Série 9

2.1. Polynômes de Taylor

1. En imitant l'exemple du cours, paramétriser l'arc du cercle unité centré à l'origine par la variable y (donc le sinus) et par la variable x (donc le cosinus). Décrire alors la longueur d'arc pour une valeur de x ou y entre 0 et 1. Vérifier qu'on retrouve l'intégrale des dérivées des fonctions trigonométriques réciproques.

2. Calculer les polynômes de Taylor des fonctions

(a) $\cos(x)$ autour de $x = 0$,

(b) $\sin(x)$ autour de $x = 0$.

3. Calculer les premières dérivées de $f(x) = \sqrt{x}$ et deviner une formule pour $\frac{d^n}{dx^n}\sqrt{x}$. Confirmer cette formule devinée par récurrence et écrire le polynôme de Taylor $\mathrm{P}^n_{1,\sqrt{x}}(x)$. Evaluer ce polynôme de Taylor au troisième ordre en $x = 2$.

4. (a) Montrer par récurrence que $\forall n \geq 1$,

$$\frac{d^n}{dx^n}\mathrm{Arctan}(x) = \frac{\mathrm{sgn}(-x)^{n-1}(n-1)!}{\sqrt{1+x^2}^n} \sin\left(n\,\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right).$$

(Indication: Poser $\theta(x) := \mathrm{Arcsin}(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}})$). Noter que θ n'est pas dérivable en $x = 0$. Vérifier la formule pour $x \neq 0$ et trouver un argument de continuité pour en déduire la dérivée en $x = 0$.)

(b) En déduire le polynôme de Taylor de $\mathrm{Arctan}(x)$ autour de $x = 0$.

(c) Confirmer la série numérique du cours qui converge vers π (sans encore s'occuper de sa convergence).

5. Reprendre le polynôme de Taylor de $\ln(x)$ vue au cours pour en déduire le polynôme de Taylor pour $\ln(1+t)$ et $t \in]-1, 1[$. En déduire le polynôme de Taylor pour $\ln(\frac{1+t}{1-t})$. Déduire une série de fonctions rationnelles pour $\ln(x)$ en supposant la convergence du polynôme de Taylor pour $\ln(\frac{1+t}{1-t})$ et $t \in]-1, 1[$.

6. On considère la fonction

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \exp -\frac{1}{x} & \text{si } x > 0. \end{cases}.$$

(a) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $\frac{d^n}{dx^n}f(x) = \frac{P(x)}{x^{2n}}f(x)$, où $P(x)$ est une fonction polynômiale.

(b) Déduire du point précédent que $\forall n \geq 0$, $(\frac{d^n}{dx^n}f)(0)$ existe et égale 0.

(c) Quel est alors le polynôme de Taylor à l'ordre n de f autour de $x_0 = 0$?

Problèmes supplémentaires

On va prouver le **thórème fondamental de l'algèbre** en exercices supplémentaires. On le fera en plusieurs étapes.

(PS1) Une **suite de nombres complexes** est une fonction $s : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. On dit que la suite s **converge** vers un nombre complexe $l \in \mathbb{C}$ ssi $\forall \epsilon > 0$, $\exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq N_\epsilon$ implique $|l - z_n| < \epsilon$, où $|z_n - l|$ est le module du nombre complexe $l - z_n$.

Montre que si $\lim_n z_n = l$ et $\lim_n w_n = j$, alors $\lim_n(z_n + w_n) = l + j$ et $\lim_n(z_n \times w_n) = l \times j$.

(PS2) Une **fonction complexe** est une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. On dit que la fonction f est **continue** en un nombre complexe $w \in \mathbb{C}$ ssi pour tout suite $s : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ telle que $\lim_n z_n = w$, on a $\lim_n f(z_n) = f(w)$.

Montre que la somme et que le produit de deux fonctions complexes continues en w est continue en w.

(PS3) Déduire des deux exercices précédents qu'un polynôme $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, où $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ est une fonction complexes continue en tout point de $\mathbb{C}$. Montrer qu'il en va de même pour $z \mapsto |P(z)|$.

Solutions

S2. (a) $P^n_{\sin(x),0}(x) = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$. (b) $P^n_{\cos(x),0}(x) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$.

S3. $\frac{d^n}{dx^n}\sqrt{x} = \frac{\prod_{k=1}^n (3-2k)}{2^n} x^{(1-2n)/2}$,
$P^n_{\sqrt{x},1}(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{-1}{8}(x-1)^2 + \frac{3}{96}(x-1)^3 + \ldots + \frac{\prod_{k=1}^n (3-2k)}{n! 2^n}(x-1)^n$,
$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{3}{48} = \frac{48+24-6+3}{48} = \frac{23}{16} = 1.437\,5$

S4. (b) $P^n_{\mathrm{Arctan}(x),0}(x) = \sum_{1 \leq 2k+1 \leq n} \frac{1}{2k+1}(-1)^k x^{2k+1}$

S5. $P^n_{\ln(1+t),0}(t) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{(t)^k}{k}$, $\quad P^n_{\ln(1-t),0}(t) = -\sum_{k=1}^n \frac{(t)^k}{k}$.
$P^n_{\ln(\frac{1+t}{1-t}),0}(t) = 2\sum_{1 \leq 2k-1 \leq n} \frac{t^{2k-1}}{2k-1}$.
$\ln(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{2}{2n-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n-1}$.

S6. (c) $P^n_{f,0}(x) = 0$.

Questionnaire d'auto-évaluation

1. Ai-je retenu la définition du polynôme de Taylor?

2. Suis-je en mesure de calculer le polynôme de Taylor d'une fonction?

3. Est-ce que j'arrive à trouver des formulations pour $f^{(n)}(x)$?

4. Suis-je à l'aise avec la notation en somme et ses indices?

5. Est-ce que toute fonction peut s'approximer par son polynôme de Taylor (voir exercice 6)?