Série 8

1.6 Nombres complexes

1. Montrer que toute matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et $\det(A) = 1$ vérifie l'équation $A^2 = -\mathbb{1}_2$. Trouver alors trois telles matrices différentes de $\pm i$.

2. Vérifier que l'ensemble

$$E = \{a + b\sqrt{2} \ : \ a, b \in \mathbb{Q}\},$$

muni des opérations d'addition et de multiplication habituelles, est bien un corps commutatif. Existe-t-il un $x \in E$ avec $x^2 = 3$? Est-ce que $\mathbb{Q} \subset E$? Est-ce que $\mathbb{R} \subset E$? Qu'en est-il de

$$F = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} \ : \ a, b, c \in \mathbb{Q}\}?$$

3. Vérfier les (in)-égalités suivantes:

(a) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.

(b) $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$.

(c) $|zz'| = |z|\,|z'|$.

(d) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.
(Indication: vérifier $|zz'| \geq |\mathfrak{Re}(zz')|$.)

(e) $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$.

(f) $|z| = |\overline{z}|$.

(g) $z \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$.

(h) $z \neq 0 \Rightarrow |z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$.

4. Montrer les formules suivantes:

- $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{cis}(\alpha + \beta) = \mathrm{cis}(\alpha)\mathrm{cis}(\beta)$,
- $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} \cos n\theta = \sum_{0 \leq 2l \leq n} (-1)^l \binom{n}{2l} \cos^{n-2l}\theta \sin^{2l}\theta, \\ \sin n\theta = \sum_{0 \leq 2l+1 \leq n} (-1)^l \binom{n}{2l+1} \cos^{n-2l-1}\theta \sin^{2l+1}\theta. \end{cases}$$

C'est la **formule de Moivre**.

5. Mettre sous la forme $a + ib$ le(s) nombre(s) complexe(s) z qui vérifient:

(a) $z = (4 - i) + (2 + 3i)(1 - i)$,

(b) $z = \frac{1}{3-2i}$,

(c) $z = i^n$ n entier,

(d) $z = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$,

(e) $z^2 - 3z - iz + 4 + 3i = 0$,

(f) $z^4 = 8 + i8\sqrt{3}$.

6. Vrai ou faux (trouver un contre-exemple si possible)?

(a) Tout polynôme $P(z)$ à coefficients complexes possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

(b) Toute équation $f(z, \overline{z}) = 0$ à coefficients complexes possède au moins une solution dans $\mathbb{C}$.

(c) Tout polynôme à deux variables $P(z, \overline{z}) = 0$ à coefficients complexes possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

(d) Un polynôme à deux variables $P(z, \overline{z}) = 0$ à coefficients complexes possède au plus un nombre fini de racines dans $\mathbb{C}$.

Problèmes supplémentaires

(PS1) Soient les trois matrice à coefficients complexes

$$I := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Considérons l'ensemble

$$\mathbb{H} := \{t\mathbb{1}_2 + xI + yJ + zK \;:\; t, x, y, z \in \mathbb{R}\} \subset M_2(\mathbb{C}).$$

(a) Montrer que $I^2 = J^2 = K^2 = -\mathbb{1}_2$, que $IJ = K$, $JK = I$, $KI = J$.

(b) Montrer que $\mathbb{H}$, muni de l'addition matricielle est un groupe abélien et que le produit est associatif et distributif

(c) Montrer que tout élément $w \in \mathbb{H}^*$ est inversible pour $\times$. Est-ce que $\mathbb{H}$ forme un corps? Que perd-t-on alors par rapport à $\mathbb{C}$?

Solutions

S1. Par exemple $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{smallmatrix}\right)$.

S5. (a) 3,

(b) $\frac{1}{13}(3 + 2i)$,

(c) $i^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 4k, \\ i & \text{si } n = 4k+1, \\ -1 & \text{si } n = 4k+2, \\ -i & \text{si } n = 4k+3. \end{cases}$,

(d) 2,

(e) $1 + 2i$, $2 - i$.

(f) $z \in \{2\mathrm{cis}(\frac{\pi}{12} + \frac{0\pi}{2}), 2\mathrm{cis}(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}), 2\mathrm{cis}(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{2}), 2\mathrm{cis}(\frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{2})\}$.

S6. (a) Vrai.

(b) Faux.

(c) Faux.

(d) Faux.

Questionnaire d'auto-évaluation

1. Est-ce que j'arrive à définir un nombre complexe?

2. Suis-je en mesure de trouver les inverses d'un nombre complexe?

3. Ai-je compris la notation $\mathrm{cis}(\alpha)$?

4. Saurais-je définir trouver les racines complexe d'un polynôme de second degré?

5. Est-ce que j'arrive à extraire une racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe?

6. Pourquoi le terme "complexe"?