SUJETS Choisis de MATHEMATIQUES

① Intro aux nbres

② Dév. Limités

③ Structure algébrique

---

nbres

§1.1. INTRODUCTION Aux Nombres

On admet l'existence des nombres 0, 1, 2, 3, ... ainsi que des opérations + et ×.

Propriétés et définitions

1) La collection de ces nombres est appelé l'ensemble des nombres naturels. On dénote cet ensemble par $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{N}^* := \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \mathbb{N}_{>0}$$

2) Symboles ensemblistes

- $\in$ signifie "être élément"

  p.ex. $0 \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \ni 3$, $0 \notin \mathbb{N}^*$

- $\exists$ signifie "il existe"

  p.ex. $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.q. $n=2$

  $\nexists\, n \in \mathbb{N}^*$ t.q. $n=0$

  $(\neg \exists\, n \in \mathbb{N}^*$ t.q. $n=0)$

- $\exists!$ "il existe un élément unique"

  p.ex. $\exists!\, n \in \mathbb{N}$ t.q. $n \notin \mathbb{N}^*$

- $\forall$ signifie "pour tout élément de"

  p.ex. $\forall n \in \mathbb{N},\ n+1 \in \mathbb{N}^*$

Remarque :

$\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.q. $n+2=0$

la syntaxe ~~est~~ correcte, la sémantique non.

$n \mathbb{N} \exists$ t.q. $\forall 0 = 2$

$\forall 0 \in \mathbb{N}$

a une mauvaise syntaxe.

3) ss-ensembles

Un ss-ensemble est une ss-collection d'un ensemble :

- p.ex $E = \{0\}$, $F = \{1,2,3\}$, $G = \{17, 2, 152, 4\}$
- $E = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} \text{ t.q. } n = 2k\}$

  $F = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} \text{ t.q. } n = 2k+1\}$

  $P = \{n \in \mathbb{N}^* \mid \forall m, k \in \mathbb{N},\ n = m \cdot k \Rightarrow \text{soit } k = 1, \text{ soit } m = 1\}$

On note $E \subset \mathbb{N}$. En général, si E, F sont des ensembles, alors

$$E \subset F \iff \forall x \in E,\ x \in F$$

4) couples ordonnés

: Si E, F sont des ensembles, on peut former la collection des couples ordonnés

$$E \times F := \{(x,y) \mid \text{t.q. } x \in E, y \in F\}$$

$(x,y) \neq (y,x)$ en général, alors que $\{x,y\} = \{y,x\}$

5) Si $A, B \subset E$ sont des ensembles,

- $A \cap B := \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$
- $A \cup B := \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- $A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$

6) Si E est un ensemble, la collection de tous les ss-ensembles est l'ensemble puissance de E. On le note par

$$\mathcal{P}(E)$$

Donc $A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$

On note $\phi := \{n \in \mathbb{N} \mid n \neq n\}$

p.ex. $P(\phi) = \{\phi\}$

$$P(P(\phi)) = \{\phi, \{\phi\}\}$$

$$P(P(P(\phi))) = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$$

7) Ordre sur $\mathbb{N}$:

On dit que $n > m$ pour $n, m \in \mathbb{N}$ ssi $\exists\, d \in \mathbb{N}^*$ t.q. $m + d = n$

L'ordre sur $\mathbb{N}$ est totale c'est-à-dire

$\forall n, m \in \mathbb{N}$, soit $n=m$, soit $n<m$
soit $m<n$.

En plus $\mathbb{N}$ est bien ordonné i.e.

Si $E \subset \mathbb{N}$ et $E \neq \emptyset$, alors E possède un élément minimal.

2) Chaque $n \in \mathbb{N}$ possède un successeur $(n+1)$ et tout élément $n \in \mathbb{N}^*$ possède un unique prédécesseur $(n-1)$

3) Si $n, m \in \mathbb{N}$,

$$n^m := \begin{cases} 1 & \text{si } m=0 \\ \underbrace{n\times n\times \dots \times n}_{m \text{ fois}} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ n(n-1)(n-2)\dots\cdot 2\cdot 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Thm: $\mathbb{N}$ possède la propriété de simplification, i.e.

1) $\forall n, m, p \in \mathbb{N}$ $\quad n+p=m+p \Leftrightarrow n=m$

2) $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n, m \in \mathbb{N}$ $\quad n\times p = m \times p \Leftrightarrow n=m$

preuve: 1) $\Rightarrow$ Par absurde. Supposons que $m \neq n$. Donc, $n < m$ ou $m < n$.
Sans perte de généralités (SPG) prenons $n < m$. $\exists$ donc $d \in \mathbb{N}^*$ t.q. $n + d = m$.
On aurait alors $n + d + p = m + p = n + p + d$.
Donc, $m + p > n + p$ ↯.
Donc, $m = n$.

2) $\Rightarrow$ Supposons que $np = mp$ mais $n \neq m$.
SPG on pose $n > m$. $\exists$ $d \in \mathbb{N}^*$ t.q.
$m + d = n$. Mais alors

$$p \cdot n = p(m + d) = pm + \underbrace{pd}_{\in \mathbb{N}^*}$$

Donc $pn > pm$ ↯. $\square$.

Corollaire: Soient $n, m, d \in \mathbb{N}$.
Supposons que $n = m + d$ et
$n, m \in k\mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$
Alors $d \in k\mathbb{N}$.

preuve: Puisque $n, m \in k\mathbb{N}$, $\exists$ $a, b \in \mathbb{N}$ t.q.
$n = k \cdot a$ et $m = k \cdot b$. Donc
$a \geq b$. Donc $\exists$ $\ell \in \mathbb{N}$ t.q. $b + \ell = a$

Donc, $\underline{n} = k\cdot a = k(b+e) = kb + ke$
$= m + ke = m + d$

Donc, $d = k\cdot e$ par simplification $\square$.

<u>Théorème fondamental de l'arithmétique</u> (TFAr) : Tout nombre $n \in \mathbb{N}_{>1}$ se factorise de manière unique (à l'ordre des facteurs près) comme un produit de nombres premiers

<u>preuve:</u>

1) <u>existence:</u> <u>par absurde</u>

Posons $E = \{ n \in \mathbb{N}_{>1} \mid n$ ne possède pas de factorisation en premiers $\}$

Supposons $E \neq \emptyset$. Par bon ordre E possède un minimum, disons m.
m n'est pas premier, car sinon il serait sa propre factorisation. Il existe alors $a, b \in \mathbb{N}_{>1}$ t.q. $a\cdot b = m$. Comme $a, b < m$ on a que $a, b \notin E$. Donc,

$a = p_1 \cdot p_2 \cdots p_s$, $b = q_1 \cdots q_t$ avec
$p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_t$ premiers

Mais alors $m = p_1 \cdot p_2 \cdots p_s q_1 \cdot q_2 \cdots q_t$ et $m \notin E$ ↯. Donc $E = \emptyset$.

Unicité : Soit E l'ensemble des naturels avec plusieurs factorisations en premiers. Supposons $E \neq \emptyset$. Il a donc un élément minimal, disons m.

Donc,
$$m = p_1 \cdot p_2 \cdots p_s$$
$$= q_1 \cdot q_2 \cdots q_t$$

Par minimalité, tous les p_i $i = 1, \dots, s$ diffèrent de tous les q_j $j = 1, \dots, t$.

En particulier $q_1 \neq p_1$.

SPG, on pose $p_1 < q_1$. Donc $\exists\, d \in \mathbb{N}^*$ t.q. $p_1 + d = q_1$. On a alors

$$m = q_1 \cdot q_2 \cdots q_t = (p_1 + d) q_2 \cdots q_t$$

$$= \underbrace{p_1 q_2 \cdots q_t}_{\in p_1 \mathbb{N}} + d q_2 \cdots q_t = \underbrace{p_1 \cdot p_2 \cdots p_s}_{\in p_1 \mathbb{N}} = m$$

Par le dernier corollaire,

$d q_2 \cdots q_t \in p_1 \mathbb{N}$ et

$d q_2 \cdots q_t < m$. Mais alors $d \in p_1 \cdot \mathbb{N}$

Comme $q_1 = p_1 + d$, $q_1 \in p_1 \mathbb{N}$ ↯ car q_1 premier $\square$.

§ 1.2. La RECURRENCE

Thm: Soit $\{P(n) \mid n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}\}$ une famille d'affirmations. Supposons que

1) $P(n_0)$ est vraie

2) $\forall n \geq n_0$ si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie aussi.

Alors $P(n)$ est vraie $\forall n \geq n_0$

preuve: Posons l'ensemble

$$E := \{ n \in \mathbb{N}_{\geq n_0} \mid P(n) \text{ est fausse.} \}$$

Supposons que $E \neq \emptyset$. E étant ss-ensemble de $\mathbb{N}$, on a par le bon ordre qu'il possède un élément minimal, disons N.

Par 1), $N \neq n_0$ et donc $N > n_0$ et en particulier $N \in \mathbb{N}^*$. Il existe alors $m \in \mathbb{N}$ t.q. $m+1 = N$. Mais $P(m)$ est vraie par minimalité de N.

Par 2), $P(m+1) = P(N)$ est vraie aussi. Donc $N \notin E$ $\lightning$ $\square$.

Contre-exemple:

Montrons par récurrence que $n! = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En effet, si $n! = 0$, alors $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

$= (n+1)0 = 0.$

⚠ Ce raisonnement est faux, car il n'a pas été initialisé.

§. 1.3. Les nombres entiers

L'équation $x+1=0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{N}$.

L'idée est de dire que 2 p.ex. est la différence entre 2 et 0 ou entre 3 et 1, ou encore entre $m+2$ et m, pour $m \in \mathbb{N}$

On pourrait donc dire que 2 correspond à l'ensemble $\{(m+2, m) \mid m \in \mathbb{N}\}$

On va donc dire que

$$-2 = \{(m, m+2) \mid m \in \mathbb{N}\}.$$

Déf: On dit que (a,b) est en relation avec le couple (c,d), avec $(a,b), (c,d) \in \mathbb{N}^2$, ssi $a+d = b+c$.
On le note par $(a,b) \sim (c,d)$

Thm: la relation $\sim$ est une relation d'équivalence
i.e. 1) $\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2$, $(a,b) \sim (a,b)$
(réflexivité de $\sim$)

2) $\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{N}^2$, si $(a,b) \sim (c,d)$ alors

$(c,d) \sim (a,b)$ (symétrie de $\sim$)

3) si $(a,b) \sim (c,d)$ et $(c,d) \sim (k,\ell)$, alors
$(a,b) \sim (k,\ell)$ (transitivité de $\sim$)

preuve: en exercices. Indication pour 3)
Il faut montrer que $a+\ell = b+k$. C'est équivalent à montrer que
$$a+\ell+c+d = b+k+c+d$$ et
donc.... □.

Déf: Soit $(a,b) \in \mathbb{N}$. On appelle la classe d'équivalence de (a,b) l'ensemble
$$[(a,b)] := \{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2 \mid (k,\ell) \sim (a,b)\}$$

Thm: Soient $(a,b), (c,d) \in \mathbb{N}^2$. Alors
$$[(a,b)] = [(c,d)] \iff (a,b) \sim (c,d)$$

$\Rightarrow$: Par définition,
$$[(a,b)] = \{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2 \mid (k,\ell) \sim (a,b)\}.$$
Par réflexivité, $(a,b) \sim (a,b)$. Donc, $(a,b) \in [(a,b)]$ et similairement, $(c,d) \in [(c,d)]$.
Si $[(a,b)] = [(c,d)]$, alors $(a,b) \in [(c,d)]$ et donc $(a,b) \sim (c,d)$

$\underline{\Leftarrow}$: Soit $(k,\ell) \in [(a,b)]$. Alors $(k,\ell) \sim (a,b)$. Comme $(c,d) \sim (a,b)$ et que $\sim$ est transitive on a $(k,\ell) \sim (c,d)$ et donc $(k,\ell) \in [(c,d)]$. Ainsi, $[(a,b)] \subset [(c,d)]$.

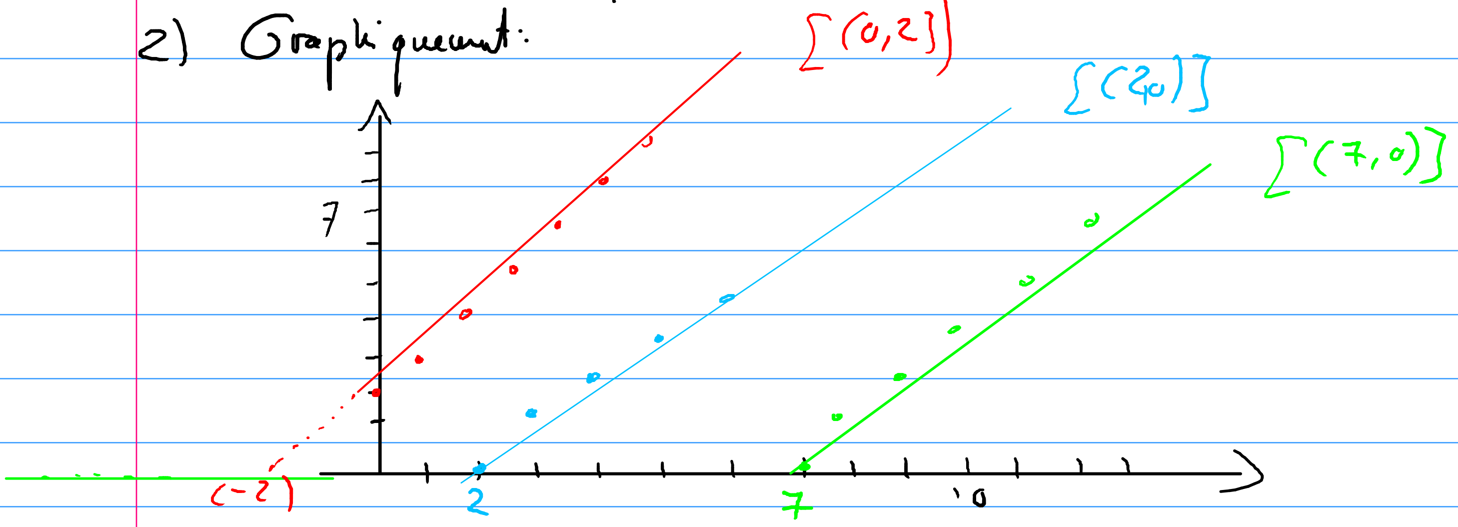
Si $(k,e) \in [(c,d)]$, alors $(k,\ell) \sim (c,d)$. Et comme $(c,d) \sim (a,b)$, par transitivité, $(k,e) \sim (a,b)$. Donc, $(k,\ell) \in [(a,b)]$ et ainsi

$$[(c,d)] \subset [(a,b)] \qquad \square.$$

Astuces et représentations:

1) $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ peut être vu comme la partie "positive", a, et la partie "négative", b, d'un nouveau type de nombre

2) Graphiquement:



Déf: l'ensemble des nombres entiers (nombres relatifs) est la collection des classes d'équivalence pour $\sim$:

$$\mathbb{Z} := \{ [(a,b)] \mid (a,b) \in \mathbb{N}^2 \}$$

Puisque $u \in \mathbb{Z}$ correspond à $[(a,b)]$ et $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ et puisque l'ordre sur $\mathbb{N}$ est total, on a que

$$(a,b) \sim (u,0) \quad \text{ou} \quad (a,b) \sim (0,u)$$

On pose alors

$$\mathbb{Z}_+ := \{[(a,b)] \in \mathbb{Z} \mid (a,b) \sim (u,0)\}$$

$$\mathbb{Z}_- := \{[(a,b)] \in \mathbb{Z} \mid (a,b) \sim (0,u)\}$$

On a alors $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_-$

Par identification de $u \in \mathbb{N}$ avec $[(u,0)]$, on a que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Déf: Soient $[(a,b)], [(c,d)] \in \mathbb{Z}$. On pose

$$[(a,b)] + [(c,d)] := [(a+c, b+d)]$$

Dans $\mathbb{Z}$, $x + 1 = 0$ devient

$$[(a_x, b_x)] + [(1,0)] = [(0,0)] = [(1,1)]$$

Donc $[(a_x, b_x)] = [(0,1)] \quad \left(\underset{\text{not.}}{=} -[(1,0)] \right)$

Vérifions que si $(k,\ell) \in [(a,b)]$ et $(k',\ell') \in [(c,d)]$, alors $(k+k', \ell+\ell') \in [(a+c, b+d)]$.

On encore que

$$k+k' + b+d = \ell+\ell' + a+c$$

Mais $\underline{k}+k' + \underline{b}+d = \ell+a + \underline{k'}+\underline{d}$

$= e+a+e'+c$ ✓

Thm: L'opération $+$ fait de $\mathbb{Z}$ un groupe abélien, i.e.

1) $\forall\, n, m \in \mathbb{Z}$, $n+m = m+n$ (commutativité de $+$)

2) $\forall\, n, m, p \in \mathbb{Z}$, $n+(m+p) = (n+m)+p$ (associativité de $+$)

3) $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $n + [(0,0)] = [(0,0)] + n = n$ ($[(0,0)]$ est élément neutre pour $+$)

4) $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\exists\, n' \in \mathbb{Z}$ t.q. $n+n' = [(0,0)]$

preuve en exercices.

Déf: Soient $[(a,b)], [(c,d)] \in \mathbb{Z}$. On pose
$$[(a,b)] \times [(c,d)] := [(ac+bd, ad+bc)]$$

On doit vérifier que ce produit ne dépend pas des représentants choisis

Soient $(k,e) \sim (a,b)$ et $(k',e') \sim (c,d)$

On veut montrer que
$$(kk'+ee', ke'+ek') \sim (ac+bd, ad+bc)$$

On a que
$$(kk'+ee', ke'+ek') \sim$$
$$(kk'+ee'+ad+bc+ae'+bk', ke'+ek'+ad+bc+ae'+bk')$$

$$\sim (k\underline{k'} + k\ell' + ad + bc + b\ell' + b\underline{k'}, \; k\ell' + \ell k' + ad + bc + a\ell' + bk')$$

$$\sim (\ell k' + k\ell' + \underline{a}d + bc + b\ell' + \underline{a}k', \; k\ell' + \ell k' + ad + bc + a\ell' + bk')$$

$$\sim (\ell k' + k\ell' + ac + \underline{b}c + \underline{b}\ell' + a\ell', \; k\ell' + \ell k' + ad + bc + a\ell' + bk')$$

$$\sim (\ell k' + k\ell' + ac + bd + bk' + a\ell', \; k\ell' + \ell k' + ad + bc + a\ell' + bk')$$

$$\sim (ac + bd, \; ad + bc)$$

Thm: $\mathbb{Z}$ muni de $+$ et $\times$ en fait un anneau commutatif, i.e.

1) $\mathbb{Z}$ muni de $+$ est un groupe abélien.
2) $\times$ est associatif, i.e. $\forall m, n, p \in \mathbb{Z}$, $m \times (n \times p) = (m \times n) \times p$
3) $\times$ se distribue sur l'addition, i.e. $\forall m, n, p \in \mathbb{Z}$, $m \times (n + p) = m \times n + m \times p$
4) $\forall m, n \in \mathbb{Z}$, $m \times n = n \times m$.

preuve en exercices supplementaires □.

Thm: $\mathbb{Z}$ muni de $+$ et de $\times$ est un anneau unitaire, i.e. $\exists\, 1 \in \mathbb{Z}$ t.q.

$\forall m \in \mathbb{Z}$, $1 \times m = m \times 1 = m$

$(1_{\mathbb{Z}} = [(1_{\mathbb{N}}, 0)] = \{(n + 1_{\mathbb{N}}, n)\})$

De plus $\mathbb{Z}$ est intègre, i.e. $\forall n, m \in \mathbb{Z}$.

$n \times m = 0 \iff n = 0$ ou $m = 0$

premiers exercices:

Soient $m, n \in \mathbb{Z}$. On a donc $m = [(a_m, b_m)]$ et $n = [(a_n, b_n)]$

- Si $m, n \in \mathbb{Z}_+^*$, on peut choisir $b_m = 0 = b_n$ et $m \times n = [(a_m a_n, 0)] \in \mathbb{Z}_+^*$
- Si $m, n \in \mathbb{Z}_-^*$, on peut choisir $a_m = 0 = a_n$ et $m \times n = [(b_m b_n, 0)] \in \mathbb{Z}_+^*$
- Si $m \in \mathbb{Z}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}_-^*$, on peut choisir $b_m = 0 = a_n$ et $m \times n = [(0, a_m b_n)] \in \mathbb{Z}_-^*$

Autrement dit, $\forall m, n \in \mathbb{Z}^*$

$m \times n \in \mathbb{Z}_+^* \iff$ soit $m, n \in \mathbb{Z}_+^*$,
soit $m, n \in \mathbb{Z}_-^*$

Corollaire: 1) $\mathbb{Z}$ possède aussi la propriété de simplification, i.e., $\forall m, p, n \in \mathbb{Z}$,

$$m + n = m + p \iff n = p$$

2) $\forall m \in \mathbb{Z}^*, \forall n, p \in \mathbb{Z}$,

$$m \times n = m \times p \iff n = p$$

3) $\forall m, n \in \mathbb{Z}, -(m \times n) = (-m) \times n = m \times (-n)$

preuve: 1) clair (existence des opposés)

3) $m \times n - (m \times n) = 0 = n \times 0$

$= n \times (m - m) = n \times m + n \times (-m)$

par simplification $-(m \times n) = n \times (-m)$.

2) $m \times n = m \times p \iff m \times n - m \times p = 0$

$\iff m \times n + m \times (-p) = 0$

$\iff m \times (n + (-p)) = 0$. Par intégrité,

$n + (-p) = 0$ ou encore que $n = p$. $\square$

Déf: $\forall m, n \in \mathbb{Z}$

$$m < n \iff n - m \in \mathbb{Z}_+^*$$

Thm: l'ordre dans $\mathbb{Z}$ est total. De plus,

1) $\forall m, n, p \in \mathbb{Z}$, $m + n < m + p \iff n < p$

2) $\forall m \in \mathbb{Z}_+^*$, $\forall n, p \in \mathbb{Z}$, $m \times n < m \times p \iff n < p$

preuve: Soient $n, m \in \mathbb{Z}$ et $n \neq m$. Alors $n - m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} = \mathbb{Z}_+^* \cup \mathbb{Z}_-^*$ (disjointe). Donc, soit $n - m \in \mathbb{Z}_+^*$, soit $n - m \in \mathbb{Z}_-^*$.

1) $n < p \iff p - n \in \mathbb{Z}_+^*$

$\iff 0 + p - n \in \mathbb{Z}_+^* \iff (m - m) + p - n \in \mathbb{Z}_+^*$

$\iff (m + p) - (m + n) \in \mathbb{Z}_+^* \iff m + p > m + n$.

2) $p \times m < n \times m, \iff m \times n - p \times m \in \mathbb{Z}^*_+$

$\iff m \times n + m \times (-p) \in \mathbb{Z}^*_+$

$\iff m \times (n + (-p)) = \mathbb{Z}^*_+ \iff n + (-p) \in \mathbb{Z}^*_+$

$\iff n > p.$ $\square.$

Remarque: $\mathbb{Z}$ nous permet d'avoir les opposés.

On a un ordre $<$ total. Mais on a perdu le bon ordre.

§1.4. Les nombres rationnels

$7x + 1 = 0$ n'pas le solution dans $\mathbb{Z}$.

Déf: On écrit par $(m,n), (k,\ell) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$

$$(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{numérateur}}}{m}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dénominateur}}}{n}) \sim' (k,\ell) \iff m \times \ell = n \times k$$

Thm: $\sim'$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$

preuve en exercices:

Déf: Pour $(n,m) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ on pose

$$[(n,m)] := \{(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* \mid (a,b)\sim'(n,m)\}$$

$$\mathbb{Q} := \{[(a,b)] \mid (a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*\}$$

Thm: $\forall\ (a,b),(c,d)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$,

$$[(a,b)] = [(c,d)] \iff (a,b)\sim'(c,d)$$

preuve en exercice.

Déf: Soient $(a,b),(c,d)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$

On pose

$$[(a,b)]+[(c,d)] := [(ad+bc,\ bd)]$$

$$[(a,b)]\times[(c,d)] := [(ac,\ bd)]$$

Vérifions que + et × sont bien définis.

Soient $(a,b)\sim'(k,\ell)$ et $(c,d)\sim'(k',\ell')$

On a que

- $(k\ell'+k'\ell)\,bd = k\ell'bd + k'\ell bd$
$= a\ell'\ell d + \ell bc\ell' = \ell\ell'(ad+bc)$
- $kk'\cdot bd = ak'\ell d = ac\ell\ell'$

On peut identifier

$\mathbb{N} \ni n \longleftrightarrow [(n,0)] \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} \ni n \longleftrightarrow \{(\underset{\in \mathbb{Z}}{n}, \underset{1_{\mathbb{Z}} = [(1,0)] \in \mathbb{Z}}{1})\} \in \mathbb{Q}$

(est déjà une classe d'équivalence)

On peut avec ces identifications écrire

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Thm: les opérations + et × font de $\mathbb{Q}$ un corps commutatif, i.e.

1) + fait de $\mathbb{Q}$ un groupe abélien

2) × fait de $\mathbb{Q}^*$ un groupe abélien

3) le produit × se distribue sur l'addition :

$\forall r,q,s \in \mathbb{Q}, \quad r \times (s+q) = r\times s + r\times q$

preuve: en exercice $\square$.

Notations: • si $n \in [(a,b)]$, alors on note $\{(-a,b)\}$ comme $-n$.

• si $n \in \{(a,b)\} \in \mathbb{Q}^*$, alors on note $[(b,a)]$ comme $\frac{1}{n}$ ou n^{-1}

<u>Déf</u>: $\mathbb{Q}_+ := \{ [(a,b)] \mid a \times b \in \mathbb{Z}_+ \}$

$\mathbb{Q}_- := \{ [(a,b)] \mid a \times b \in \mathbb{Z}_- \}$

$\forall\ r,s \in \mathbb{Q}$

$$r < s \iff s - r \in \mathbb{Q}_+^*$$

<u>Thm</u>: On a

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+^* \cup \{[(0,1)]\} \cup \mathbb{Q}_-^*$$

et cette union est disjointe. De plus, $<$ est <u>totale</u> et $\mathbb{Q}$ est <u>intègre</u>. l'ordre est compatible avec $+$ et $\times$, i.e.

$\forall\ p,q \in \mathbb{Q}$, 1) $q(-p) = -(qp)$

$\forall\ p,q \in \mathbb{Q}^*$, 2) $(pq)^{-1} = p^{-1} q^{-1}$

<u>preuve en</u> exercices $\square$.

<u>Remarque</u>: Le passage de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Q}$ nous fait gagner l'existence d'inverse (pour des éléments non nuls) mais on perd la propriété de successeur. En effet, si

$a < b$, $a, b \in \mathbb{Q}$, alors

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

Thm (TFAr version rationnelle) : $\forall r \in \mathbb{Q}_+^*$ il existe un unique couple d'ensembles de nbres premiers $\{p_1, \dots, p_n\}$, $\{q_1, \dots, q_m\}$ et un unique couple d'ensembles de nombres dans $\mathbb{N}^*$, $\{a_1, \dots, a_n\}$ et $\{b_1, \dots, b_m\}$, t.q.

1) $r = [(p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n}, q_1^{b_1} \cdots q_m^{b_m})]$

2) $\{p_1, \dots, p_n\} \cap \{q_1, \dots, q_m\} = \emptyset$

preuve: (convention: produit sur un ensemble vide de facteurs donne le nombre 1)

Soit $r \in \mathbb{Q}_+^* \setminus \{1\}$. Alors $r = [(a,b)]$ avec $a, b \in \mathbb{Z}_+^*$. Par simplification (sur $\mathbb{Z}$) on peut choisir a et b sans diviseur commun (à part 1).

Il existe alors des nombres premiers $\{p_1, \dots, p_n\}$, $\{q_1, \dots, q_m\}$ et des nombres positifs naturels $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ t.q.

$$a = p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n}$$
$$b = q_1^{b_1} \cdots q_m^{b_m}$$

conséquence de TFAr dans $\mathbb{N}^*$

De plus, comme a et b n'ont pas de facteurs communs, on a que $\{p_1, \dots, p_n\} \cap \{q_1, \dots, q_m\} = \emptyset$.

Montrons encore l'unicité:

Supposons que

$$r = [(p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n}, q_1^{b_1} \cdots, q_m^{b_m})]$$

$$= [(p_1'^{a_1'} \cdots p_{n'}'^{a_{n'}'}, q_1'^{b_1'} \cdots q_{m'}'^{b_{m'}'})]$$

et $\{p_1, \dots, p_n\} \cap \{q_1, \dots, q_m\} = \emptyset$

et $\{p_1', \dots, p_{n'}'\} \cap \{q_1', \dots, q_{m'}'\} = \emptyset$.

On aurait alors

$$p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n} \cdot q_1'^{b_1'} \cdots q_{m'}'^{b_{m'}'}$$

$$= p_1'^{a_1'} \cdots p_{n'}'^{a_{n'}'} q_1^{b_1} \cdots q_m^{b_m}$$

qui est une égalité entre nombres naturels.

Par unicité de la factorisation dans $\mathbb{N}^*$ on a

$\{p_1, \dots p_n\} = \{p_1', \dots p_{n'}'\}$,

$\{q_1, \dots, q_m\} = \{q_1', \dots, q_{m'}'\}$,

$n = n'$ et $m = m'$ et

$a_1, \dots, a_n = a_1', \dots a_n'$ et

$b_1, \dots, b_m = b_1', \dots, b_{m'}'$ $\square$

§ 1.5. Les nombres réels

Thm:
L'équation $r^2 = 2$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{Q}$.

preuve: supposons (par absurde) que $r \in \mathbb{Q}_+^*$ soit t.q. $r^2=2$. Clairement, $r \neq 1$.
Par le TFAr (version $\mathbb{Q}$), on peut écrire

$$r = [(p_1^{a_1} \dots p_n^{a_n}, q_1^{b_1} \dots q_m^{b_m})]$$

Mais alors,

$$r^2 = [(p_1^{2a_1} \dots p_n^{2a_n}, q_1^{2b_1} \dots q_m^{2b_m})]$$
$$= [(2,1)]$$

Par unicité de la décomposition, on doit avoir $m=0$, $n=1$, $2a_1 = 1$.
Mais $a_1 \in \mathbb{N}^*$, d'où $\lightning$ $\square$

Cherchons des approximations à un $r \in \mathbb{Q}_+^*$ t.q. $r^2=2$

Si $x^2 = 2$ et $x > 0$, alors

alors $x^2 - 1 = 1$ et $x > 0$

$\iff (x-1)(x+1) = 1$ et $x > 0$

$\iff (x-1) = \frac{1}{1+x}$ et $x > 0$

$\iff x = 1 + \frac{1}{1+x}$ et $x > 0$

$$\iff x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 \cdots}}}}}$$

On crée une suite de nombres rationnels en posant $x_0 = 1$, $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+x_n}$

On peut vérifier que

$$(x_{2n})^2 < (x_{2n+2})^2 < 2 < (x_{2n+3})^2 < (x_{2n+1})^2$$

Def: Une coupure de Dedekind est un couple (A, B) avec $A, B \subset \mathbb{Q}$

(D1): $A, B \neq \emptyset$

(D2): $A \cup B = \mathbb{Q}$

(D3): $\forall r \in A, \forall s \in B, \quad r < s$

(D4): $\forall r \in A, \exists\, r' \in A$ t.q. $r < r'$

(A n'a pas de maximum)

Exemples: 1) 0 est représenté par

$(\mathbb{Q}_{<0}, \mathbb{Q}_{\geq 0})$

2) $(\mathbb{Q}_{<1}, \mathbb{Q}_{\geq 1})$, $(\mathbb{Q}_{<-\frac{3}{2}}, \mathbb{Q}_{\geq -\frac{3}{2}})$,

$(\mathbb{Q}_{<r}, \mathbb{Q}_{\geq r})$ $r \in \mathbb{Q}$.

3) $A = \{ r \in \mathbb{Q}_+ \mid r^2 < 2 \} \cup \mathbb{Q}_{<0}$

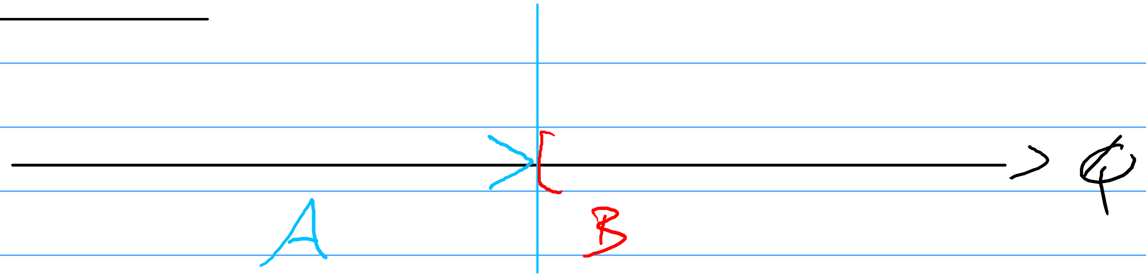
$B = \mathbb{Q} \setminus A$

On observe deux types de coupures de **Dedekind:**

Type 1: B possède un minimum, disons r. Mais alors $A = \mathbb{Q}_{<r}$, $B = \mathbb{Q}_{\geq r}$

Type 2: B ne possède pas de minimum, Alors la coupure (A, B) représente un irrationnel.

Visualisation:



Lemme: Soit (A, B) une coupure de Dedekind et soit $\delta \in \mathbb{Q}_+^*$. $\exists\, n \in \mathbb{Z}$ t.q.

$n\delta \in A$ et $(n+1)\delta \in B$

preuve: Il existe $s\in A$, $t\in B$ avec $t>s$.
Il existe donc $a, b, c, d\in\mathbb{Z}$ t.q.

$s=[(a,d)]$, $t\in[(b,d)]$, $\delta=[(c,d)]$
avec $0< c, d$, $b-a$ ..
Mais alors,

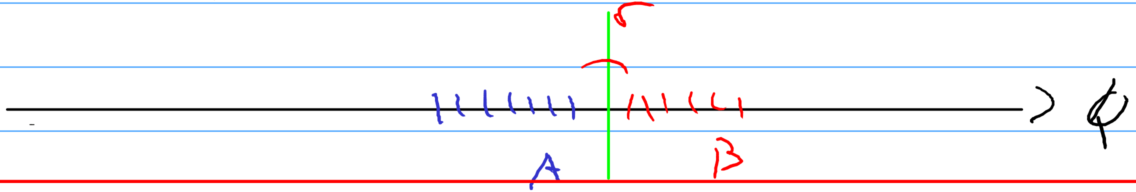
$$-a^2c \leq a<b \leq b^2c$$

Donc, $-a^2\delta \leq s<t \leq b^2\delta$
$\Rightarrow -a^2\delta\in A$ et $b^2\delta\in B$.
Considérons alors

$$E=\{u\in\mathbb{Z} \mid u\delta\in B\}\subset\mathbb{Z}$$

$E\neq\emptyset$, car $b^2\in E$. E minoré par $-a^2$.

Donc, E possède un minimum, disons m.
$\Rightarrow m\delta\in B$, $(m-1)\delta\in A$. On pose alors
$u=m-1$ □



Déf: Soient (A_x, B_x) et (A_y, B_y) deux coupures de Dedekind. On pose

$$A_{x+y} := \{s+t \mid s\in A_x, t\in A_y\},$$

$$B_{x+y} := \mathbb{Q}\setminus A_{x+y}$$

Vérifions que (A_{x+y}, B_{x+y}) est une coupure de Dedekind.

(D1): puisque (A_x, B_x) et (A_y, B_y) sont des coup. de Dede. ni A_x, ni A_y ne sont vides. Donc, $\exists$ $s \in A_x$ et $t \in A_y$ et $s+t \in A_{x+y} \neq \emptyset$ De plus, $\exists\, s' \in B_x$ et $t' \in B_y$ et si $s \in A_x$, $t \in A_y$, $s+t < s'+t'$. Donc, $s'+t' \in B_{x+y} \neq \emptyset$.

(D2): Clair, puisque $B_{x+y} = \mathbb{Q} \setminus A_{x+y}$

(D3): On va montrer que si $r \in A_{x+y}$ et si $s < r$, alors $s \in A_{x+y}$.

Si $r \in A_{x+y}$, il $q \in A_x$ et $p \in A_y$ t.q. $r = q+p$. Puisque $s < r = q+p$, on a $s-q < p$. Donc $s-q \in A_y$ et

$$s = \underbrace{q}_{\in A_x} + \underbrace{(s-q)}_{\in A_y} \in A_{x+y}$$

(D4): Soit $r \in A_{x+y}$. Par construction, il existe $s \in A_y$, $t \in A_x$ t.q. $r = s+t$. $\exists\, s' \in A_y$ t.q. $s < s'$. Mais alors $s+t < s'+t \in A_{x+y}$.

Thm: l'ensemble des $\overset{\mathbb{R}}{\underline{\text{coupures de Dede}}}$, muni de $+$ forme un groupe abélien, i.e

1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x + y = y + x$
2) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $x + (y+z) = (x+y) + z$
3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + (\mathbb{Q}_{<0}, \mathbb{Q}_{\geq 0}) = x$
4) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists\, x' \in \mathbb{R}$ t.q. $x + x' = (\mathbb{Q}_{<0}, \mathbb{Q}_{\geq 0})$

preuve: en exercices. Pour le dernier point,

Si $x \in (A_x, B_x)$, on prend

$$x' = (-x) = (A_{-x}, B_{-x}) \text{ où}$$

$$A_{-x} = \{ q \in \mathbb{Q} \mid -q \in B_x \text{ et non minimal de } B_x \}$$

et $B_{-x} = \mathbb{Q} \setminus A_{-x}$

□

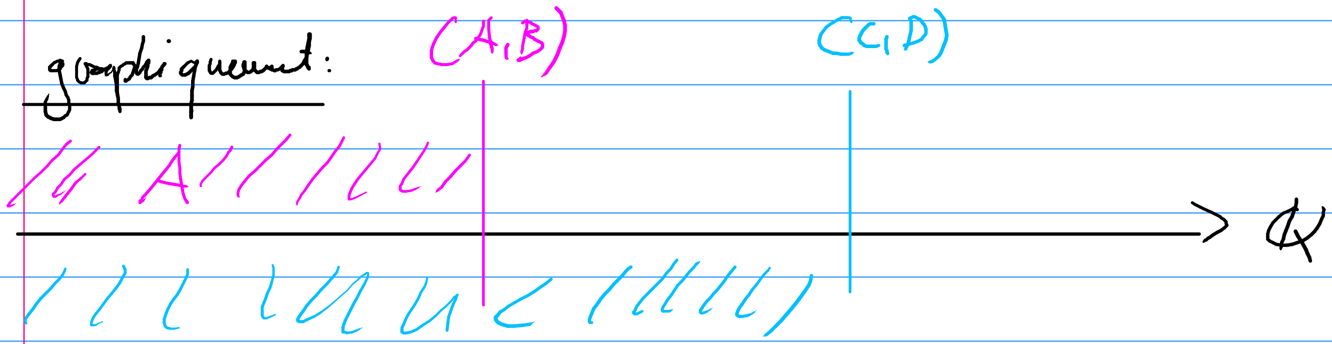
Remarque: Si $r, q \in \mathbb{Q}$ et si on les représente par $(\mathbb{Q}_{<r}, \mathbb{Q}_{\geq r})$ et $(\mathbb{Q}_{<q}, \mathbb{Q}_{\geq q})$ alors

$$(\mathbb{Q}_{<r}, \mathbb{Q}_{\geq r}) + (\mathbb{Q}_{<q}, \mathbb{Q}_{\geq q}) = (\mathbb{Q}_{<r+q}, \mathbb{Q}_{\geq r+q})$$

Déf: Soient $(A,B), (C,D) \in \mathbb{R}$. On pose un ordre $\leq$ par

$$(A,B) \leq (C,D) \iff A \subset C$$

graphiquement:



Thm: la relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est totale, i.e.

$\forall x, y \in \mathbb{R}$

soit $x \leq y$, soit $x > y$

preuve: en exercices ☺

Dans $\mathbb{C}$, décidons si $i<0$ ou $i>0$.

$i<0$ (et compatibilité avec $\times$) donne

$0>-i\cdot i=1$ ↯

$i>0$ (. - - - - - - . $\times$) donne

$0<i\cdot i=-1$ ↯

Déf: Soient $x,y\in\mathbb{R}_+$ On définit

$$A_{x\times y}:=\{r\times t\ |\ r\in A_x\cap\mathbb{Q}_{\geq 0},\ t\in A_y\cap\mathbb{Q}_{\geq 0}\}\cup\mathbb{Q}_{<0}$$

$$B_{x\times y}:=\mathbb{Q}\setminus A_{x\times y}$$

Vérifions que $(A_{x\times y}, B_{x\times y})\in\mathbb{R}$ si $x,y\in\mathbb{R}_+$

Supposons que x ou y égale $0_{\mathbb{R}}(=(\mathbb{Q}_{<0},\mathbb{Q}_{\geq 0}))$

alors, par définition, $A_{x\times y}=\mathbb{Q}_{<0}$ et donc

$x\times y=0_{\mathbb{R}}$

- Supposons que $x\neq 0_{\mathbb{R}}\neq y$:

(D1): Par définition $A_{x\times y}\supset\mathbb{Q}_{<0}$. Donc, $A_{x\times y}\neq\emptyset$. Puisque (A_x,B_x) et $(A_y,B_y)\in\mathbb{R}^*_+$

il existe $s\in B_x$, $t\in B_y$ et $s,t>0$.

Donc, si $r \in A_x \cap \mathbb{Q}_{>0}$ et $q \in A_y \cap \mathbb{Q}_{>0}$

On a que $r \times q < s \times q < s \times t \in B_{x\times y}$.

Donc, $B_{x\times y} \neq \emptyset$.

(D2): $A_{x\times y} \cup B_{x\times y} = \mathbb{Q}$, clair par définition.

(D3): Montrons que si $r \in A_{x\times y}$, $s < r$, alors $s \in A_{x\times y}$.

Si $s \in \mathbb{Q}_{<0}$, $s \in A_{x\times y}$, clair par définition

Si $s \geq 0$ et $s < r$, on a que $r = q \times p$, avec $q \in A_x \cap \mathbb{Q}_{\geq 0}$, $p \in A_y \cap \mathbb{Q}_{\geq 0}$

$0 \leq s < r = p \times q$. Mais alors,

$0 \leq \frac{s}{q} < \frac{r}{q} = p$, donc $\frac{s}{q} \in A_y \cap \mathbb{Q}_{>0}$. Mais

$$s = \underset{\in A_y}{\frac{s}{q}} \times \underset{\in A_x}{q} \in A_{x\times y}.$$

(D4): si $r \in A_{x\times y}$, $r = p \times q$, $p \in A_x \cap \mathbb{Q}_{\geq 0}$, $q \in A_y \cap \mathbb{Q}_{>0}$

Comme $(A_x, B_x) \in \mathbb{R}$, il existe un $q' > 0$ et $q' \in A_y$. Donc, $q' \times p > q \times p = r$.

Thm: $\times$ fait de $\mathbb{R}_+^*$ un groupe abelien.

avec $(A_{x^{-1}}, B_{x^{-1}})$ donné par

$A_{x-1} := \{ q \in \mathbb{Q} \mid \frac{1}{q} \in B_x$ et non minimal $\} \cup \mathbb{Q}_{<0}$

$B_{x-1} := \mathbb{Q} \setminus A_{x-1}$

preuve: en exercices □.

Déf: Soient $x, y \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est l'ensemble des coupures de Dede). Alors

$$x \cdot y := \begin{cases} x \times y & \text{si } x,y \geq 0 \\ -((-x) \times y) & \text{si } x < 0 \leq y \\ -(x \times (-y)) & \text{si } y < 0 \leq x \\ (-x) \times (-y) & \text{si } y, x < 0 \end{cases}$$

Thm: La somme $+$ et le produit $\cdot$ font de $\mathbb{R}$ un corps commutatif, i.e.

1) $\mathbb{R}$, muni de $+$ est un groupe abélien
2) $\mathbb{R}^*$, muni de $\cdot$ est un groupe abélien
3) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

preuve: 1) a déjà été montré. 2) est en exos. Le 3) peut se montrer comme suit: prenons le cas $z < 0 \leq x, y$ et $0 \leq y+z$. On a

$$\underline{x \cdot (y+z)} + \underline{x \cdot (-z)} = x \times (y+z) + x \times (-z)$$
$$= x \times (y+z+(-z)) = x \times y = x \cdot y$$

Donc, $x \cdot (y+z) = x \cdot y - x \cdot (-z) = x \cdot y + x \cdot z$

Les autres cas sont similaires et laissés en exos □

§1.6. Existence du supremum et ses conséquences

Déf: Soit $E \subset \mathbb{R}$. On dit que E est majoré, ssi $\exists\, M \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall x \in E,\ M \geq x$.
M est alors appelé un majorant de E.
On dit que E est minoré ssi $\exists\, m \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall x \in E\quad m \leq x$. m est appelé un minorant de E.

Thm de la borne supérieure: Soit $E \subset \mathbb{R}$, non vide et majoré. Alors l'ensemble des majorants de E, $\mathrm{maj}(E) := \{M \in \mathbb{R} \mid M \text{ majore } E\}$ possède un minimum. (appelé supremum ou borne supérieure de E).

preuve: posons

$$s = \sup(E) := \Big(\bigcup_{x\in E} A_x\ ,\ \bigcap_{y \in E} B_y\Big)$$

Montrons que $s \in \mathbb{R}$:

(D1) $A_s \neq \phi \neq B_s$: comme $E \neq \phi$, il existe un $x \in E$.
Donc $A_s \supset A_x$ et $A_s \neq \phi$.
E est majoré. Il existe $M \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall x \in E,\ M \geq x$.
Donc, $\forall x \in E$, $B_M \subset B_x$. Donc, $B_M \subset \bigcap_{x\in E} B_x \neq \phi$.

(D2): $A_s \cup B_s = \mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} \setminus A_s = \mathbb{Q} \setminus \bigcup_{x\in E} A_x = \bigcap_{x\in E} (\mathbb{Q} \setminus A_x)$$

$$= \bigcap_{x\in E} B_x = B_s .$$

(D3): Soit $r \in A_s$. Montrons que si $t < r$, alors $t \in A_s$

Si $r \in A_s = \bigcup_{x \in E} A_x$, alors $r \in A_x$ pour un $x \in E$.

si $t < r$, et $r \in A_x$, alors $t \in A_x$. Donc,

$t \in \bigcup_{x\in E} A_x = A_s$.

(D4): A_s ne possède pas de max, car si $r \in A_s$

alors $r \in A_x$ pour un $x \in E$. $\exists\, r' \in A_x$ avec $r' > r$.

Donc, $r' \in \bigcup_{x\in E} A_x = A_s$

Montrons que s majore E. Soit $x \in E$. Par construction

$A_x \subset \bigcup_{y\in E} A_y = A_s$. Donc, $s \geqslant x$.

Montrons que si M majore E, alors $M \geqslant s$. On

a $\forall x \in E$, $A_x \subset A_M$. Donc,

$A_s = \bigcup_{x\in E} A_x \subset A_M$ et ainsi, $s \leqslant M$. $\square$

Exemples: 1) $E = [0,1[$, $\sup(E) = 1$

2) $E = \{ r \in \mathbb{Q}_+ \mid r^2 < 2 \}$. On a montré

en exercices que E n'a pas de supremum dans $\mathbb{Q}$.

Mais dans $\mathbb{R}$, $\sup(E)$ existe.

Lemme: Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $n \geq 2$. Alors

$$a < b \iff$$

$$0 \leq (b-a)n a^{n-1} < b^n - a^n < (b-a) n b^{n-1}$$

Preuve: Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $n \geq 2$:

$\Rightarrow$ Supposons $a < b$: On a

$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1})$$

Donc, en substituant les b par des a, on a

$$b^n - a^n > (b-a) n a^{n-1}$$

En substituant les a par des b, on a

$$b^n - a^n < (b-a) n b^{n-1}.$$

$\Leftarrow$: Si $(b-a)nb^{n-1} > 0$, Comme $b > 0$, on a

$(b-a) > 0$, donc $b > a$. $\square$.

Corollaire: Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \geq 1$. $\exists\, r \in \mathbb{R}_+$ t.q.

$$r^n = x$$

Preuve: Considérons $E := \{ y \in \mathbb{R}_+ \mid y^n \leq x \}$.

$0 \in E \neq \emptyset$. De plus, $1+x$ majore E, car

$$(1+x)^n = 1 + nx + \cdots + nx^{n-1} + x^n > x^n \geq y^n \quad \forall y \in E.$$

Donc, $1+x > y$ $\forall y \in E$. On sait donc l'existence de $s = \sup(E)$.

Supposons $s^n < x$: on a alors $x - s^n > 0$. Posons

$h := \min\{1, \frac{x-s^n}{n(s+1)^{n-1}}\}$. On a $0 < h \leq 1$.

Clairement, $s+h > s$. On a aussi

$$x - (s+h)^n = x - s^n + s^n - (s+h)^n$$

$$= x - s^n - \left(\underbrace{(s+h)}_{b}^{n} - \underbrace{s}_{a}^{n}\right)$$

$$\geqslant x - s^n - hn(s+h)^{n-1} \quad \text{(lemme précédent)}$$

$$\geqslant x - s^n - hn(s+1)^{n-1} \quad (h \leq 1)$$

$$\geqslant hn(s+1)^{n-1} - hn(s+1)^{n-1} \quad \text{(déf. de } h\text{)}$$

$$= 0.$$

On aurait donc $x \geqslant (s+h)^n \Longrightarrow$ $s+h \in E$ et $s = \sup(E)$ ↯.

Supposons $s^n > x$: on aurait $s^n - x > 0$.

On pose $h := \frac{s^n - x}{n s^{n-1}}$. On a pour $y \in E$

$$(s-h)^n - y^n = (s-h)^n - s^n + s^n - y^n$$

$$= -\left(\underbrace{s}_{b}^{n} - \underbrace{(s-h)}_{a}^{n}\right] + s^n - y^n$$

$$\geqslant -hn s^{n-1} + s^n - y^n \quad \text{(lemme précédent)}$$

$$\geqslant -hn s^{n-1} + hn s^{n-1} = 0 \quad \text{(à cause de déf. } h\text{)}$$

On aurait dans s-h comme majorant de E

↯ $s = \sup(E)$.

Donc, $\overset{4}{s} = x$ □.

Déf: Soient E et F deux ensembles. Un graphe est un ss-ensemble $G \subset E \times F$ t.q.

$$\forall (x,y),(x',y') \in G,\ x = x' \Rightarrow y = y'$$

Une fonction est la donnée d'un triplet (E, G, F), où $G \subset E \times F$ est un graphe

E est alors le domaine de f (noté dom(f))

F est le co-domaine de f (codom(f))

l'ensemble de définition d'une fonction f est

$$Def(f) := \{x \in E \mid \exists y \in F \text{ t.q. } (x,y) \in G\}$$

l'image de f est définie par

$$Im(f) := \{y \in F \mid \exists x \in E \text{ t.q. } (x,y) \in G\}$$

Si dom(f) = Def(f) alors on parle d'application

Déf: Une suite (réelle) est une application

$$s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

On note $(s(n))_{n \in \mathbb{N}}$ pour une telle suite.

ou $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On dit que s converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ ssi

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geqslant N,\ |s_n - \ell| < \varepsilon$$

Thm de la convergence monotone : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, majorée et croissante. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers son suprémum.

preuve : Considérons $E = \{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$. E est donc non-vide et majoré et possède un suprémum, disons s.

→ Soit $\varepsilon > 0$. $s-\varepsilon$ ne majore plus E. Il existe donc un $x_N \in E$ t.q. $s-\varepsilon < x_N \leq s$.

Si $n \geq N$, on a $x_n \geq x_N$ (suite croissante).

Donc, $\forall n \geq N$ $s-\varepsilon < x_n \leq s < s+\varepsilon$

Donc, $\forall n \geq N$, $|s-x_n| < \varepsilon$. □

Exemple : Considérons $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{9}{10}$ $(=[(9,10)])$

$x_2 = \frac{99}{100}$ $(=[(99,100)])$, $x_3 = \frac{999}{1'000}$, $x_4 = \frac{9'999}{10'000}$, ...

$x_n = \frac{10^n - 1}{10^n}$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majoré par 1, qui est son suprémum. On a donc

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1 \underline{=} 0,\overline{9}$$

Déf : Une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } n,m \geq N \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Thm: Toute suite de Cauchy converge dans $\mathbb{R}$.

preuve: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. En effet, en posant $\varepsilon = 1$, on a que $|x_n - x_m| < 1$ si $n,m \geq N_1$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\min\{x_0, x_1, \dots x_{N_1} - 1\} \leq x_n \leq \max\{x_0, x_1, \dots, x_{N_1} + 1\}$$

Posons $U_n := \sup\{x_m \mid m \geq n\}$.

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée. Par le thm de la conv. monotone, $\lim_{n\to\infty} U_n = L \in \mathbb{R}$

Montrons que $\lim_{n\to\infty} x_n = L$:

→ Soit $\varepsilon > 0$. $\exists N'_\varepsilon$ t.q. $n,m \geq N'_\varepsilon$,

$$|x_n - x_m| < \varepsilon/2$$

$\exists M_\varepsilon$ t.q. $n \geq M_\varepsilon \Rightarrow |U_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$

Posons $N_\varepsilon = \max\{N'_\varepsilon, M_\varepsilon\}$. Si $n \geq N_\varepsilon$

$$|x_n - L| = |x_n - U_n + U_n - L|$$

$$\leq \underbrace{|x_n - U_n|} + \underbrace{|U_n - L|}_{< \varepsilon/2} < \varepsilon$$

$x_n + \varepsilon/2 \geq U_n \geq x_n$

$|x_n - U_n| \leq \varepsilon/2$

$\square$.

§ 1.7. Représentation décimale:

Déf: Un nombre décimal est un rationnel du type $[(a, 10^n)]$ $\left(= \frac{a}{10^n}\right)$, où $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Leur collection est notée $\mathbb{D}$.

Thm: Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

$$x = y \iff A_x = A_y$$
$$\iff A_x \cap \mathbb{D} = A_y \cap \mathbb{D}$$

preuve: Montrons que $A_x \cap \mathbb{D} = A_y \cap \mathbb{D} \Rightarrow x = y$.

Supposons (SPG) $x < y$: et montrons que $A_x \cap \mathbb{D} \neq A_y \cap \mathbb{D}$.

Si $x < y$, alors $A_x \subsetneq A_y$. $\Rightarrow \exists\, s \in A_y$ t.q. $s \notin A_x$.

Par le propriétés des coupures de Dede, $\exists\, t \in \mathbb{Q}$ t.q. $s < t \in A_y$. Ecrivons $t - s = [(a, b)]$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$. Mais

$$[(1, 10^b)] \leq [(a, b)] = t - s.$$

On sait (cf exercices) qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ t.q. $[(m, 10^b)] \in A_x$, $[(m+1, 10^b)] \in B_x$

Mais alors, $[(m+1, 10^b)] \notin A_x$ mais

$[(m+1, 10^b)] \in A_y$, car,

$$[(m+1, 10^b)] = [(m, 10^b)] + [(1, 10^b)]$$
$$< s + \underbrace{t-s}_{[(a,b)]} = t .$$

Donc, $A_x \cap \mathbb{D} \neq \mathbb{D} \cap A_y$ □.

Thm: Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe alors une suite $d^x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{D}$, telle que

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $d^x_n = [(a_n, 10^n)]$, $a_n \in \mathbb{N}$
2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $d^x_n \in A_x$, $d^x_n + [(1, 10^n)] \in B_x$
3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq d^x_n \leq d^x_{n+1} < d^x_n + [(1, 10^n)]$

preuve: Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$E_n := \{ m \in \mathbb{N} \mid [(m+1, 10^n)] \in B_x \}$$

$$a_n := \min(E_n) .$$

Il est laissé en exercice que les points 1) à 3) sont vérifiés. □.

$(d^x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée la représentation décimale de x

Exemples: 1) $x = \frac{3}{2}$ $\left(\mathbb{Q}_{<3/2} \mid \mathbb{Q}_{\geq 3/2} \right)$

$d_0^{3/2} = 1$, $d_1^{3/2} = \frac{14}{10}$, $d_2^{3/2} = \frac{149}{100}$,

$d_3^{3/2} = \frac{1'499}{1'000}$, ... on obtient

$1,4\overline{9}$

2) $x = \sqrt{2}$

$$= \Big(\underbrace{\{ r \in \mathbb{Q}_+ \mid r^2 < 2 \} \cup \mathbb{Q}_{\leq 0}}_{A_{\sqrt{2}}}, \underbrace{\{ r \in \mathbb{Q}_+ , r^2 > 2 \}}_{B_{\sqrt{2}}} \Big)$$

$d_0^{\sqrt{2}} = 1$, $d_1^{\sqrt{2}} = \frac{14}{10}$, $d_2^{\sqrt{2}} = \frac{141}{100}$

car $(140+1)^2 = 19600 + 280 + 1 < 20'000$

et $(140+2)^2 = 19'600 + 560 + 4 > 20'000$

Quel est le prix à payer?

$\mathbb{R}$ n'est plus dénombrable, i.e.
$\nexists$ de bijection $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On peut même montrer $\nexists$ bijection $f : \mathbb{N} \to [0,1]$

Supposons que $f : \mathbb{N} \to [0,1]$. On construit un nombre x par sa suite d^x comme suit:

On pose $d_0^x = 0$.

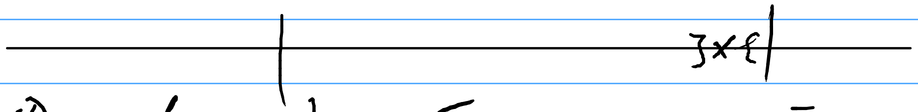
et ensuite $d_n^x = \begin{cases} 1 & \text{si } d_n^{f(n)} \neq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

On a que $d_n^x \neq d_n^{f(n)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc, $x \notin \mathrm{Im}(f)$.

Déf: Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est dit ouvert ssi $\forall x \in E$, $\exists \delta > 0$ t.q.

$$]x-\delta, x+\delta[\subset E$$



$E \subset \mathbb{R}$ est fermé ssi $\mathbb{R} \setminus E$ est ouvert.

2. RESOLUTION

But: Trouver des techniques pour calculer des suites décimales associées aux nombres $\sqrt{2}$, π, e, ...

§2.1. Technique des points fixes

On a déjà rencontré la suite

$$x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+x_n}$$

$$= g(x_n) \quad \text{où} \quad g(x) = 1 + \frac{1}{1+x}$$

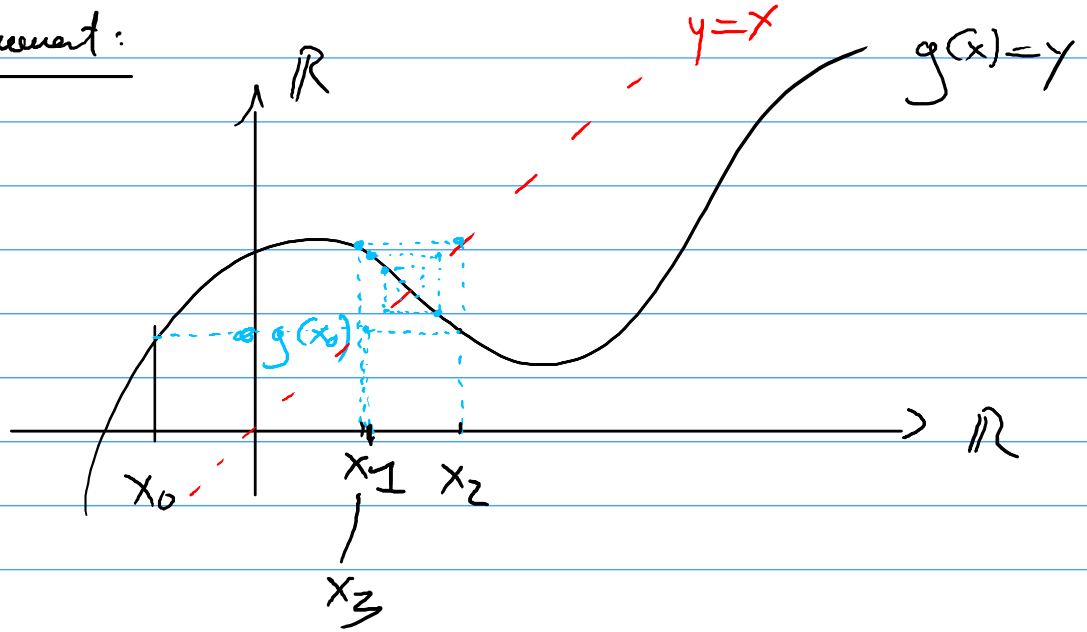
Déf: Une suite récurrente est une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $\forall n \geq 0$,

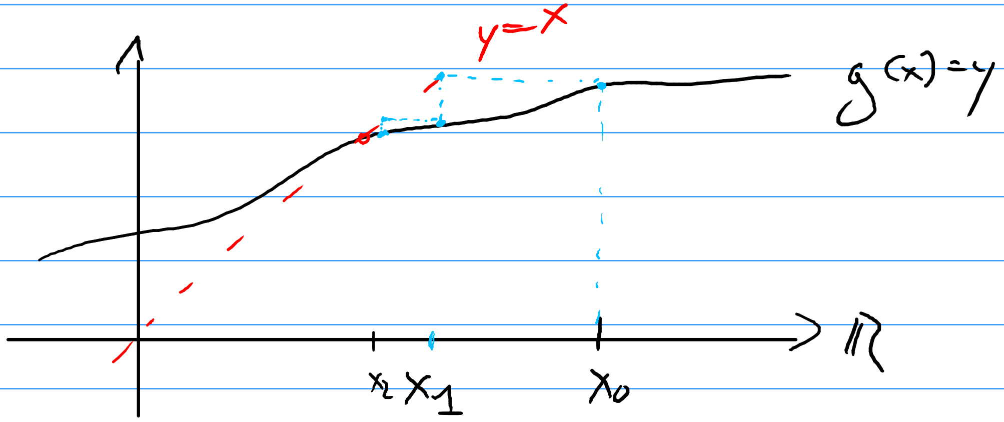
$$x_{n+1} = g(x_n) \quad \text{où}$$

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ t.q. $\text{Im}(g) \subset \text{Def}(g)$ et $x_0 \in \text{Def}(g)$

On dit que g génère $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

graphiquement :





Déf: Un point fixe d'une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un élément $\bar{x} \in \text{Def}(g)$ t.q.

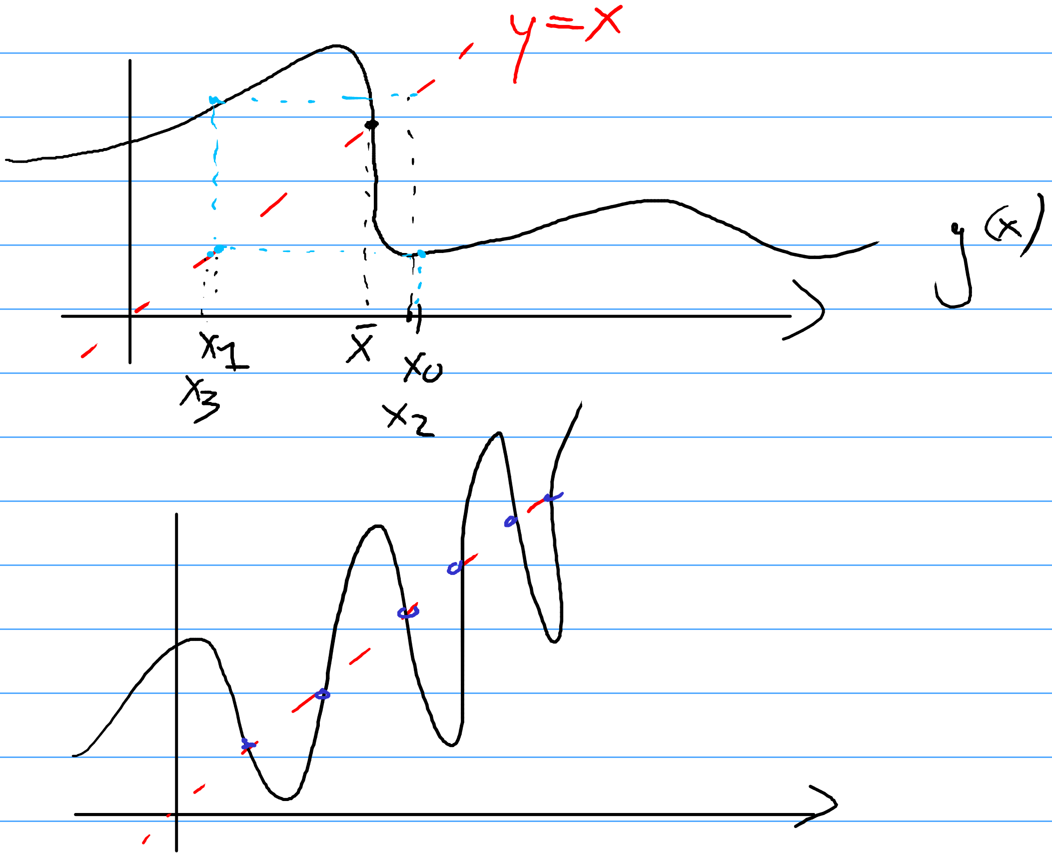
$$g(\bar{x}) = \bar{x}$$

Thm: Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente générée par $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue. Supposons que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in Def(g)$. Alors $g(x)=x$.

preuve: $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)$

$= g\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = g(x)$ □.

Remarque: Une fct. $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ peut très bien posséder plusieurs pts fixes, dont certains ne sont pas des limites de suites récurrentes:



Déf: Une fct: $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite contractante ssi $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$, $0 \leq \lambda < 1$ t.q. $\forall x, y \in Def(g)$

$$|g(x) - g(y)| \leq \lambda |x - y|$$

λ est appelée une cste de Lipschitz

Thm: Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est contractante alors elle est continue

preuve: Soient $x \in Def(g)$ et $\varepsilon > 0$. On pose $\delta = \varepsilon$. On a $|y - x| < \delta$ $(= \varepsilon)$, alors

$$|g(y) - g(x)| \leq \lambda |x - y| < |x - y| < \delta = \varepsilon$$

□.

Exemples: (1) $y = g(x) = \frac{1}{2} x$, $\lambda = 1/2$

(2)
$$g : [1, 2] \to [1, 2]$$
$$x \mapsto 1 + \frac{1}{1+x}$$

$g'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$. Si $x, y \in [1, 2]$

$$|g(x) - g(y)| = |g'(\xi)(x - y)|$$
$$= |g'(\xi)|\,|x - y| \leq \frac{1}{4} |x - y|$$

(c) $y = x^2$, non contractante. p. ex. $x = 1$, $y = 2$

$|1^2 - 2^2| = 3 > |2 - 1| = 1$

Thm du pnt fixe: Supposons que

- $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$
- $g : I \to I$, contractante et λ sa cste de Lipschitz.
- $x_{n+1} = g(x_n)$

Alors $\exists !\ \bar{x} \in I$ t.q. $g(\bar{x}) = \bar{x}$ et $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \bar{x}$. De plus,

$$|\bar{x} - x_n| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} |x_0 - x_1|$$

Preuve: Soient $n > m > 0$. On a

$$|x_n - x_m| = |g(x_{n-1}) - g(x_{m-1})| \leq \lambda |x_{n-1} - x_{m-1}|$$

$$\leq \lambda^2 |x_{n-2} - x_{m-2}| \dots \underline{\leq \lambda^m |x_{n-m} - x_0|}$$

Mais

$$|x_{n-m} - x_0| = |x_{n-m} - x_{n-m-1} + x_{n-m-1} - x_{n-m-2} + x_{n-m-2} - \dots + x_1 - x_0|$$

$$\leq |x_{n-m} - x_{n-m-1}| + |x_{n-m-1} - x_{n-m-2}| + \dots + |x_1 - x_0|$$

$$\leq \lambda^{n-m-1} |x_1 - x_0| + \lambda^{n-m-2} |x_1 - x_0| + \dots + |x_1 - x_0|$$

$$= |x_1 - x_0| (1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{n-m-1})$$

$$= |x_1 - x_0| \frac{1 - \lambda^{n-m}}{1 - \lambda} \quad \text{(série géométrique)}$$

$$\underline{\leq |x_1 - x_0| \frac{1}{1-\lambda}}$$

Donc, $|x_n - x_m| \leq \dfrac{\lambda^m}{1-\lambda} |x_1 - x_0|$

Donc, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et converge. On a donc

$$\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_n \quad \text{existe}.$$

Par le thm précédent, $\bar{x} = g(\bar{x})$.

Supposons que $\bar{x}' = g(\bar{x}')$ et $\bar{x}' \neq \bar{x}$.

On aurait

$$|\bar{x} - \bar{x}'| = |g(\bar{x}) - g(\bar{x}')| \leq \lambda |\bar{x} - \bar{x}'|$$
$$< |\bar{x} - \bar{x}'| \quad \lightning \quad \text{Donc, } \bar{x} = \bar{x}'$$

Finalement,

$$\begin{aligned} |\bar{x} - x_n| &= |\bar{x} - x_m + x_m - x_n| \\ &\leq |\bar{x} - x_m| + |x_m - x_n| \\ &\leq \underbrace{|\bar{x} - x_m|}_{\text{aussi petit que l'on veut}} + |x_0 - x_1| \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \quad \text{si } m > n \end{aligned}$$

Donc, il faut que

$$|\bar{x} - x_n| \leq |x_0 - x_1| \frac{\lambda^n}{1-\lambda}$$

D.

Ex: $g(x) = 1 + \frac{1}{1+x}$, $x_0 = 1$

Clairement, $g: [1,2] \longrightarrow [1,2]$

On a déjà calculé que $|g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{4}|x-y|$ (TAF). Donc g contractante avec $\lambda = 1/4$

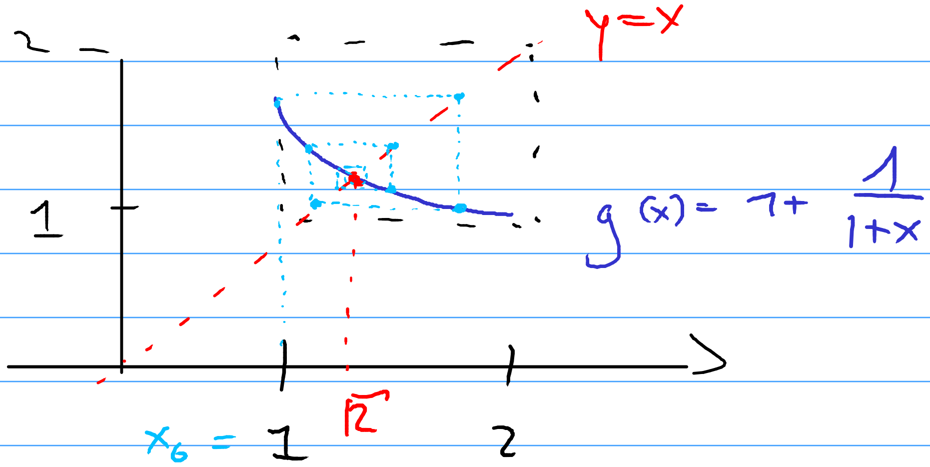
g possède donc un $\bar{x}$ unique.

$$\bar{x} = 1 + \frac{1}{1+\bar{x}} \iff \bar{x} - 1 = \frac{1}{1+\bar{x}}$$

$\iff (\bar{x}-1)/(\bar{x}+1) = 1 = \bar{x}^2 - 1 \iff \bar{x} = \sqrt{2}$

$x_0 = 1$, $x_1 = \frac{3}{2}$, $|x_0 - x_1| = \frac{1}{2}$,

$$|\sqrt{2} - x_n| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot \frac{1}{2}$$



Considérons $x_0 = 1$, $x_{n+1} = g(g(x_n))$

$= g \circ g(x_n)$.

Calculons alors $g(g(x)) = 1 + \frac{1}{1+g(x)}$

$$= 1 + \frac{1}{1+1+\frac{1}{1+x}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+x}} = 1 + \frac{1+x}{3+2x}$$

$$= \frac{4+3x}{3+2x} \equiv h(x)$$

$h : [1,2] \longrightarrow [1,2]$

$$|h(x) - h(y)| \leq |h'(\xi)|\,|x-y|$$

$$= \left| \frac{3(3+2\xi) - (4+3\xi)2}{(3+2\xi)^2} \right| |x-y|$$

$$= \frac{1}{(3+2\xi)^2} |x-y| \leq \underbrace{\frac{1}{25}}_{\lambda} |x-y|$$

$$x_0 = 1, \quad x_1 = h(x_0) = \frac{7}{5}, \quad |x_0 - x_1| = \frac{2}{5}$$

$$|\bar{x} - x_n| = |\sqrt{2} - x_n| \leq \lambda^n \cdot \frac{|x_0 - x_1|}{1 - \lambda}$$ (thm pnt fixe)

$$\leq \left(\frac{1}{25}\right)^n \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{2}{5} < \left(\frac{1}{25}\right)^n \cdot \frac{2}{5}$$

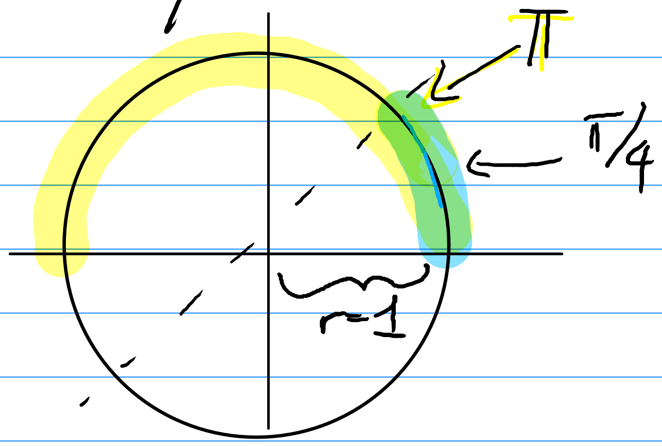
n	x_n	ε	écriture décimale
0	1	—	—
1	$7/5$	$\sim 1/50$	$1,4 < \sqrt{2} < 1.42$
2	$41/29$	$\left(\frac{1}{25}\right)^2 \cdot \frac{2}{5}$ $\simeq \frac{1}{1'500}$	$1.413793\ldots < \sqrt{2} < 1.414\ldots$
4	$\frac{1'393}{985}$	$\left(\frac{1}{25}\right)^4 \cdot \frac{2}{5}$ $\simeq \frac{1}{100'000}$	$1,4142\ldots < \sqrt{2} < 1,41421$

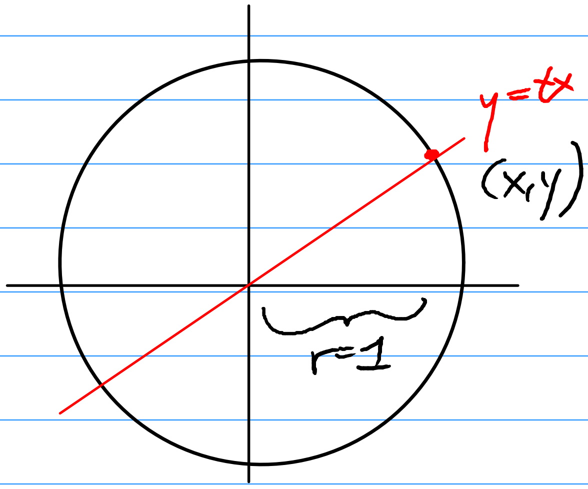
§ 2.2. Polynômes de Taylor

La méthode des points fixes est efficace pour des nombres algébriques du type $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{10}$, …

Par contre, pour des nombres non-algébriques (p. ex. π) on va développer une autre méthode:

Par définition, π est l'arc du demi-cercle de rayon 1.





Soit (x,y) l'intersection entre $y=tx$ et $\Gamma: x^2+y^2=1$. Alors

$$\frac{y}{x}=t \Rightarrow \frac{y^2}{x^2}=t^2=\frac{y^2}{1-y^2}$$

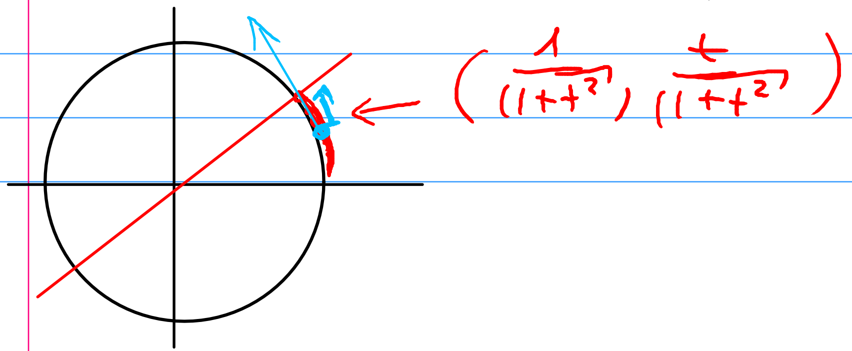
$$\Rightarrow t^2(1-y^2)=y^2 \Leftrightarrow t^2=y^2(1+t^2)$$

$\Rightarrow y^2=\frac{t^2}{1+t^2}$. Si $(x,y)\in I$, $y,t\geq 0$

et $y=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

On a donc une paramétrisation de la moitié du cadran I:

$$[0,1]\ni t \longmapsto \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$$



Si on dérive p.r. à t:

$$\frac{d}{dt}(x(t), y(t)) = \frac{d}{dt}\left((1+t^2)^{-1/2}, t(1+t^2)^{-1/2}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}(1+t^2)^{-3/2}\cdot 2t, (1+t^2)^{-1/2} + t\left(\frac{-1}{2}\right)(1+t^2)^{-3/2}2t\right)$$

$$= \left(-t(1+t^2)^{-3/2}, (1+t^2)^{-3/2},\right)$$

vecteur tangent au cercle en $\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$

Donc, $\underbrace{\Delta s}_{\text{petite longueur d'arc}} = \Delta t \left\|\left(-t(1+t^2)^{-3/2}, (1+t^2)^{-3/2}\right)\right\|$

$$= \Delta t \sqrt{t^2(1+t^2)^{-3} + (1+t^2)^{-3}}$$

$$= \frac{\Delta t}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \quad \pi/4 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$ (on a retrouvé l'arctan ! /

$$\left(= \int_0^1 \frac{dt}{1-(-t^2)} = \int_0^1 dt\left(1-t^2+t^4-t^6+t^8-\dots\right)\right)$$

série géométrique.

Supposons que $\int \sum = \sum \int$ (à vérifier)

$$\Rightarrow \quad \pi/4 = \int_0^1 dt - \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 t^4 dt - \int_0^1 t^6 dt \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots$$

Comment calculer les valeurs du logarithme?

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \int_1^x \frac{1}{1-(1-t)}\,dt$$

$$= \int_1^x dt\left(1 + (1-t) + (1-t)^2 + (1-t)^3 + \dots\right)$$

$$= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots$$

Si $x=2$:

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

Graphiquement, pour $x \in]0,2[$,

$$\ln(x) \simeq (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots + \frac{(x-1)^n}{n}(-1)^{n+1}$$

Déf: Soit $f: I \to \mathbb{R}$, n fois dérivable en $x_0 \in I$. Le polynôme de Taylor de f à l'ordre n autour de x_0 est un polynôme $P^n_{f,x_0}(x)$ qui en $x = x_0$ a les mêmes dérivées que $f(x)$.

Thm: Soit $f: I \to \mathbb{R}$, n fois dérivable en x_0. Il existe alors un unique polynôme de Taylor, donné par

$$\boxed{\begin{aligned} P^{n}_{f,x_0}(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0) + \\ &+ \dots + a_n(x-x_0)^n \\ \text{avec} \quad a_k &= \frac{d^k f}{dx^k}(x_0)\cdot\frac{1}{k!} \end{aligned}}$$

preuve: Si $P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$, alors

$P(x_0) = a_0$,

$P'(x_0) = a_1$, $\quad P''(x_0) = 2a_2 + 3\cdot 2(x-x_0)^1 a_3 + \dots \Big|_{x=x_0}$

$= 2a_2$

$P'''(x_0) = 3\cdot 2\cdot a_3 + 4\cdot 3\cdot 2(x-x_0)^1 a_4 + \dots \Big|_{x=x_0}$

$= 3\cdot 2\cdot a_3$

dériver k fois $\longrightarrow$

$P^{(k)}(x_0) = k!\,a_k$. Donc,

$$P(x) = P(x_0) + P^{(1)}(x_0)(x-x_0) + \frac{P^{(2)}(x_0)}{2}(x-x_0) + \frac{P^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0) + \dots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)$$

Si on impose que $\forall k = 1, \dots, n$

$f^{(k)}(x_0) = P^{(k)}(x_0)$, on a que

$$a_k = \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \qquad \square.$$

Exemple: $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $n=3$

$f(x) = \sqrt{x}$, $f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$, $f^{(2)}(x) = \frac{-1}{4}x^{-3/2}$

$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2}$

Donc, $f(1) = 1$, $f^{(1)}(1) = \frac{1}{2}$, $f^{(2)}(1) = \frac{-1}{4}$, $f^{(3)}(1) = \frac{3}{8}$

Donc,

$$P^{3}_{\sqrt{x},1}(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3$$

Thm: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ n fois continûment dérivable en x_0 et soit $P^{n}_{f,x_0}(x)$ son polynôme de Taylor à l'ordre n en x_0.

Alors
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P^{n}_{f,x_0}(x)}{(x-x_0)^k} = 0 \quad k = 0, \dots, n$$

preuve: Fixons $k \in \{0, \dots, n\}$. On a

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - P^{n}_{f,x_0}(x) = 0 = \lim_{x \to x_0} (x-x_0)^k$$

De plus, $(x-x_0)^k$ ne s'annule pas sur un voisinage épointé de x_0. C'est le cas de ses k premières dérivées aussi.

On est en droit d'appliquer Bernoulli k fois.

Donc,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P^n_{f,x_0}(x)}{(x-x_0)^k} \underset{\substack{\uparrow k \\ (B.H)}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(k)}(x) - \left(P^n_{f,x_0}(x)\right)^{(k)}}{k!}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(k)}(x) - \left(k!\,\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + k!\,\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0) + \dots\right)}{k!}$$

$$= \frac{f^{(k)}(x) - \left(f^{(k)}(x_0) + 0\right)}{k!} = 0 \quad \square$$

On peut donc poser

$$f(x) = P^n_{f,x_0}(x) + (x-x_0)^n \varepsilon(x)$$

où $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$

L'écriture

$$f(x) = P^n_{f,x_0}(x) + (x-x_0)^n \varepsilon(x)$$

est appelé le développement limité de f autour de x_0 à l'ordre n.

Thm: Soit $f : I \to \mathbb{R}$, n fois continûment dérivable en $x_0 \in I$. Soit un polynôme $P(x)$ et une fonction $r(x)$ t.q. $\lim_{x\to x_0} r(x) = 0$

Si $f(x) = P(x) + (x-x_0)^n r(x)$

alors $P(x) = P^n_{f,x_0}(x)$ et $r(x) = \varepsilon(x)$

preuve : en exercice $\square$.

Corollaire : Si $f(x) = \frac{1}{1-x}$ et $x_0 = 0$,

alors, $P^n_{f,0}(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$

et $\varepsilon(x) = \frac{x}{1-x}$

preuve : On a $\underline{P^n_{f,0}(x)} + \underline{x^n \varepsilon(x)}$

$$= \underline{1 + x + x^2 + \dots + x^n} + \underline{\frac{x^{n+1}}{1-x}}$$

$$= \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

De plus, $\lim_{x \to 0} \frac{x}{1-x} = 0$. On conclut par le thm précédent $\square$

Exemples : (a) $f(x) = \ln(x)$, $x_0 = 1$

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{1-(1-x)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \underbrace{1 + (1-x) + (1-x)^2 + \dots + (1-x)^n}_{P^n_{1/x,1}(x)} + (1-x)^n \cdot \underbrace{\frac{1-x}{x}}_{\varepsilon(x)}$$

$$\Rightarrow \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

$$= \int_1^x \left(1 + (1-t) + (1-t)^2 + \dots + (1-t)^n\right)dt + \int_1^x \frac{(1-t)^{n+1}}{t}\,dt$$

$$= \underbrace{(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1}}_{P^{n+1}_{n,1}(x)}$$

$$+ \int_1^x \frac{(1-t)^{n+1}}{t}\,dt$$

Mais, $\left| \int_1^x \frac{(1-t)^{n+1}}{t}\,dt \right| \leq \int_1^x \frac{|1-t|^{n+1}}{t}\,dt$

$$\leq \int_1^x \frac{|1-t|^{n+1}}{\min\{1,x\}}\,dt \qquad (\text{si } 0 < x < 2)$$

$$\leq \frac{1}{\min\{1,x\}} \int_1^x |1-t|^{n+1}\,dt \leq \frac{1}{\min\{1,x\}} \frac{|1-x|^{n+2}}{n+2}$$

On voit que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\min\{1,x\}} \cdot \frac{|1-x|^{n+2}}{n+2} = 0$

Donc, $\forall x \;]0,2[$

$$\ln(x) = \lim_{n\to\infty} \left((x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+2} \right)$$

(4) $f(x) = \text{Arctan}(x)$, $x_0 = 0$.

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x \frac{1}{1-(-t^2)}\,dt$$

$$= \int_0^x \left(1 - t^2 + t^4 - t^6 \dots (-1)^n t^{2n} \right) dt$$

$$+ \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$$

Mais $\left| \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2} dt \right| \le \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1} dt$

$\le \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$. Donc, si $|x| < 1$,

$$\arctan(x) = \lim_{n \to \infty} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \dots \right)$$

Corollaire: Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, n fois continûment dérivables en $x_0 \in I$.

1) $P^n_{f+g, x_0}(x) = P^n_{f, x_0}(x) + P^n_{g, x_0}(x)$

2) $P^n_{f \cdot g, x_0}(x) = \left[P^n_{f, x_0}(x) P^n_{g, x_0}(x) \right]_n$,

où $[\dots]_n$ signifie qu'on ne retient que les termes de degré $\le n$

preuve en exercices:

Thm: Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ $n+1$ fois dérivable en $x_0 \in I$. Alors

$$f(x) - P^n_{f, x_0}(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

où $\xi \in]x_0, x[$ (ou $\xi \in]x, x_0[$)

preuve: Posons la fonction

$$[x_0, x] \ni y \longmapsto F(y)$$

$$:= f(x) - P^n_{f,y}(x) - c\,(x-y)^{n+1}, \text{ où}$$

$$c = \frac{1}{(x-x_0)^{n+1}}\left(f(x) - P^n_{f,x_0}(x)\right)$$

On note que 1) $F(y)$ est dérivable.

2) $F(x_0) = 0 = F(x)$

On sait par Rolle $\exists\, \xi \in]x_0, x[$ t.q.

$$F'(\xi) = 0$$

Donc, $F'(y) = -\frac{d}{dy} P^n_{f,y}(x) + (n+1)(x-y)^n c$

$$= -\frac{d}{dy}\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(y)\frac{(x-y)^k}{k!} + (n+1)(x-y)^n c$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} f^{(k+1)}(y)\frac{(x-y)^k}{k!} + \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(y)\frac{(x-y)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$+ (n+1)(x-y)^n c$$

$$= - f^{(n+1)}(y)\frac{(x-y)^n}{n!} + (n+1)(x-y)^n \cdot c$$

Donc, $0 = -f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-\xi)^n}{n!} + (n+1)(x-\xi)^n \cdot c$

Donc, $c = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\,\frac{\cancel{(x-\xi)^n}}{\cancel{(x-\xi)^n}(n+1)}$

$$= \frac{1}{(x-x_0)^{n+1}}\left(f(x) - P^n_{f,x_0}(x)\right)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) - P^{n}_{f,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad \square$$

Remarque: pour $n=0$, ce thm nous redonne le TAF: $f(x) - f(x_0) = f^{(1)}(\xi)(x-x_0)$

Exemple: $f(x) = \exp(x)$.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}(x) = \exp(x)$$

$$\Rightarrow P^{n}_{\exp,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

et $\exp(x) - P^{n}_{\exp,0}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\exp(\xi)$, $\xi \in]0,x[$

Pour x fixé,

$$\left| \exp(x) - P^{n}_{\exp,0}(x) \right| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\exp(x)$$

Mais pour x fixé, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$ fixé

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Remarque:

$$\exp(iy) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(iy)^k}{k!}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{0 \leq 2k \leq n} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{0 \leq 2k \leq n} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)$$

$$= \cos(y) + i \sin(y)$$

Dac,

$$\boxed{0 = 1 + e^{i\pi}}$$

3. POLYNOMES

Dans la suite $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Déf: Un polynôme P est une somme du type

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n ,$$

où $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, qui sont les coefficients de $P(X)$ et X est son indéterminée. L'ensemble des polynômes (sur $\mathbb{K}$) est noté par $\mathbb{K}[X]$.
Le degré $\deg(P)$ est le plus grand $n \in \mathbb{N}$ t.q. $a_n \neq 0$. P est dit normalisé si $a_{\deg(P)} = 1$.

Remarques: (1) $P(X) = Q(X)$ ssi $\deg(P) = \deg(Q)$ et $a_k = b_k$ $\forall k = 0, 1, \dots, \deg(P)$.

On peut donc définir un polynôme est une suite $P: \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ qui est nulle à partir de $n \geq \deg(P) + 1$.

$$X^2 + 1 \longmapsto (1, 0, 1, 0, 0, 0, \dots)$$

$$3x^3 - 2x + 3 \longmapsto (\underset{\underset{a_0}{\uparrow}}{3}, \underset{\underset{a_1}{\uparrow}}{-2}, \underset{\underset{a_2}{\uparrow}}{0}, \underset{\underset{a_3}{\uparrow}}{3}, \underset{\underset{a_4}{\uparrow}}{0}, 0, \dots)$$

$\dots\dots$

(2) Un monôme est un polynôme à un seul coefficient non nul.

(3) Convention : $\deg(0) = -\infty$.

Clairement, $\deg(1) = 0$.

§ 3.1 Opérations algébriques sur $\mathbb{K}[X]$

On pose une addition et une multiplication sur $\mathbb{K}[X]$ par :

- $(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots) + (b_0, b_1, \dots, b_n, 0, \dots 0)$

$= (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n, 0, \dots)$

- $(a_0, a_1, \dots, a_n, 0 \dots) \times (b_0, b_1, \dots, b_n, 0 \dots)$

$= (c_0, c_1, c_2, \dots, c_{2n}, 0, \dots)$

$$\text{où} \quad c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j = \underbrace{\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}}_{\text{convolution}}$$

$\mathbb{K}[X]$, muni de + et de × est un anneau unitaire, i.e.

1) $\mathbb{K}[X]$, muni de + est un groupe abélien.

2) × est associative sur $\mathbb{K}[X]$:

$P(Q \times R) = (P \times Q) \times R$. $\forall P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$

3) × se distribue sur la somme :

$P \times (Q + R) = P \times Q + P \times R$, $\forall P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$

4) 1 est élément neutre pour ×.

__Remarque:__ Soient $P, Q \in \mathbb{K}\{X)$:

$$\deg(P+Q) \leq \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$$

$$\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$$

(c'est la raison pourquoi $\deg(0) = -\infty$, $\deg(P \times 0) = \deg(0) = \deg(P) + \deg(0)$)

__Thm de la division Euclidienne:__ Soient $P, Q \in \mathbb{K}\{X)$, avec $Q \neq 0$. Alors il existe un unique couple $(M, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ t.q.

- $P = MQ + R$
- $\deg(Q) > \deg(R)$

__preuve:__ Fixons Q et raisonnons sur P.

Si $\deg(P) < \deg(Q)$ on peut choisir $M=0$ et $R=P$.

Supposons que $\deg(P) \geqslant \deg(Q)$ et qu'un couple (M, R) existe pour tous les degrés non $< \deg(P)$.

Ecrivons
$$P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$$
$$Q(X) = b_0 + b_1 X + \dots + b_k X^k$$

$$P(x) = \frac{a_n}{b_k} X^{n-k} Q \underbrace{- \frac{a_n}{b_k} X^{n-k} Q + P}_{P', \ \deg(P') < \deg(P)}$$

$\exists (M', R') \in \mathbb{K}[X]^2$ t.q.

$$P' = M'Q + R' \quad \text{et} \quad \deg(R') < \deg(Q)$$

On a alors

$$P = M'Q + \frac{a_n}{b_k} X^{n-k} Q + R'$$

$$= MQ + R' \quad \text{avec}$$

$$M = M' + \frac{a_n}{b_k} X^{n-k}$$

Montrons encore l'unicité : Supposons

$$P = MQ + R = NQ + S, \quad \deg(R), \deg(S) < \deg(Q)$$

On a alors

$$MQ - NQ = \underbrace{S - R}_{< \deg(Q)} = \underbrace{(M-N)Q}_{\deg(M-N) + \deg(Q)}$$

Il faut donc que $\deg(M-N) = \deg(S-R) = -\infty$

Donc, $M - N = 0 = S - R \iff S = R$ et $M = N$ $\square$.

§3.2. Idéal et division.

Déf: Un idéal de $\mathbb{K}[X]$ est un ensemble $I \subset \mathbb{K}[X]$ non vide, t.q.

- $A, B \in I \Rightarrow A + B \in I$
- $\forall P \in \mathbb{K}[X], \forall A \in I \Rightarrow A \times P \in I$

Remarque: Si I est un idéal, alors $0 \in I$.
De même, si $A \in I$, alors $-A \in I$..
Plus généralement, $\lambda A \in I$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in I$.

Thm: Soit $I \subset \mathbb{K}[X]$ un idéal. Alors, $\exists$ $M \in \mathbb{K}[X]$ t.q.

$$I = M \cdot \mathbb{K}[X]$$

$$(= \{ P \in \mathbb{K}[X] \mid P = M \cdot Q \}$$

preuve: Puisque I est non vide il contient un polynôme, disons A.

- si $I = \{0\}$ alors $I = 0 \cdot \mathbb{K}(X)$.
- si $I \neq \{0\}$, alors A peut être choisi non nul.

Comme $\mathbb{N}$ est bien ordonné, on peut choisir A de degré minimal dans I.
Soit $B \in I$. On a alors

$$B = M \cdot A + R \text{ avec } \deg(R) < \deg(A)$$

Mais alors $R = B - M \cdot A \in I$.
Donc, $R = 0$ et $B = M \cdot A$ $\square$.

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Considérons l'ensemble

$$M_{P,Q} := \{ AP + BQ \mid A, B \in \mathbb{K}[X] \}$$

$M_{P,Q}$ est clairement un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

D'après le dernier thm, $M_{P,Q} = D\cdot \mathbb{K}[X]$ où $D \in \mathbb{K}[X]$ est fixé.

Manifestement, $P, Q \in M_{P,Q}$. Donc, $P, Q \in D\cdot\mathbb{K}[X]$. Mais alors, D est un diviseur commun de P et de Q.

Supposons que D' divise P et Q.

Alors D' divise $AP+BQ$, donc tous les élément de $M_{P,Q}$, donc D' divise $D\cdot\mathbb{K}[X]$. Donc D' divise D.

On vient de montrer que

$$M_{P,Q} = D\cdot\mathbb{K}[X] \quad \text{et} \quad D = PGCD(P,Q)$$

<u>Algorithm d'Euclide:</u>

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$:

On pose $P = M_1 Q + R_1$, $\deg(R_1) < \deg(Q)$

Si $R_1 \neq 0$ on calcule

$$Q = M_2 R_1 + R_2 \quad , \deg(R_2) < \deg(R_1)$$

On continue jusqu'à ce que

$$R_{n-1} = M_{n+1} R_n + R_{n+1} \quad \text{et} \quad R_{n+1} = 0$$

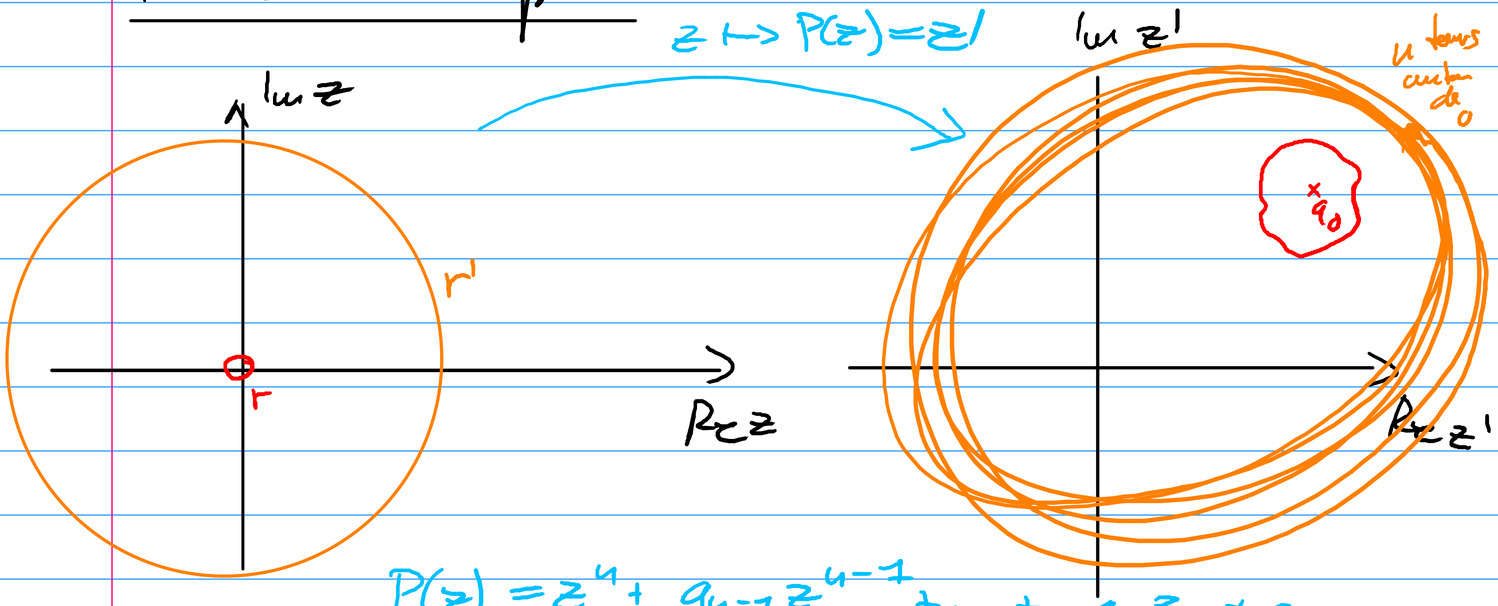
On a alors $PGCD(P,Q) = R_n$

§3.4. Le thm fondamental de l'algèbre (facultatif)

On va montrer:

TFAl: Tout polynôme $P(z) \in \mathbb{C}[z]$, possède au moins une racine complexe si $\deg(P) \geq 1$.

idée de la preuve:



$P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$

Rappel:

$$\sin(x) = \lim_{n \to \infty} P^n_{\sin,0}(x)$$

$$\cos(x) = \lim_{n \to \infty} P^n_{\cos,0}(x)$$

(chap. 2). On a remarqué alors que

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(iy)^n}{n!} = P^N_{\cos,0}(y) + i P^N_{\sin,0}(y)$$

$$\Rightarrow \exp(iy) = \cos(y) + i\sin(y)$$

Déf: si $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$

on pose

$$\underline{\exp(z)} = \underline{e^x(\cos y + i \sin y)},$$

qui est l'exponentielle complexe

Déf: Une courbe géométrique (dans $\mathbb{C}$) est une application

$$\gamma : [0,1] \longmapsto \mathbb{C},$$

où $\mathrm{Re}\,\gamma$, $\mathrm{Im}(\gamma)$ sont continues sur $[0,1]$ et continûment dérivables sur $]0,1[$

Exemples: 1.) $[0,1] \ni t \longmapsto \exp(2\pi i t)$.

Cette courbe correspond à faire un tour du cercle trigo.

2) $[0,1] \ni t \longmapsto \exp(n 2\pi i t)$.

correspond à n tours complets du cercle trigo.

3) $[0,1] \ni t \longmapsto \exp(\theta(t))$, avec

$$\theta(t) = f(t) + i g(t)$$

$\exp(f(t))$

distance à 0

tourner autour de 0.

Déf: Soit $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ une courbe géométrique. Une courbe $\theta : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, géométrique, est appelé un relèvement de γ ssi

$$\gamma(t) = \exp(\theta(t))$$

Thm: Toute courbe géométrique $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}^*$ possède un relèvement.

preuve: Posons $r(t) = \mathrm{Re}(\gamma(t))$ et $s(t) = \mathrm{Im}(\gamma(t))$. Par définition, $r(t)$ et $s(t)$ sont continues sur $[0,1]$ et cont. dérivables sur $]0,1[$.

Ainsi, $[0,1] \ni t \longmapsto r^2(t) + s^2(t)$ est continue aussi et ne s'annule pas. Il existe donc $m > 0$ t.q.

$$\forall t \in [0,1], \quad s^2(t) + r^2(t) \geqslant m .$$

Par conséquent,

$$[0,1] \ni t \longmapsto \frac{\dot r(t) + i \dot s(t)}{r(t) + i s(t)}$$

est continue aussi sur $[0,1]$.

Donc, $[0,1] \ni t \mapsto \theta(t) := \theta_0 + \int_0^t \frac{\dot\gamma(u)}{\gamma(u)} du$ existe, est continue sur $[0,1]$, est cont. dérivable sur $]0,1[$. Posons θ_0 t.q. $\exp(\theta_0) = \gamma(0)$.

On a que $\exp(\theta(t)) = \gamma(t)$. En effet,

$$\frac{d}{dt} \frac{\exp(\theta(t))}{\gamma(t)} = \frac{\dot\theta(t)\exp(\theta(t))\gamma(t) - \exp(\theta(t))\dot\gamma(t)}{\gamma^2(t)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\exp(\theta(t))}{\gamma(t)} = \mathrm{cste} = \frac{\exp(\theta_0)}{\gamma(0)} = 1 .$$

□.

Déf: Une boucle géométrique est une courbe géométrique $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ t.q. $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Rem: si $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ est une boucle, et si $\gamma(t) = \exp(\Theta(t))$, alors

$$\Theta(1) - \Theta(0) = 2\pi i n \ , \ n \in \mathbb{Z}.$$

Déf: Soit $\gamma : [0,1) \longrightarrow \mathbb{C}^*$ une boucle géométrique. On pose

$$\nu(\gamma) := \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\dot\gamma(t)}{\gamma(t)} dt = \frac{\Theta(1) - \Theta(0)}{2\pi i}$$

est l'indice de γ.

Soit $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n \in \mathbb{C}[X]$.
Pour $r > 0$, on va poser

$$[0,1] \ni t \longmapsto \gamma_r(t) := P(re^{2\pi i t})$$

$\gamma_r(t)$ est clairement une boucle qu'on peut réécrire comme

$$\gamma_r(t) = a_0 + a_1 r e^{2\pi i t} + \dots + a_n r^n e^{2\pi n i t}$$

et $\dot\gamma_r(t) = a_1 r 2\pi i e^{2\pi i t} + \dots + a_n r^n 2\pi n i e^{2\pi n i t}$

On observe aussi que pour $r, r' > 0$, on a

$\forall t \in [0,1)$,

$|\gamma_r(t) - \gamma_{r'}(t)| = |a_1 e^{2\pi i t}(r - r') + \dots +$
$\dots + a_n e^{2\pi i n t}(r^n - r'^n)| \leq |a_1||r - r'| + \dots +$
$|a_n||r^n - r'^n|$.

Puisque $r \mapsto r^n$ est continue en r, on a que

Lemme: $|\gamma_r(t) - \gamma_{r'}(t)|$, $|\dot\gamma_r(t) - \dot\gamma_{r'}(t)|$ sont des fonctions continues en $r \in \mathbb{R}_+^*$ $\forall t \in [0,1]$

Corollaire: Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $\gamma_r(t) = P(re^{2\pi i t})$, $\dot\gamma_r(t) = \frac{d}{dt}\gamma_r(t)$. Supposons que $\gamma_r(t) \neq 0$ $\forall t \in [0,1]$. Alors, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ t.q. $|r - r'| < \delta$ implique
$\forall t \in [0,1]$, $\left| \frac{\dot\gamma_r(t)}{\gamma_r(t)} - \frac{\dot\gamma_{r'}(t)}{\gamma_{r'}(t)} \right| < \varepsilon$.

preuve: Notons que $|\gamma_r(t)|$, $|\dot\gamma_r(t)|$ sont continues et définies sur un intervalle, puisque $\gamma_r(t)$ ne s'annule pas, on a $m > 0$ t.q.

$\forall t \in [0,1]$, $0 < m \leq |\gamma_r(t)|$ et $0 \leq |\gamma_r(t)|, |\dot\gamma_r(t)| \leq M$

D'après le lemme précédent, $\exists \delta_1 > 0$ t.q. si $|r - r'| < \delta_1$ alors $\forall t \in [0,1]$

$$|\gamma_r(t) - \gamma_{r'}(t)| < \frac{m}{2} .$$

Soit $\varepsilon > 0$, et $|r - r'| < \delta_1$. On a donc

$$\left|\frac{\dot\gamma_r(t)}{\gamma_r(t)} - \frac{\dot\gamma_{r'}(t)}{\gamma_{r'}(t)}\right| = \frac{|\dot\gamma_r(t)\gamma_{r'}(t) - \gamma_r(t)\dot\gamma_{r'}(t)|}{\underbrace{|\gamma_r(t)|}_{\geq m}\ \underbrace{|\gamma_{r'}(t)|}_{\geq m/2}}$$

$$\leq \frac{|\dot\gamma_r(t)\gamma_{r'}(t) - \gamma_r(t)\dot\gamma_{r'}(t)|}{m^2/2}$$

$$\leq \frac{|\dot\gamma_r(t)|\,|\gamma_{r'}(t) - \gamma_r(t)| + |\gamma_r(t)|\,|\dot\gamma_r(t) - \dot\gamma_{r'}(t)|}{m^2/2}$$

$$\leq \frac{2M}{m^2}\left(|\gamma_{r'}(t) - \gamma_r(t)| + |\dot\gamma_r(t) - \dot\gamma_{r'}(t)|\right) .$$

Toujours par le lemme précédent, $\exists\, \delta_2 > 0$ t.q. si $|r - r'| < \delta_2$, alors, $\forall t \in [0,1)$,

$$|\gamma_r(t) - \gamma_{r'}(t)|,\ |\dot\gamma_r(t) - \gamma_{r'}(t)| < \frac{m^2\varepsilon}{4M}$$

Si on pose $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, alors, si $|r - r'| < \delta$ on a $\forall t \in [0,1)$

$$\left|\frac{\dot\gamma_r(t)}{\gamma_r(t)} - \frac{\dot\gamma_{r'}(t)}{\gamma_{r'}(t)}\right| < \varepsilon$$

□.

Thm: Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $\gamma_r(t) = P(re^{2\pi i t})$, $\dot\gamma_r(t) = \frac{d}{dt}\gamma_r(t)$. Supposons $\gamma_r(t) \neq 0$ $\forall t \in [0,1]$.

Alors $\mathbb{R}_+^* \ni r \longmapsto \nu(\gamma_r)$ est continue et donc constante (par morceaux).

preuve: Soit $\varepsilon > 0$, et $r \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $\gamma_r(t) \neq 0$ $\forall\, t \in [0,1]$.

Le corollaire précédent affirme l'existence d'un $\delta > 0$ t.q. si $|r - r'| < \delta$ alors $\forall t \in [0,1]$

$$\left| \frac{\dot\gamma_r(t)}{\gamma_r(t)} - \frac{\dot\gamma_{r'}(t)}{\gamma_{r'}(t)} \right| < \varepsilon$$

. Ainsi,

$$|\nu(\gamma_r) - \nu(\gamma_{r'})| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^1 \left(\frac{\dot\gamma_r(t)}{\gamma_r(t)} - \frac{\dot\gamma_{r'}(t)}{\gamma_{r'}(t)} \right) dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \left| \frac{\dot\gamma_r(t)}{\gamma_r(t)} - \frac{\dot\gamma_{r'}(t)}{\gamma_{r'}(t)} \right| dt < \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \varepsilon\, dt < \varepsilon$$

$\square$.

Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$

- Si $a_0 = 0$, $x = 0$ est une racine évidente.
- Si $a_0 \neq 0$. Si $r = 0$, $\gamma_0(t) = a_0$ $\forall t \in [0,1]$.

On a donc $\nu_r(\gamma_0) = 0$.

si $|z| > 1 + |a_0| + |a_2| + \dots |a_{n-1}|$. Alors

$$\underline{|P(z) - z^n|} = |a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0|$$

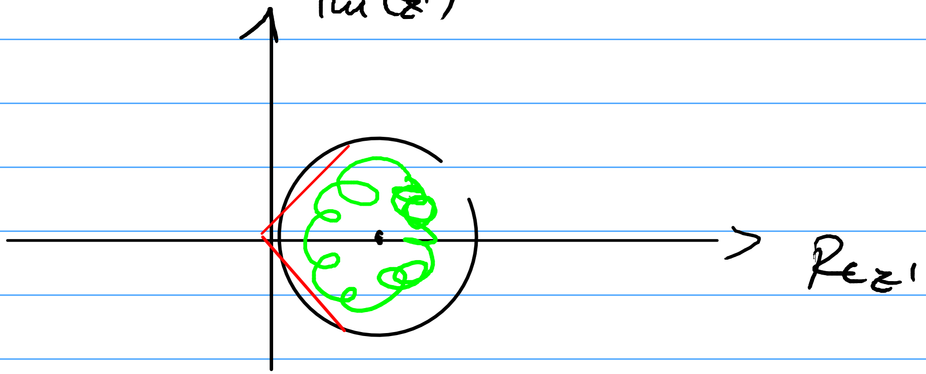
$$\leq |a_{n-1}||z|^{n-1} + \dots + |a_1||z| + |a_0|$$

$$\underline{< |z|^n} = r^n$$

$$|\gamma_r(t) - \underbrace{r^n e^{2\pi i n t}}_{z^n}| < r^n \Rightarrow \left| \underline{\frac{\exp(\theta_r(t) - 2\pi i n t)}{r^n}} - 1 \right| < 1$$

Autrement dit

$t \longmapsto \exp(\Theta_r(t) - 2\pi i n t - n\ln(r))$ parcour des point dans un disque centré en 1, de rayon 1 :



Donc, $\Theta_r(t) - 2\pi i n t - n\ln(r)$ est un relèvement avec partie imaginaire $\in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$

$$\Rightarrow \Theta_r(1) - 2\pi i n - n\cancel{\ln(r)} - \Theta_r(0) + 2\pi i 0 + \cancel{n \ln(r)} \in \left]-\pi, \pi\right[$$

$$\Rightarrow \Theta_r(1) - 2\pi i n - \Theta_r(0) + \cancel{2\pi i 0} = 0$$

$$\Rightarrow \Theta_r(1) - \Theta_r(0) = 2\pi i n$$

$$\Rightarrow \nu(\gamma_r) = n$$

Puisque $n \neq 0$, $\exists\ r' \in [0, r]$ t.q.

$\gamma_{r'}(t) = 0$ pour un $t \in [0, 1]$.

$\Rightarrow P(z) = 0$ pour un $z = r' e^{2\pi i t}$.

Ceci achève la preuve du TFAl.