Série 5

1.5. Nombres réels

1. On reprend la suite de Cauchy à valeurs rationnelles

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} := 1 + \frac{1}{1+x_n},\ n \geq 0.$$

(a) A partir de quel $N_k \in \mathbb{N}$ a-t-on $n, m \geq N_k$ implique $|x_n - x_m| < \frac{1}{10^k}$ pour $k = 0, 1, 2, 3$?

(b) Calculer alors les quatres premières décimales pour $\sqrt{2}$.

2. (a) Mettez les phrases suivantes dans le bon ordre pour démontrer qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy si elle converge:

(a) Mais alors, pour $n, m \geq N_\epsilon$, on doit avoir

(c) $\exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_\epsilon$ implique $|x_n - r| < \epsilon/2$.

(b) $< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$.

(d) Soit $\epsilon \in \mathbb{Q}_+^*$.

(e) Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ converge, disons vers $r \in \mathbb{Q}$, on a que

(f) $|x_n - x_m| \leq |x_n - r| + |r - x_m|$

(b) Donner un exemple d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ qui est de Cauchy mais qui ne converge pas (dans $\mathbb{Q}$).

3. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.

(a) Si N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$ sont tels que $n, m \geq N_1$ implique $|x_n - x_m| < \epsilon/2$ et $n, m \geq N_2$ implique $|y_n - y_m| < \epsilon/2$, à partir de quel $N \in \mathbb{N}$ a-t-on $|x_n + y_n - x_m - y_m| < \epsilon$?

(b) Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy, alors $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy aussi.

(c) Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
(Indication: si $n, m \geq N_1$ implique $|x_n - x_m| < 1$, que peut-on dire de $\max\{x_1, x_2, \ldots, x_{N_1}, 1 + x_{N_1}\}$?).

(d) Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy, alors $(x_n \times y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy aussi.

4. Vrai ou faux (donner un contre-exemple si possible)?
Pour des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$

(a) Si $x_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n > 0$.

(b) Si $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ alors $\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n = 0$.

(c) Si $x_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$ alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

(d) Si $x_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, alors $(\frac{1}{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy aussi.

5. Soit la relation

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim'' (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0.$$

Montrer que $\sim''$ est une relation d'équivalence sur les suites de Cauchy à valeurs rationnelles.
Pour une suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on pose alors les classes

$$[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] := \{(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \,:\, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim'' (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\}.$$

Montrer alors que $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ ssi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim'' (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6. Sur les classes d'équivalence de suite de Cauchy à valeurs rationnelles on pose les opérations

$$[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] := [(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}],$$
$$[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \times [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] := [(x_n \times y_n)_{n\in\mathbb{N}}].$$

Montrer que ces opérations sont bien posées, i.e. si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]$, alors

(a) $(v_n + w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}]$,

(b) $(v_n \times w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [(x_n \times y_n)_{n\in\mathbb{N}}]$.

Problèmes supplémentaires

(PS1) Vérifier que $\mathbb{R}$, muni des opérations $+$ et $\times$ est un corps commutatif, i.e.:

(a) $\mathbb{R}$ muni de $+$ est un groupe commutatif.

(b) $\mathbb{R}^*$ muni de $\times$ est un groupe commutatif.

(c) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$.

(PS2) Une **suite décimale** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ est une suite qui vérifie $x_0 \in \mathbb{Z}$, et pour $n \geq 1$, $|x_n| = |x_{n-1}| + \frac{d_n}{10^n}$ avec $d_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Montrer qu'une suite décimale est de Cauchy.

Solutions

S1. (a) On peut prendre $N_k = 0,\ 2,\ 4,\ 5$.

(b) $1.4142\ldots$

S2. (a) $(d) - (e) - (c) - (a) - (f) - (b)$.

(b) Par exemple $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+x_n}$.

S3. (a) On peut prendre $N = \max\{N_1,\ N_2\}$.

S4. (a) Faux.

(b) Faux.

(c) Faux.

(d) Faux.

Questionnaire d'auto-évaluation

1. Suis-je en mesure d'utiliser un argument du cours dans une démonstration?

2. Est-ce que j'arrive à énumérer les propriétés d'un corps?

3. Ai-je saisi la différence entre une suite de Cauchy et une suite convergente?

4. Puis-je expliquer la relation d'ordre sur les suites de Cauchy rationnelles?

5. Ai-je compris l'opération d'addition et de multiplication de deux classes de suites de Cauchy?

6. Pourquoi une suite de Cauchy est-elle bornée?