III. Méthodes de la sécante et de Newton

Pour obtenir des méthodes plus performantes, il est nécessaire de prendre en compte le comportement de la fonction f au voisinage de la racine.

Théorème de Taylor

Soit $I \in \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $a \in I$ et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, $n+1$ fois continument dérivable sur I.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

$$= p(a,x,n) + r(a,x,\xi,n)$$

où $\xi \in [a,x]$.

En particulier, en développant cette fonction au premier ordre autour de α, on obtient

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\xi)(x-\alpha) \quad , \text{ où } \xi \in [x, \alpha].$$

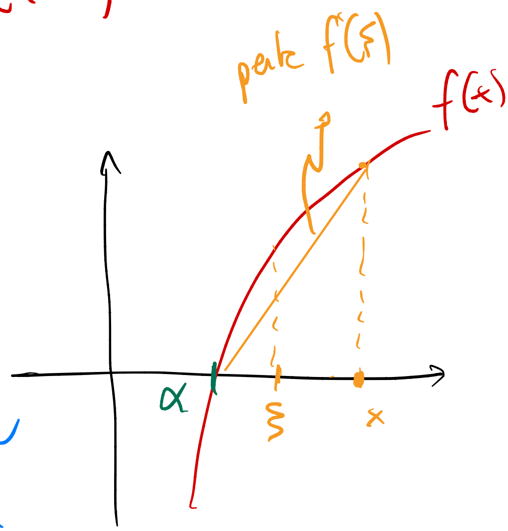
Il s'agit d'un résultat exact!

$$f(\alpha) = f(x) - f'(\xi)(x-\alpha)$$
$$= 0$$

Ainsi

$$f'(\xi) = \frac{f(x)}{x-\alpha} = ?$$

peut nous permettre de trouver la racine α en une itération.



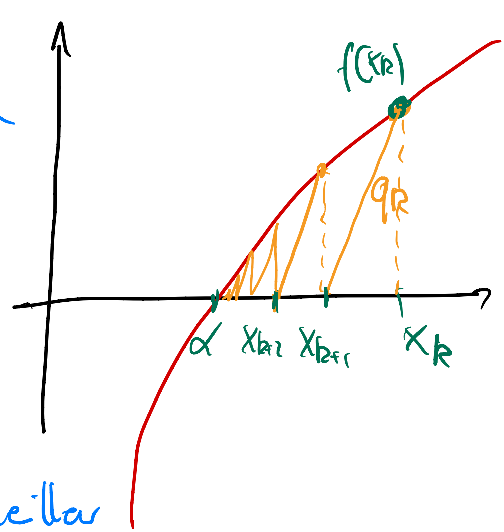
Sur la base de cette relation, on peut construire une suite $\{x_k\}$ qui devrait converger vers α telle que

$$f(x_k) - q_k (x_k - x_{k+1}) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{k+1} = x_k - q_k^{-1} \cdot f(x_k)},$$

où q_k est une approximation de $f'(\xi)$.

Géométriquement, on cherche l'intersection entre la droite de pente q_k qui passe par le point $(x_k, f(x_k))$ et l'axe $y=0$.

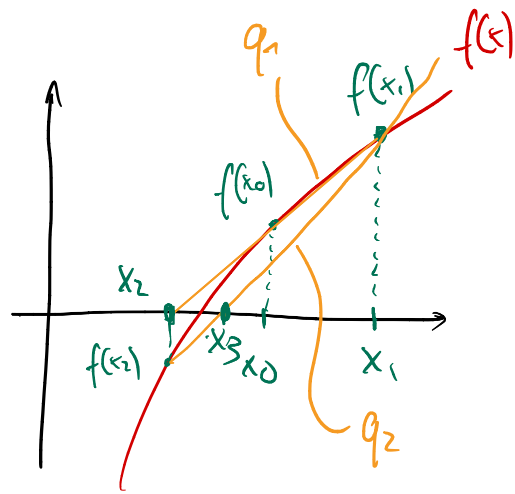


Le principal défi de cette méthode est de trouver le meilleur q_k possible (à chaque itération).

Méthode de la sécante

On pose

$$q_k = \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$



Il s'agit de la pente de la droite qui relie les points $(x_k, f(x_k))$ et $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$.

Remarques :

① Il faut connaître deux valeurs de départ pour initialiser la suite.

② La convergence de la suite n'est pas assurée

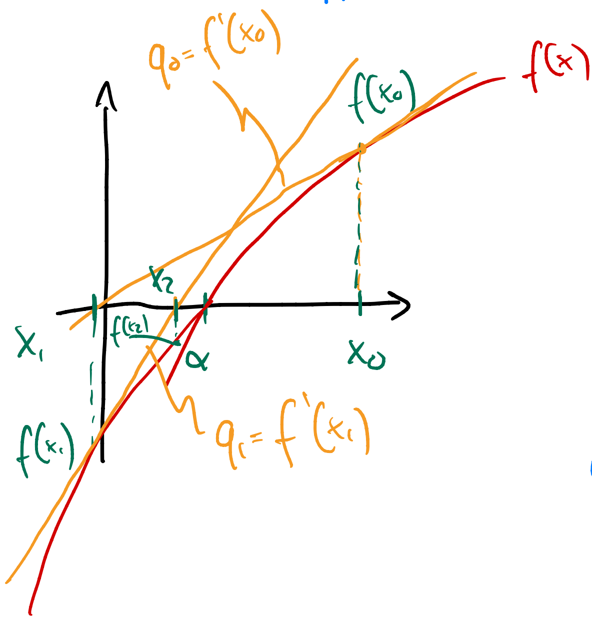
Toutefois, si $f \in C^1(I)$ et si $f'(\alpha) \neq 0$, et si x_0 et x_1 sont proches de α, alors on peut montrer que la suite converge avec $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618$

③ Contrairement à la méthode de la bissection, les deux points x_0 et x_1 considérés n'ont pas besoin d'encadrer la racine.

Méthode de Newton

Soit $f \in C^1(I)$, et telle que $f'(\alpha) \neq 0$

On pose $q_k = f'(x_k)$ $\forall k \geq 0$, et on choisit une bonne approximation de x_0.



On crée ainsi une suite $\{x_k\}$ telle que

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

qui converge vers α.

Remarques

① Si la fonction est suffisamment régulière et que x_0 est bien choisi, alors peut montrer que $p=2$. (convergence quadratique)

② Cette méthode est plus coûteuse numériquement que celle de la sécante car il faut calculer la dérivée de f en tout point.

③ Pour trouver une "bonne" approximation de départ x_0, on utilise en général la méthode de la bissection.

IV. Méthodes du point fixe

Pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, on peut toujours transformer le problème $f(\alpha) = 0$ en un problème équivalent $\alpha - \phi(\alpha) = 0$, où ϕ est une fonction auxiliaire $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que si $f(\alpha) = 0$ alors $\phi(\alpha) = \alpha$.

On transforme la recherche des racines de f en un problème de recherche de points fixes de ϕ.

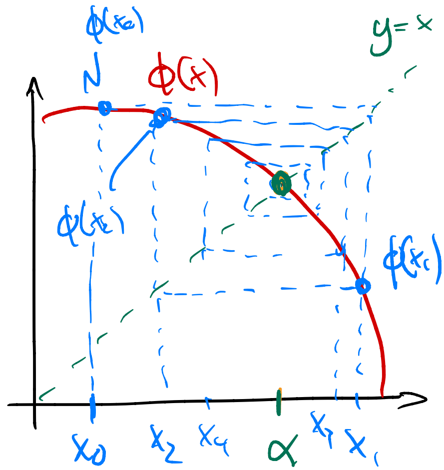
Remarque :

Le choix de $\phi(x)$ n'est pas unique. $(\phi(x) = x + \lambda f(x))$.

Toute fonction auxiliaire $\phi(x) = x + F(f(x))$ telle que $F(0) = 0$ et F est continue peut fonctionner.

Méthode de Picard

Etant donnée une "bonne" approximation x_0, on construit une suite $\{x_k\}$ telle que



$$x_{k+1} = \phi(x_k)$$

Cette relation est appelée itération de Picard.