwer)

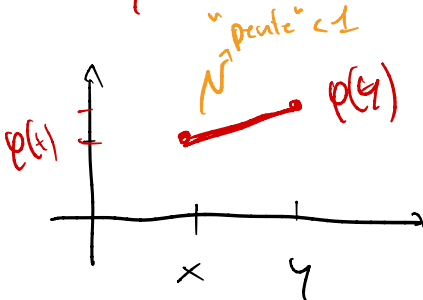
Si $\phi(x)$ est continue sur $[a,b]$ et si $\forall x \in [a,b], \phi(x) \in [a,b]$, alors $\phi(x)$ admet au moins un point fixe α sur $[a,b]$.



Définition

Une fonction $\phi(x)$ est dite k -contractante sur un intervalle $[a,b] = I \in \mathbb{R}$ si il existe $k \in \mathbb{R}$, $0 < k < 1$ telle que

$$\forall x, y \in I, |\phi(x) - \phi(y)| \leq k \cdot |x - y|$$



Remarques

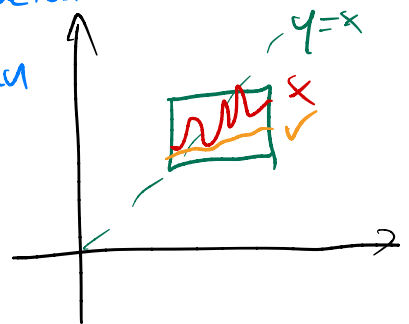
① En développant ϕ au premier ordre autour de $y \in I$, on a :

$$\phi(x) = \phi(y) + \phi'(\xi)(x-y), \text{ où } \xi \in [x, y]$$

$$\Rightarrow |\phi(x) - \phi(y)| = \underbrace{|\phi'(\xi)|}_{\equiv K} |x-y|$$

Pour prouver que ϕ est K -contractante sur I ,
il suffit de montrer que $\max_{\xi \in I} f'(\xi) < 1$.

② Si la fonction est K -contractante
sur I , alors elle admet un
unique point fixe sur I .



Théorème

Soit $\phi(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction K -contractante.

Si $\phi([a, b]) \subset [a, b]$, alors la suite $\{x_k\}$ définie par $x_{k+1} = \phi(x_k)$ est convergente.

Théorème

Si la suite $\{x_k\}$ définie par l'itération de Picard est convergente vers $\bar{x}$, et si ϕ est continue, alors $\bar{x}$ est un point fixe de ϕ .

Preuve:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(x_k) \stackrel{\text{continue}}{=} \phi\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k\right) \\ &= \phi(\bar{x})\end{aligned}$$



On a donc prouvé que soit x_0 et la suite

$$x_{n+1} = \phi(x_n) \quad \forall n \geq 0, \text{ alors}$$

$$\text{si } \rightarrow \forall x \in [a, b], \phi(x) \in [a, b]$$

$$\text{si } \rightarrow \exists K, 0 < K < 1 \text{ tel que } |\phi'(x)| < K$$

$$\forall x \in [a, b]$$

$$\downarrow$$
$$|\phi'(x)| < 1$$

$$\text{si } \rightarrow \phi(x) \in C^0([a, b])$$

alors $\phi(x)$ a un unique point fixe α dans $[a, b]$ et la suite $\{x_n\}$ converge vers α pour tout choix de $x_0 \in [a, b]$.

Intégration numérique

I. Introduction

Pour calculer une intégrale, on utilise le théorème fondamental du calcul intégral

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

où $F(x)$ est la primitive de $f(x)$.

$$\text{Exemple: } \int_0^1 x^2 dx = \left. \frac{1}{3} x^3 \right|_{x=1} - \left. \frac{1}{3} x^3 \right|_{x=0} = \frac{1}{3}.$$

Définition du problème

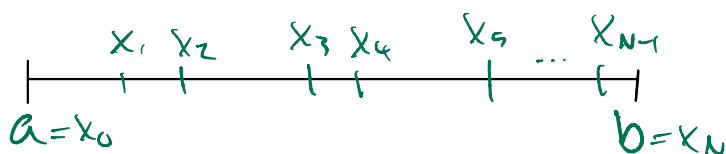
Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On cherche à approximer numériquement la quantité $\int_a^b f(x) dx$.

On se base sur des évaluations ponctuelles de f en certains points x_i stratégiquement choisis. On définit alors une méthode de quadrature comme la quantité

$$Q(f) = \sum w_i f(x_i) \approx \int_a^b f(x) dx.$$

Définition

Une partition (discretisation) de l'intervalle $[a, b]$ est un sous-ensemble de $N+1$ points $x_0, x_1, \dots, x_N$ tels que

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b.$$


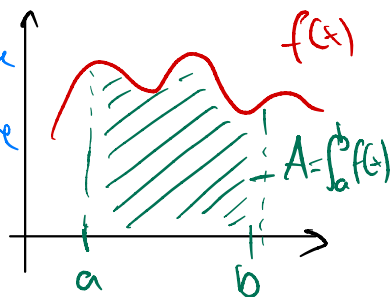
Le nombre réel $h = \max |x_{i+1} - x_i|$ caractérise la finesse (le pas) de la partition.

En général, on pose $h = \frac{b-a}{N}$, et $x_i = a + i \cdot h$, $i = 0, 1, \dots, N$.

On parle alors d'une partition régulière de $[a, b]$ avec un pas de h .

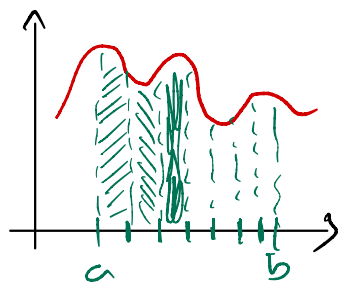
Définition

* Dans une méthode de quadrature non-composite (simple), on approxime l'intégrale sur tout l'intervalle $[a, b]$ d'un seul bloc.



* Dans une méthode composite, on commence par créer une partition de $[a, b]$, telle que

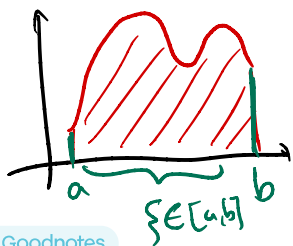
$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx,$$



et on cherche à approximer les intégrales

$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$ par des formules de quadrature simples.

Exemples :



* Méthodes à 1 point: $A = (b-a) \cdot f(\xi)$

→ $\xi = a$ (point de gauche)

→ $\xi = b$ (point de droite)

→ $\xi = \frac{b+a}{2}$ (point milieu)

→ $\xi \in \text{random}(a, b)$, (Riemann)

II. Intépolation de Lagrange

On veut trouver un polynôme $p(x)$ de degré n qui interpole une fonction $f(x)$ en $n+1$ points.

Autrement dit, il prend des valeurs définies $p_0, p_1, \dots, p_n$ en $x_0, x_1, \dots, x_n$, c'est-à-dire

$$f(x_j) = p_j = p(x_j), \forall j \in \{0, 1, \dots, n\}$$

On peut partir de

$$p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$$

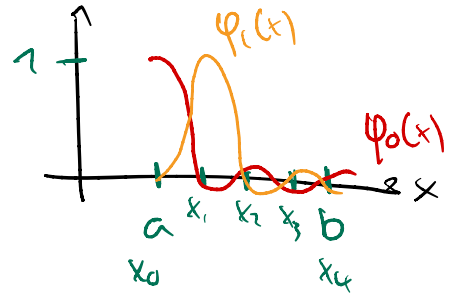
et

$$\begin{cases} p(x_1) = f(x_1) \\ p(x_2) = f(x_2) \\ \vdots \\ p(x_n) = f(x_n) \end{cases}$$

On simplifie le problème en cherchant le polynôme $\varphi_k(x)$ tel que :

$$\varphi_k(x_k) = 1$$

$$\varphi_k(x_j) = 0, \quad \forall j \neq k$$



Le polynôme suivant satisfait ce critère :

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)} \\ &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x-x_j}{x_k-x_j} \end{aligned}$$

On peut montrer que les polynômes $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ forment une base de $\mathbb{P}_n$ appelée base de Lagrange associée aux points $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Ainsi, le polynôme $p(x)$ cherché est unique et vérifie

$$p(x) = \underbrace{p_0}_{f(x_0)} \cdot \varphi_0(x) + \underbrace{p_1}_{f(x_1)} \cdot \varphi_1(x) + \dots + \underbrace{p_n}_{f(x_n)} \cdot \varphi_n(x).$$