Série 6

1.5. Ordre & Borne supérieure

1. On pose la relation $>$ sur $\mathbb{R}$:

$$[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] > [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \Leftrightarrow \exists d \in \mathbb{Q}_+^*, \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N,\, x_n \geq y_n + d.$$

Montrer que cette relation est bien posée sur les classes d'équivalences et qu'elle est transitive.

2. On reprend la relation $<$ définie à l'exercice précédent. Montrer que $<$ est compatible avec $+$ et $\times$, i.e.

(a) $\forall [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(z_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}$,

$$[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] < [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \iff [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(z_n)_{n\in\mathbb{N}}] < [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(z_n)_{n\in\mathbb{N}}].$$

(b) $\forall [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}_+^*$, $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \times [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}_+^*$.

3. Soit $(C, +, \times)$, un corps.

(a) Montrer que $\forall x, y \in C$, $0 \times x = 0$, $(-x) \times y = -(x \times y)$ et que $x \times y = 0$ implique $x = 0$ ou $y = 0$.
(Indication: écrire $0 \times x = 0 \times x + 0$ et utiliser l'opposé et la distributivité.)

(b) Montrer que si en plus C est muni d'un ordre $<$ total et compatible avec les opérations algébrique (c.f. exercice précédent), alors $\forall x \in C$, $x < 0$ ssi $(-x) > 0$ et que $x \times y > 0$ ssi $x, y > 0$ ou $x, y < 0$.

4. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. Montrer qu'alors il existe un rationnel r tel que $x < r < y$.
Soient $r, s \in \mathbb{Q}$ tels que $r < s$. Montrer qu'alors il existe un irrationnel x tel que $r < x < s$.

5. Vrai ou faux (donner un contre-exemple si possible)?

(a) Une suite de Cauchy $s : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ converge dans $\mathbb{R}$.

(b) Une suite de Cauchy $s : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ converge dans $\mathbb{Q}$.

(c) Si $E \subset \mathbb{R}$ est un ensemble minoré, alors $\inf(E) \in E$.

(d) Si $E \subset \mathbb{Q}$ est un ensemble de nombre rationnels minoré, alors $\inf(E) \in \mathbb{Q}$.

6. Une **suite décimale** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ est une suite qui vérifie $x_0 \in \mathbb{Z}$, et pour $n \geq 1$, $|x_n| = |x_{n-1}| + \frac{d_n}{10^n}$ avec $d_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

(a) Pour $\emptyset \neq E \subset \mathbb{Q}_+$, construire une suite décimale qui est, en tant que nombre réel, la borne inférieure de E.

(b) Utiliser le point précédent pour montrer que si $[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}_+$, il doit exister une suite décimale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim'' (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) Montrer alors que pour tout $[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}$, il doit exister une suite décimale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim'' (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Problèmes supplémentaires

(PS1) On se propose ici de montrer la complétude de $\mathbb{R}$, sans passer par l'existence des supréma, ni des infima.

(a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un nombre rationnel r_ϵ, tel que $|[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] - [(r_\epsilon)_{n\in\mathbb{N}}]| < \epsilon$.

(b) Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = ([(x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}]_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Montrer que la suite $(r_{2^{-k}}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.

(c) Montrer que $\lim_{k\to\infty} x_k = [(r_{2^{-l}}^{(l)})_{l\in\mathbb{N}}]$.

Solutions

S5. (a) Vrai.

(b) Faux.

(c) Faux.

(d) Faux.

Questionnaire d'auto-évaluation

1. Suis-je en mesure de définir l'infimum (supremum) ainsi que le minimum (maximum) d'un ensemble?

2. Est-ce que j'arrive à donner un exemple d'un ensemble minoré sans infimum dans $\mathbb{Q}$?

3. Ai-je saisi la construction de l'infimum à l'aide des suites de Cauchy?

4. Est-ce qu'un corps est forcément intègre?

5. Ai-je un exemple d'une suite de Cauchy de rationnels qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$?

6. Est-ce qu'un corps est forcément totalement ordonné?