Série 7

1.5. Supremum et infimum

1. Les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants sont-ils majorés ou minorés? Dans chaque cas, déterminer s'il y a des bornes supérieures ou inférieures et dire, s'il s'agit s'un maximum ou d'un minimum.

$$E := \{\frac{n}{1+nm} \,:\, n, m \in \mathbb{N}^*\}, \quad F := \{\frac{n}{1+nm} \,:\, n, m \in \mathbb{N}\}.$$

2. Soient $y \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Posons la suite itérative

$$x_0 := \max\{1, y\}, \quad x_{k+1} := x_k - \frac{x_k^n - y}{n x_k^{n-1}}.$$

(a) Montrer que $x_k > 0$ et $x_k^n > y$ impliquent $0 < x_{k+1} < x_k$.

(b) Utiliser un résultat du cours pour montrer, que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée.

(c) Montrer que si $\lim_{k\to\infty} x_k = r$, alors $r^n = y$.

(d) Calculer les premiers termes pour $y = 10$ et $n = 2$.

3. Soient deux sous ensembles $E, F \subset \mathbb{R}$, tels que E ne contient que des minorants de F. Montrer que $\inf(F) \geq \sup(E)$.

4. Vrai ou faux (donner un contre-exemple si possible)?

(a) $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.

(b) $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.

(c) L'intersection d'un nombre fini d'ensembles ouverts de $\mathbb{R}$ est encore un ouvert de $\mathbb{R}$.

(d) L'intersection d'un nombre arbitraire d'ensembles ouverts de $\mathbb{R}$ est encore un ouvert de $\mathbb{R}$.

5. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble majoré, tel que $\sup(A) \notin A$. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, $A \cap]\sup(A) - \epsilon, \sup(A)[$ possède une infinité d'éléments.
(Indication: raisonner par l'absurde.)

6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fontion définie sur tout $\mathbb{R}$. Montrer alors que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$ ssi

$$\text{Pour tout ouvert } U \subset \mathbb{R}, \quad f^{-1}[U] \subset \mathbb{R} \text{ est un ouvert.}$$

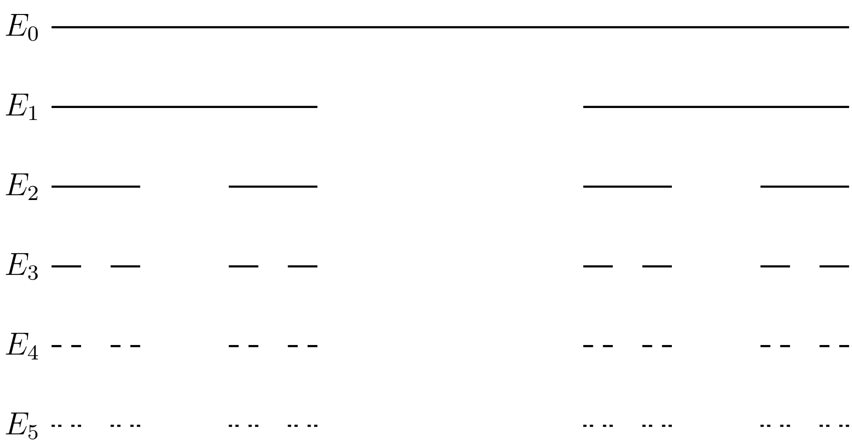
7. Soit $\{E_i \,:\, i \in I\}$ un ensemble de sous-ensembles $\emptyset \neq E_i \subset \mathbb{R}$, indexés par un ensemble d'indices I. Supposons que $E := \{x \in \mathbb{R} \,:\, \exists i \in I \text{ t.q. } x \in E_i\} = \cup_{i\in I} E_i$ est majoré.
Montrer que $\sup(E) = \sup\{\sup(E_i) \,:\, i \in I\}$.

Problèmes supplémentaires

(PS1) On définit une suite d'ensembles de la manière suivante: on pose $E_0 :=]0,1]$ et on définit itérativement l'ensemble E_{n+1} à partir de l0ensemble E_n en ôtant le tiers du milieu, semi-ouvert à gauche, des intervalles constituant E_n:

$$E_0 :=]0,1], \quad E_1 :=]E_0 \setminus]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \quad E_2 := E_1 \setminus \big(]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}] \cup]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}]\big),$$
$$E_{n+1} := E_n \setminus \cup_{k\in\mathbb{N}}]\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}}], \quad E_\infty := \cap_{n\in\mathbb{N}} E_n.$$

Graphiquement:



(a) Calculer la longueur des ensembles $E_0, E_1, \ldots, E_n, \ldots, E_\infty$.

(b) Si $b = 3$, que caractérise les suites b-cimales de $x \in E_0$, $x \in E_1$, $x \in E_n$, $x \in E_\infty$ (voir exercice 6.)?

(c) Montrer qu'il existe une bijection entre E_∞ et $]0,1]$ (que caractérise les suites 2-cimales pour $x \in]0,1]$?).

Solutions

S1. $0 = \inf(E)$, $\sup(E) = 1$, E est borné sans min ni max.
$0 = \inf(F) = \min(F)$, F n'est pas majoré.

S4. (a) Vrai. (c) Vrai.
(b) Vrai. (d) Faux.

Questionnaire d'auto-évaluation

1. Suis-je en mesure d'établir la correspondance entre les minorants d'un ensemble et son infimum?

2. Est-ce que j'arrive à distinguer les concepts de bornes inf/sup et les min/max?

3. Ai-je compris les conséquences du théorème de la borne supérieure?

4. Puis-je exhiber un résultat non vu au cours mais qui dépend aussi crucialement de l'existence des bornes sup/inf?

5. A partir d'un ensemble donné, suis-je en mesure de déterminer ses bornes?

6. Pourquoi $1 = 0.\overline{9}$ et $0,5 = 0.4\overline{9}$?