+1/1/60+

EPFL

1

Enseignant·e·s: L. Testa
Informatique et Calcul Scientifique - CMS
04 juillet 2024
Durée : 150 minutes

Abra Kadabra

SCIPER : **987654**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 13 questions sur 16 pages, les dernières pouvant être vides. L'examen est sur 50 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre **votre pièce d'identité** sur la table.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout **outil électronique** est **interdite** pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix unique**, on comptera :
  - les points indiqués si la réponse est correcte,
  - 0 point s'il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - 0 point si la réponse est incorrecte.
- Lorsqu'on vous demande d'écrire du code, faites attention à bien respecter les indentations.
- Vous n'avez pas besoin de commenter votre code mais vous pouvez le faire si vous pensez que cela aide à sa compréhension.
- Si une question est erronée, les enseignant·e·s se réservent le droit de l'annuler.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons sont à rendre, mais ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque énoncé proposé, une ou plusieurs questions sont posées. Pour chaque question, marquez la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 (2 points)

Qu'affiche le code ci-dessous ?

```
L1 = [4, 3, 2, 1]
L2 = [10*i for i in L1]
L3 = L2 + 2*L1

print(L3)
```

- ■ `[40, 30, 20, 10, 4, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 1]`
- ☐ `[48, 36, 24, 12]`
- ☐ `[10, 20, 30, 40, 8, 6, 4, 2]`
- ☐ `[10, 20, 30, 40, 4, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 1]`
- ☐ `[18, 26, 34, 42]`
- ☐ `[40, 30, 20, 10, 8, 6, 4, 2]`

Question 2 (2 points)

Qu'affiche le code ci-dessous ?

```
def casse_tete(a, b, mid = ' ', fin = 'OO', *args):
    out = a + mid + b + mid + fin
    for i in args:
        out += i
    print(out, sep = '-')

casse_tete('A', 'B', '1', '2')
```

- ■ A1B12
- ☐ A B 0012
- ☐ A B 00 1 2
- ☐ A-B-1-2
- ☐ AB0012
- ☐ A-B-00-1-2
- ☐ A-1-B-1-2
- ☐ A 1 B 1 2

Question 3 (2 points)

Qu'affiche le code ci-dessous ?

```
def chiffre(nb):
    if nb == 1:
        return "Un"
    elif nb == 2:
        return "Deux"
    elif nb > 3:
        return "Beaucoup"

print(chiffre(3))
```

- ☐ Beaucoup
- ☐ Un
- ☐ Rien ne s'affiche
- ■ None
- ☐ Deux
- ☐ Une erreur `TypeError`

Question 4 (2 points)

On considère les deux fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$:

$$f(n) = 0.1n^2 - 10n \quad \text{et} \quad g(n) = n(1 + 3\sqrt{2n}).$$

Laquelle des affirmations suivantes est vraie?

- [x] $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$ mais $f(n)$ n'est pas $\mathcal{O}(g(n))$
- [ ] $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ mais $g(n)$ n'est pas $\mathcal{O}(f(n))$
- [ ] On peut peut pas comparer les ordres de croissance de f et de g
- [ ] $f(n) = \Theta(g(n))$

Question 5 (2 points)

Qu'affiche le code suivant?

```
import numpy as np
L1 = np.arange(6)
L2 = np.reshape(L1,(3,2))
L2 *= 2
print(L2)
```

- [ ] `[[0 2 4]`
  `[6 8 10]]`
- [x] `[[0 2]`
  `[4 6]`
  `[8 10]]`
- [ ] `[[0 1 0 1]`
  `[2 3 2 3]`
  `[4 5 4 5]]`
- [ ] `[[0 1 2 0 1 2]`
  `[3 4 5 3 4 5]]`

Question 6 (3 points)

On donne l'algorithme ci-dessous :

```
def my_algo(L, x):
    bas = 0
    haut = len(L)-1

    while haut >= bas:
        milieu = (bas+haut)//2
        print(milieu, end = " ")
        if L[milieu] ==  x:
            return None
        if L[milieu] > x:
            haut = milieu - 1
        else:
            bas = milieu + 1
```

On définit la liste `L = [-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8]`.

Quelle paire d'appels produit le même affichage?

- [x] `my_algo(L, -1)` et `my_algo(L, -2)`
- [ ] `my_algo(L, -3)` et `my_algo(L, -4)`
- [ ] `my_algo(L, 4)` et `my_algo(L, 5)`
- [ ] `my_algo(L, 3)` et `my_algo(L, 4)`

Question 7 (2 points)

On cherche à calculer l'intégrale de la fonction $f(x) = (x-1)(x^2-3x+2)$ entre $a = -2$ et $b = 4$. Quelle méthode d'intégration numérique nous permet d'obtenir le résultat exact, c'est-à-dire avec $e_{\text{abs}} = 0$?

- ☐ La méthode des trapèzes
- ☐ La méthode du point milieu
- ☐ Aucune des trois méthodes citées
- ■ La méthode de Simpson

Question 8 (3 points)

Parmi les cinq fonctions Python `Newton` définies ci-dessous, laquelle implémente la méthode dite de Newton permettant de déterminer une approximation d'un zéro d'une fonction `f` ?

☐
```
def Newton(f, x_0, fprime, erreur, nmax):
    x = x_0
    for n in range(0, n_max):
        if abs(f(x)) < erreur:
            return x, n+1, True
        x = x + f(x)/fprime(x)
    return x, n+1, False
```

☐
```
def Newton(f, x_0, fprime, erreur, nmax):
    x = x_0
    for n in range(0, n_max):
        if abs(f(x)) < erreur:
            return x, n+1, True
        x = x - f(x)*fprime(x)
    return x, n+1, False
```

☐
```
def Newton(f, x_0, fprime, erreur, nmax):
    x = x_0
    for n in range(0, n_max):
        if abs(f(x)) < erreur:
            return x, n+1, True
        x = x + fprime(x)/f(x)
    return x, n+1, False
```

■
```
def Newton(f, x_0, fprime, erreur, nmax):
    x = x_0
    for n in range(0, n_max):
        if abs(f(x)) < erreur:
            return x, n+1, True
        x = x - f(x)/fprime(x)
    return x, n+1, False
```

☐
```
def Newton(f, x_0, fprime, erreur, nmax):
    x = x_0
    for n in range(0, n_max):
        if abs(f(x)) < erreur:
            return x, n+1, True
        x = x - fprime(x)/f(x)
    return x, n+1, False
```

Question 9 (2 points)

Qu'affiche le code ci-dessous ?

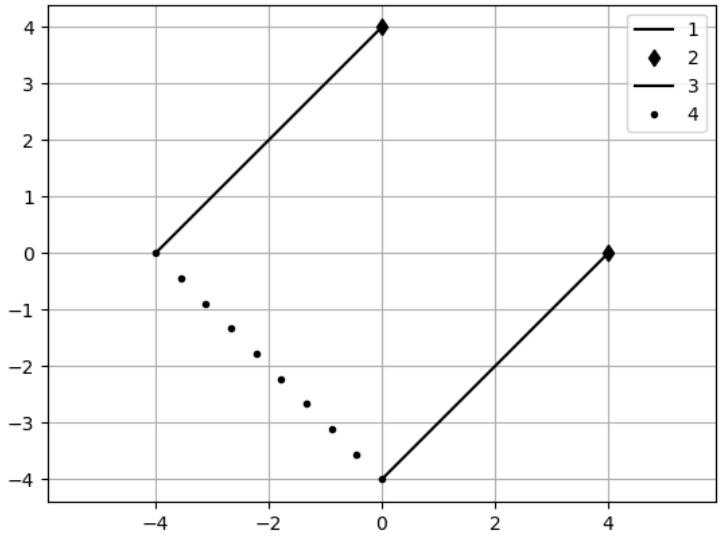
```
L1 = [['A'], ['B']]
L2 = L1.copy()
L2.append(['D'])
L1[1].append('C')
print (L1, L2,sep='\n')
```

- ☐ `[['A'], ['B'], ['C']]`
  `[['A'], ['B'], ['C'], ['D']]`
- ■ `[['A'], ['B', 'C']]`
  `[['A'], ['B', 'C'], ['D']]`
- ☐ `[['A'], ['B', 'C'], ['D']]`
  `[['A'], ['B', 'C'], ['D']]`
- ☐ `[['A'], ['B'], ['C'], ['D']]`
  `[['A'], ['B'], ['C'], ['D']]`

Question 10 (3 points)

Parmi les huit fonctions Python `my_plot` proposées, laquelle produit la figure ci-dessous lorsqu'elle est appelée dans le code suivant ?

```
plt.figure()
###
my_plot()
###
plt.grid()
plt.axis("equal")
plt.show()
```



☐
```
def my_plot():
    plt.plot([0,4],[-4,0] ,'k',label='1')
    plt.plot([0,-4],[4,0],'k-',label='3')
    plt.plot([-4,0],[0,-4],'k--',label='4')
```

☐
```
def my_plot():
    plt.plot([0,4],[-4,0] ,'k',label='1')
    plt.plot([4,0],[0,4],'kd',label='2')
    plt.plot([0,-4],[4,0],'k-',label='3')
    plt.plot(x,-x-4,'k.',label='4')
```

■
```
def my_plot():
    plt.plot([0,4],[-4,0] ,'k',label='1')
    plt.plot([4,0],[0,4],'kd',label='2')
    plt.plot([0,-4],[4,0],'k-',label='3')
    plt.plot(x,-x-4,'k.',label='4')
    plt.legend()
```

☐
```
def my_plot():
    plt.plot([0,4],[-4,0] ,'k',label='1')
    plt.plot([4,0],[0,4],'kd',label='2')
    plt.plot([0,-4],[4,0],'k-',label='3')
    plt.plot([-4,0],[0,-4],'k--',label='4')
```

☐
```
def my_plot():
    plt.plot([0,4],[-4,0] ,'k',label='1')
    plt.plot([0,-4],[4,0],'k-',label='3')
    plt.plot(x,-x-4,'k.',label='4')
```

☐
```
def my_plot():
    plt.plot([0,4],[-4,0] ,'k',label='1')
    plt.plot([0,-4],[4,0],'k-',label='3')
    plt.plot([-4,0],[0,-4],'k--',label='4')
    plt.legend()
```

☐
```
def my_plot():
    plt.plot([0,4],[-4,0] ,'k',label='1')
    plt.plot([4,0],[0,4],'kd',label='2')
    plt.plot([0,-4],[4,0],'k-',label='3')
    plt.plot([-4,0],[0,-4],'k--',label='4')
    plt.legend()
```

☐
```
def my_plot():
    plt.plot([0,4],[-4,0] ,'k',label='1')
    plt.plot([0,-4],[4,0],'k-',label='3')
    plt.plot(x,-x-4,'k.',label='4')
    plt.legend()
```

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondez dans l'espace dédié. Laissez libres les cases à cocher : elles sont réservées à la correction.

Question 11: *Cette question est notée sur 6 points.*

On considère une liste `L` ne contenant que des éléments de type `str`. Par exemple,
`L = ["Ceci", "est", "un", "exemple", "de", "liste"]`.

On aimerait classer ces éléments en fonction de leur longueur dans un dictionnaire au travers de plusieurs étapes.

(a) Ecrivez un programme permettant d'extraire la longueur `lmax` de la chaîne de charactères la plus longue de cette liste.

(b) Initialisez un dictionnaire `d` dont les différentes clés sont des entiers allant de `1` à `lmax` et les valeurs associées sont des listes vides.

(c) Remplissez le dictionnaire `d` selon la logique suivante : la valeur associée à la clé `N` doit contenir tous les mots de la liste initiale `L` qui contiennent `N` lettres. En reprenant l'exemple précédent,
`d = {1: [], 2: ['un', 'de'], 3: ['est'], 4: ['Ceci'], 5: ['liste'], 6: [], 7: ['exemple']}`.

Solution

(a) En partant d'un maximum temporaire, `lmax = 0`, on parcourt tous les éléments de la liste `L`, et on mesure sa longueur `s` que l'on compare avec `lmax`. On ne garde que la plus grande valeur, jusqu'à avoir comparé tous les éléments de la liste.

```
#1. Trouver mot de longueur maximale
lmax = 0
for i in L:
    s = len(i)    [1 point pour l''itÃ©ration et la longueur]
    if s > lmax:  [1 point pour la comparaison avec lmax et la MAJ]
        lmax = s
```

On initialise un dictionnaire vide en utilisant une compréhension de dictionnaire. Les clés sont des nombres alant de 1 à `lmax` et les valeurs associées sont des listes vides.

On aurait également pu utiliser une boucle `for` ou `while`. Attention à commencer par initialiser un dictionnaire vide dans ce cas, et à mettre à jour la variable d'itération !!

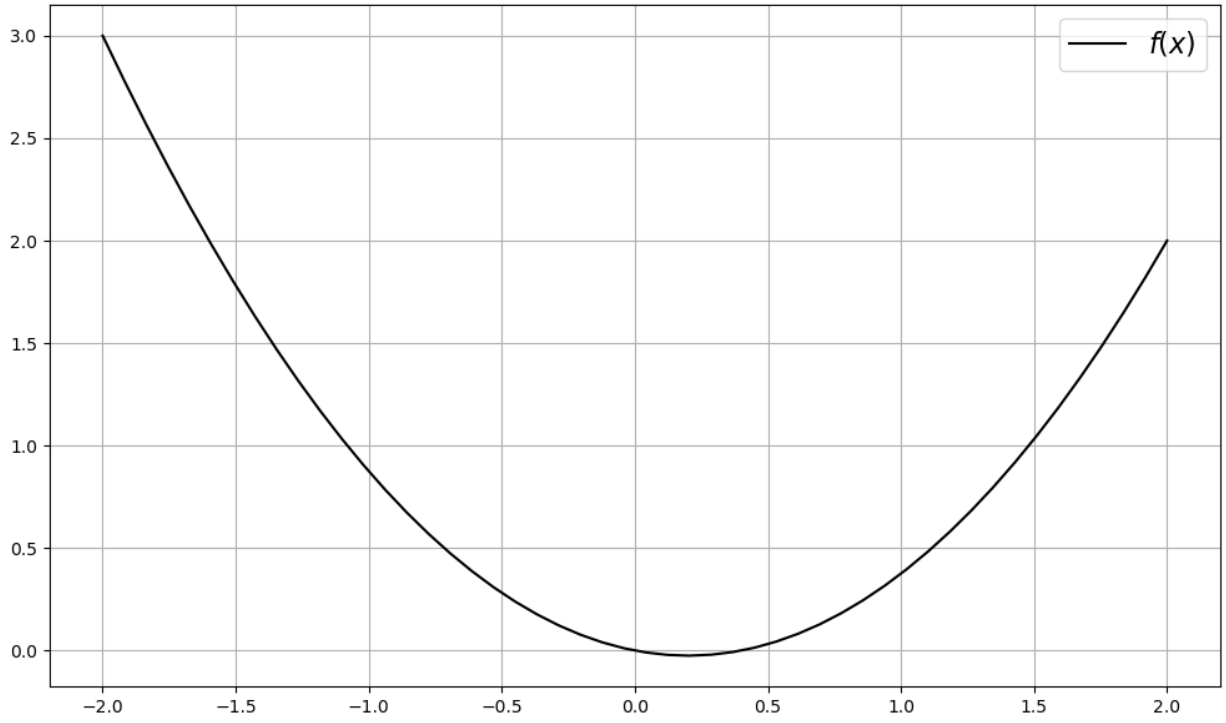
```
#2. Creer dictionnaire
d = {i+1:[] for i in range(lmax)} [1 point pour la comprÃ©hension/boucle]
          [1 point pour l''initialisation]

#2. Variante 0 (attention indices)
d0 = {i:[] for i in range(1,lmax+1)}

#2. Variante 1
d1 = {}
for i in range(lmax):
    d1[i+1] = []

#2. Variante 2
d2 = {}
i = 1
while i <= lmax:
    d2[i] = []
    i += 1
```

(b) Pour chaque élément de la liste `L`, on mesure sa longueur `N`. On rajoute ensuite le mot correspondant `L[i]` à la liste associée à la valeur `N` dans le dictionnaire `d` à l'aide de la méthode append.

```
#3. Parcourir la liste et remplir
for i in range(len(L)):
    N = len(L[i])   [1 point pour d[N]]
    d[N].append(L[i])   [1 point pour append(L[i])]
```

Question 12: *Cette question est notée sur 11 points.*

On considère la fonction $f(x)$ représentée graphiquement ci-dessous sur l'intervalle $[-2, 2]$.



(a) En utilisant la base de Lagrange appropriée, trouvez l'expression analytique de $f(x)$, en sachant qu'il s'agit d'un polynôme de degré 2 qui en $x_0 = -2$ vaut 3, en $x_1 = 0$ vaut 0 et en $x_2 = 2$ vaut 2.

(b) Calculez "à la main", c'est-à-dire sans écrire de code, l'intégrale de $f(x)$ entre -2 et 2 en utilisant la méthode de quadrature composite basée sur la formule des trapèzes et en considérant une partition régulière du domaine d'intégration $[-2, 2]$ en deux sous-intervalles. Le résultat doit être sous forme de valeur numérique.

(c) Complétez le code Python ci-dessous définissant une fonction Python `integration_Simpson` permettant d'approcher l'intégrale d'une fonction `f` sur le domaine `[a,b]` en utilisant la méthode de quadrature composite avec `n` sous-intervalles basée sur la formule de Simpson.

```
# CALCUL NUMERIQUE DE L'INTEGRALE DEFINIE
# EN UTILISANT LA METHODE DE SIMPSON

def integration_Simpson(f,a,b,n):
    '''
    PARAMETRES
    f :             Fonction a integrer
    a, b :          Bornes du domaine d'integration
    n :             Nombre de sous-intervalles
    VARIABLES
    I :             Approximation de l'integrale
    dx :            Finesse de la partition
    xmin, xmax :    bornes du sous-intervalle
    '''
    # 1. INITIALISATION DES VARIABLES

    I = _______________

    dx = _______________

    xmax = _______________

    # 2. CALCUL DES INTEGRALES
    for i in range(1,n+1):

        xmin = _______________

        xmax = _______________

        I += _______________

    return _______________
```

(d) Sur la base des informations à votre disposition, est-il possible de déterminer la valeur exacte de l'erreur absolue obtenue $e_{\mathbf{abs}}$ en appliquant la méthode de Simpson à la fonction `f(x)` définie à la page précédente, et en considérant une partition régulière du domaine d'intégration $[-\mathbf{2}, \mathbf{2}]$ en trois sous-intervalles?

Si oui, que vaut-elle? Justifiez en une phrase.

Solution

(a) On commence par chercher la base de Lagrange associée aux points $x_0 = -2,\ x_1 = 0,\ x_2 = 2$ à l'aide de la définition $\phi_k(x) = \prod_{j,j\neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$. Ainsi,

$$\phi_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{x(x-2)}{8} = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x \tag{1}$$

$$\phi_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+2)(x-2)}{-4} = \frac{1}{4}(4 - x^2) \tag{2}$$

$$\phi_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+2)x}{8} = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x \tag{3}$$

On construit donc la fonction $f(x)$ dans la base $\{\phi_k(t)\}$ donnée par ces trois fonctions de Lagrange de la manière suivante : $f(x) = \sum_j f_j \phi_j(x)$, où f_j est la valeur de f au point x_j donnée dans l'énoncé. Ainsi,

$$f(x) = 3\,\phi_0(x) + 0\,\phi_1(x) + 2\,\phi_2(x) \tag{4}$$

$$= \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{2}{8}x^2 + \frac{2}{4}x \tag{5}$$

$$= \frac{5}{8}x^2 - \frac{1}{4}x. \tag{6}$$

(b) On considère deux sous-intervalles, $I_1 = [-2, 0]$ et $I_2 = [0, 2]$. En utilisant la formule composite des trapèzes, on obtient

$$J^T(f) = \sum_i J_i^T(f) = \sum_0^1 (x_{i+1} - x_i)\,\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \tag{7}$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{f(-2) + f(0)}{2} + \frac{f(0) + f(2)}{2}\right] \tag{8}$$

$$= 2\left(\frac{3}{2} + 1\right) \tag{9}$$

$$= 5. \tag{10}$$

(c) Voici le code complété :

```
# CALCUL NUMERIQUE DE L'INTEGRALE DEFINIE
# EN UTILISANT LA METHODE DE SIMPSON
def integration_Simpson(f,a,b,n):

    # 1. INITIALISATION DES VARIABLES
    I = 0.0   [0.5 point]
    dx = (b-a)/n  [0.5 point]
    xmax = a    [0.5 point]

    # 2. CALCUL DES INTEGRALES
    for i in range(1,n+1):
        xmin = xmax [0.5 point]
        xmax = xmin + dx  [0.5 point]
        I += (f(xmin) + 4*f((xmin + xmax)/2)+ f(xmax))*dx/6 [1 point]
    return I    [0.5 point]
```

(d) Comme le poynôme est de degré 2, nous savons que la valeur calculée par la méthode de Simpson donnera le résultat exact, peu importe le nombre de sous-intervalles considérés. Ainsi, $e_{\text{abs}} = 0$.

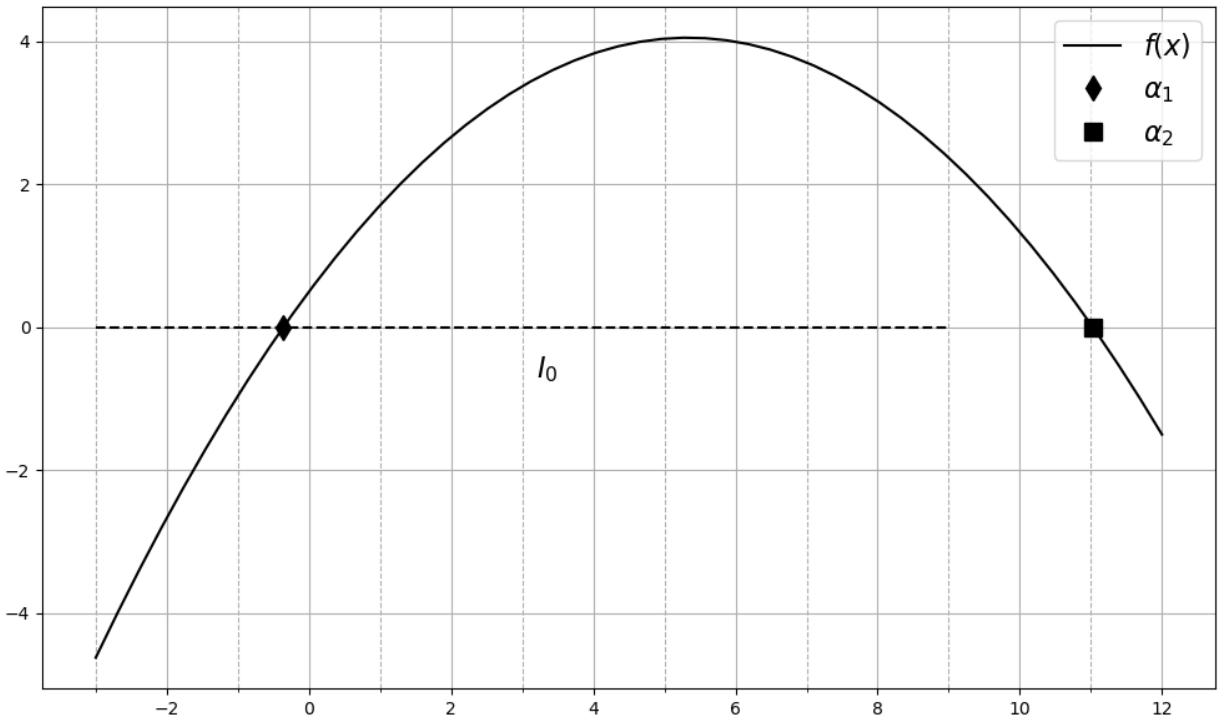
Question 13: *Cette question est notée sur 10 points.*

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{4}{3}x + \frac{2 - \frac{1}{2}x^2}{4},$$

et représentée graphiquement ci-dessous sur l'intervalle $[-3, 12]$.

On aimerait obtenir une approximation des racines α_1 et α_2 à l'aide de la méthode numérique de la bissection, en partant de l'intervalle $I_0 = [a_0, b_0] = [-3, 9]$ représenté sur la même image.



(a) En partant de I_0, définissez l'intervalle considéré lors des quatre itérations suivantes de la méthode, c'est-à-dire $I_k = [a_k, b_k]$ avec $k = 1, 2, 3, 4$.

(b) Que vaut x_3, l'approximation de la racine obtenue si on termine l'algorithme après la troisième itération de la méthode de la bissection, c'est-à-dire après $k = 3$.

Que vaut l'erreur absolue maximale $e_{\text{abs},3}$ correspondante?

(c) Quel est le nombre minimal d'itérations à effectuer pour que l'erreur sur l'approximation de la racine satisfasse une tolérance de $\varepsilon = \frac{3}{16}$, donc soit telle que $e_{\text{abs},k} = \varepsilon$?

(d) On considère maintenant un nouvel intervalle de départ, $I_0 = [-1, 12]$. Est-ce que la méthode de la bissection simple peut nous permettre de trouver une bonne approximation de α_2? Justifiez mathématiquement.

(e) Afin de trouver une valeur approchant α_2, pourrait-on utiliser la méthode de Newton en partant de $x_0 = \frac{16}{3}$? Justifiez mathématiquement.

Solution

(a) A chaque itération, on coupe l'intervalle I_k en deux et considère l'intervalle dans lequel la fonction change de signe (visuellement). Ainsi,

$$\begin{aligned} I_0 &= [-3, 9] \\ I_1 &= [-3, 3] \\ I_2 &= [-3, 0] \\ I_3 &= [-1.5, 0] \\ I_4 &= [-0.75, 0]. \end{aligned}$$

(b) Pour $k = 3$, $I_3 = [-1.5, 0]$. Ainsi, x_3 est au milieu de cet intervalle donc $x_3 = -0.75$.
La racine α se trouvant forcément dans cet intervalle, l'erreur sur l'approximation x_3 de cette racine vaut au maximum $e_{\text{abs},3} = \dfrac{1.5}{2} = 0.75$. Cette valeur est obtenue si la racine se trouve à une borne de cet intervalle.

(c) Dans le cours, nous avons prouvé que le nombre minimal d'itérations à effectuer pour obtenir une tolérance ε vaut

$$\begin{aligned} k_{\text{min}} &= \log_2\left(\frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}\right) - 1 \\ &= \log_2\left(\frac{12}{\frac{3}{16}}\right) - 1 \\ &= \log_2(64) - 1 \\ &= 6 - 1 \\ &= 5. \end{aligned}$$

(d) Non, cet intervalle ne nous permet pas de trouver une bonne approximation de x_2.
En effet, $f(a_0) \cdot f(b_0) > 0$ ce qui implique que la fonction change deux fois de signe sur cet intervalle..
Ainsi, la condition de départ n'est pas satisfaite et l'algorithme ne peut pas être appliqué sur cet intervalle.

(e) Non, on ne peut pas appliquer la méthode de Newton en x_0.

Pour le prouver, calculons la dérivée de $f(x) = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{2 - \frac{1}{2}x^2}{4}$ en $x_0 = \dfrac{16}{3}$.

$$f'(x) = \frac{4}{3} - \frac{1}{4}x.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{4}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{3} \\ &= \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Comme $f'(x_0) = 0$, la pente de la fonction f est nulle en x_0 ce qui contredit les hypothèses nécessaires au bon fonctionnement de la méthode de Newton. En effet, la droite passant par le point $(x_0.f(x_0))$ et de pente $m = 0$ ne coupera jamais l'axe horizontal.