

Théorème

Soient $t_1, t_2, \dots, t_M$ M points distincts de l'intervalle $[-1, +1]$ et soit $\{\varphi_1, \dots, \varphi_M\}$ la base de Lagrange de P_{M-1} associée à ces nœuds.

Alors la formule de quadrature $J(g) = \sum_{j=1}^M \omega_j g(t_j)$ est exacte pour les polynômes de degré $M-1$ (en tout cas) si et seulement si $\omega_j = \int_{-1}^{+1} \varphi_j(t) dt$.

Preuve:

$$\boxed{\Rightarrow} \quad J(g) \text{ exacte alors } \omega_j = \int_{-1}^{+1} \varphi_j(t) dt.$$

Par définition, "on suppose exact"

$$J(p) = \sum_{j=1}^M \omega_j p(t_j) \stackrel{V}{=} \int_{-1}^{+1} p(t) dt$$

En particulier, ce résultat est valable pour $p(t) = \varphi_k(t)$.

$$\begin{aligned} J(\varphi_k) &= \sum_{j=1}^M \omega_j \varphi_k(t_j) = \sum_{j=1}^M \omega_j \delta_{jk}(t_j) = \omega_k \\ &= \int_{-1}^{+1} \varphi_k(t) dt \end{aligned}$$

$$\boxed{\Leftarrow} \quad \omega_j = \int_{-1}^{+1} \varphi_j(t) dt \text{ donc } J(g)$$

On peut écrire $p(t) = \sum_{j=1}^M p(t_j) \varphi_j(t)$, où $p(t)$ est un polynôme quelconque de degré $M-1$.

$$\begin{aligned} \text{Alors, } \int_{-1}^{+1} p(t) dt &= \int_{-1}^{+1} \sum_{j=1}^M p(t_j) \varphi_j(t) dt = \sum_{j=1}^M p(t_j) \underbrace{\int_{-1}^{+1} \varphi_j(t) dt}_{= \omega_j \text{ par hypothèse}} \\ &= \sum_{j=1}^M p(t_j) \omega_j = J(p) \end{aligned}$$

