

Equations non-linéaires

I. Introduction

Un gaz réel est décrit par la relation d'état

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V-b) = R \cdot T, n=1$$

Connaissant P, T, a, b , que vaut le volume occupé?

$$p(V-b) + \frac{a}{V^2}(V-b) = RT$$

$$\Rightarrow p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

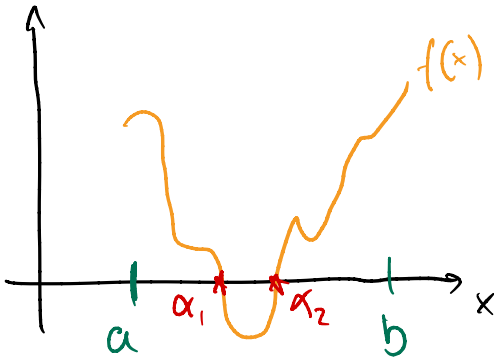
$$\Rightarrow p - \frac{RT}{V-b} + \frac{a}{V^2} = 0$$

Cette équation ne possède aucune solution analytique simple.

Définition du problème

Soit une fonction continue $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

On aimerait trouver numériquement $\alpha \in I = [a, b]$ tel que $f(\alpha) = 0$.



Remarques :

- ① α est un zéro ou une racine de f .
- ② Nous cherchons en réalité une bonne approximation de α .

Idee

A partir d'une première approximation x_0 , on construit une suite convergente $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ de valeurs approchées de la racine recherchée telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha$.

Définition

Cette suite est dite convergente d'ordre $p \geq 1$ si il existe $C, k_0 > 0$ tels que

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq C |x_k - \alpha|^p, \quad \forall k > k_0.$$

Remarques:

- ① Si $p=1$, on parle de convergence linéaire. Il faut alors que $C < 1$.
- ② $p=2 \rightarrow$ quadratique. $p=3 \rightarrow$ cubique
- ③ p peut ne pas être entier.
- ④ La convergence d'une suite dépend généralement de la valeur initiale x_0 .

Définition

La différence entre la solution exacte α et la solution approchée x_k à l'itération k représente l'erreur numérique absolue e_k .

$$e_{abs,k} = |x_k - \alpha|.$$

L'erreur relative vaut

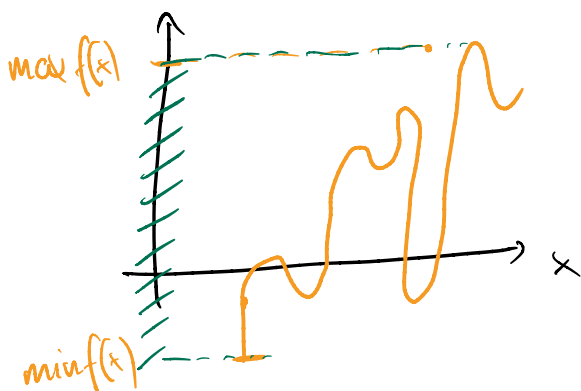
$$e_{rel,k} = \frac{e_{abs,k}}{x_k} = \left| \frac{x_k - \alpha}{x_k} \right|, \quad x_k \neq 0.$$

II. Méthodes de dichotomie

Soit $f: [a,b] = I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors cette fonction prend toutes les valeurs entre $\min_{x \in I} f(x)$ et $\max_{x \in I} f(x)$. C'est le

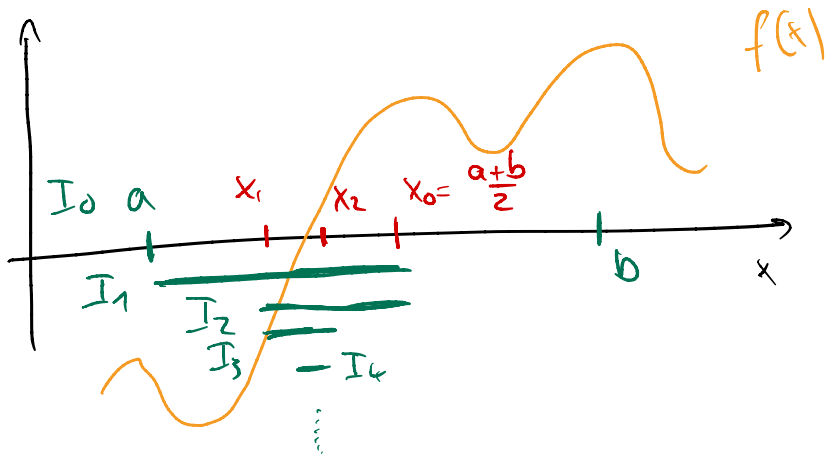
théorème des valeurs intermédiaires.



En particulier, si f et $[a,b]$ sont tels que $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors il existe $\alpha \in]a,b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

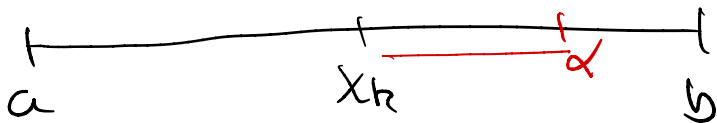
Méthode de la bisection

On construit la suite $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ qui converge vers α en se basant sur le théorème de Bolzano, en considérant un intervalle $[a_k, b_k]$ de plus en plus petit autour de la racine recherchée.



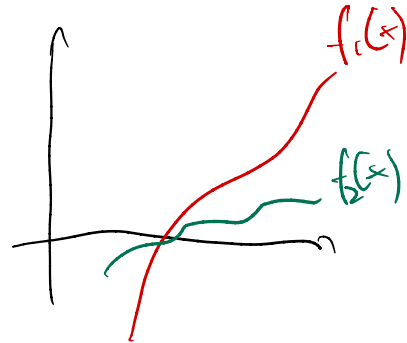
Algorithme :

- ① Choisir un intervalle de départ $[a, b]$ tel que la condition de Bolzano est satisfait
 $f(a) \cdot f(b) < 0$.
- ② Calculer le point milieu $x_k = \frac{b+a}{2}$ qui divise l'intervalle considéré en deux.
- ③ Vérifier dans quel sous-intervalle la propriété de Bolzano est satisfaite:
 - si $f(x_k) = 0$, x_k est la racine recherchée
 - si $f(a) \cdot f(x_k) < 0$, on pose $b = x_k$.
 - si $f(x_k) \cdot f(b) < 0$, on pose $a = x_k$.
- ④ Répéter les points ② et ③ tant que la condition d'arrêt n'est pas satisfaite.
Celle-ci agit généralement sur l'erreur, et/ou le nombre d'itérations maximal.



Remarques

- ① La convergence est lente.
- ② Cette méthode n'a pas d'ordre de convergence
- ③ Si la fonction possède plusieurs racines dans l'intervalle considéré, on détermine des sous-intervalles intéressants (possédant une seule racine) sur lesquels on applique la méthode de la bisection.
- ④ Cette méthode ne prend pas en compte la forme de la fonction, mais ne se base ^{que} sur les intervalles



On peut donner une borne supérieure à l'erreur absolue :

$$\begin{aligned} e_{\text{abs},k} &= |x_k - \alpha| < \frac{1}{2} |b_k - a_k| = \frac{1}{2} I_k \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} I_{k-1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^k} I_0 \\ &= \frac{1}{2^{k+1}} |b_0 - a_0| \end{aligned}$$

Comme $\lim_{k \rightarrow \infty} e_{\text{abs},k} = 0$, la méthode converge à coup sûr.

On impose généralement une tolérance ε telle que l'algorithme termine lorsque $e_{k,\text{abs}} < \frac{|b-a|}{2^{k+1}} < \varepsilon$.

Le nombre minimal d'opérations est tel que

$$\frac{1}{2^{k+1}} |b-a| < \varepsilon \Rightarrow 2^{k+1} > \frac{|b-a|}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow k_{\min} = \log_2 \left(\frac{|b-a|}{\varepsilon} \right) - 1$$