Série 4

1.5. Nombres réels

1. (a) Montrer que qu'il n'existe pas de nombre rationnel solution de l'équation $x^2 = 3$.

(b) Montrer que pour tout nombre premier p, il n'existe pas de nombre rationnel solution de l'équation $x^2 = p$.

2. On construit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in {\mathbb{Q}_+}^{\mathbb{N}}$ itérativement comme suit:

$$x_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},\, x_{n+1} := 1 + \frac{1}{1+x_n}.$$

Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$,

$$x_n = 1 + \left.\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{1}{2}}}}\right\} n \text{ fractions.}$$

3. On reprend la suite définie à l'exercice précédent.

(a) Montrer que $\forall n, m \in \mathbb{N}$,

$$x_n > x_m \;\Rightarrow\; x_{n+1} < x_{m+1} \quad \text{ et } \quad (x_n)^2 < 2 \;\Leftrightarrow\; 2 < (x_{n+1})^2.$$

(Indication: réduire $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+x_n}$ au même dénominateur et élever au carré.)

(b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(x_{2n})^2 < (x_{2n+2})^2 < 2 < (x_{2n+3})^2 < (x_{2n+1})^2.$$

(Indication: le vérifier pour $n = 0$ puis utiliser le point précédent.)

4. Soient les ensembles

$$A := \{r \in \mathbb{Q} \,:\, r < 0 \text{ ou } r^2 < 2\}, \quad B := \{r \in \mathbb{Q} \,:\, r > 0 \text{ et } r^2 > 2\}.$$

Montrer que A est l'ensemble des minorants de B et que B est l'ensemble des majorants de A. Utiliser l'exercice précédent pour déterminer, si A posséde un maximum et si B possède un minimum.

5. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'exercice précédent vérifie $\lim_{n\to\infty} x_n^2 = 2$. (Indication: utiliser le fait que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy et que $x_n^2 < 2 \Leftrightarrow 2 < x_{n+1}^2$).

6. Imiter la construction de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour trouver des suites de nombres rationnels $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telles que $\lim_{n\to\infty} y_n^2 = 3$ et $\lim_{n\to\infty} w_n^2 = 5$.

7. Vrai ou faux (donner un contre-exemple si possible)?

(a) Tout sous-ensemble non-vide et minoré de $\mathbb{Q}$ possède un minimum.

(b) Tout sous-ensemble non-vide et minoré de $\mathbb{Q}$ possède un infimum.

(c) Si $\emptyset \neq E, F \subset \mathbb{Q}$ et E posséde un minimum, alors $E \cap F$ en possède un.

(d) Si $\emptyset \neq E, F \subset \mathbb{Q}$ et E posséde un infimum, alors $E \cap F$ en possède un.

Problèmes supplémentaires

(PS1) Pour ce problème, on suppose connue la notion d'application bijective.

(a) Montrer qu'il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.

(b) En utilisant la version rationnelle du théorème fondamental de l'arithmétique, montrer qu'il existe une bijection $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$.

(c) Montrer qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$.

Solutions

S4. A n'a pas de maximum, B n'a pas de minimum.

S6. $y_{n+1} = 1 + \frac{2}{1+y_n}$, $w_{n+1} = 2 + \frac{1}{2+x_n}$.

S7. (a) Faux. (b) Faux. (c) Faux. (d) Faux.

Questionnaire d'auto-évaluation

(a) Suis-je en mesure de reproduire un argument du cours dans une démonstration?

(b) Est-ce que j'arrive à donner la définition d'une suite de Cauchy?

(c) Ai-je un exemple d'une suite de Cauchy non vue au cours?

(d) Puis-je expliquer la nécessité d'aller au-delà des nombres rationnels?

(e) Ai-je compris la défibition d'une suite convergente?

(f) Quelle est la différence entre un minimum et un infimum d'un ensemble numérique?