Série 3

1.4. Nombres rationnels

1. Montrez que pour $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$mn = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n = 0 \text{ ou } m = 0.$$

(Indication: observer que pour $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, alors $(a, b) \sim (d, 0)$ ou $(a, b) \sim (0, d)$ avec $d \in \mathbb{N}$.)

2. Vérifier que $\sim'$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

3. Montrer que

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \quad [(a, b)] = [(c, d)] \Leftrightarrow (a, b) \sim' (c, d).$$

4. Vérifier que les opérations $+$ et $\times$ font de $\mathbb{Q}$ un corps commutatif.

5. Montrer les affirmations suivantes:

(a) $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^*_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^*_+$ et cette union est disjointe.

(b) Si $p, q \in \mathbb{Q}$, alors $pq = 0 \in \mathbb{Q}$ ssi $p = 0$ ou $q = 0$.

(c) Le produit $\times$ sur $\mathbb{Q}$ est compatible avec la prise de l'opposé de $+$, i.e. $-(pq) = (-p)q$.

(d) Le produit $\times$ sur $\mathbb{Q}^*$ est compatible avec la prise de l'inverse de $\times$, i.e. $(pq)^{-1} = p^{-1}q^{-1}$.

(e) L'ordre $<$ sur $\mathbb{Q}$ defini par $p < q \Leftrightarrow q - p \in \mathbb{Q}^*_+$ est total.

6. On rappelle ici que si $>$ est un ordre sur un ensemble X, alors $E \subset X$ est dit **minoré** si il existe $m \in X$ tel que $\forall x \in E$, $m \leq x$. Est-ce que les affirmations suivantes sont vraies (si c'est le cas, montrez-le, sinon, trouvez un contre-exemple)?

(a) Tout sous-ensemble $E \subset \mathbb{Z}$ non vide et minoré possède un élément minimal pour l'ordre $<$ dans $\mathbb{Z}$.

(b) Tout sous-ensemble $E \subset \mathbb{Q}$ non vide et minoré possède un élément minimal pour l'ordre $<$ dans $\mathbb{Q}$.

7. Pour cet exercice, on identifie $1, 2, 3, \ldots \in \mathbb{N}$ avec $[(1, 0)], [(2, 0)] \ldots \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{Z}$ avec $[(m, 1)] \in \mathbb{Q}$.

(a) Trouver deux nombres rationnels $0 < p, q < 1$, tels que $pq = \frac{3}{4}(= 3 \times 4^{-1})$.

(b) Trouver deux nombres rationnels $0 < p < 4$ et $0 < q < 5$ tels que $p \times q = 19$.

(c) Soient $x, y, r \in \mathbb{Q}^*_+$ tels que $r < xy$. Trouver deux nombres rationnels $0 < q < x$ et $0 < p < y$, tels que $pq = r$.

Problèmes supplémentaires

(PS1) On considère un ensemble E non vide muni d'une opération $\star : E \times E \to E$ commutative, associative et qui possède la propriété de simplification. Montrer que

$$(x, x') \sim (y, y') \quad \Leftrightarrow \quad x \star y' = x' \star y$$

est une relation d'équivalence sur $E \times E$.

(PS2) On reprend les notations de l'exercice précédent et on pose $E^2/\sim := \{[(x, y)] : (x, y) \in E^2\}$. Montrer que l'opération

$$[(a, b)] * [(c, d)] := [(a \star c, b \star d)]$$

est bien définie sur $E^2/\sim$ et qu'elle en fait un goupe abélien.

(PS3) On reprend les notations de l'exercice précédent et on suppose ici, que le lecteur est familier avec la notion de morphisme de semi-groupes.
Soit G un ensemble non-vide, muni d'une opérations $+ : G \times G \to G$ qui en fait un groupe abélien. Soit $f : E \to G$ un morphisme de semi-groupes et $\imath : E \to E^2/\sim$, $a \mapsto [(a \star a, a)]$.
Montrer qu'il existe un unique morphisme de groupe $[f] : E^2/\sim \to G$, tel que $[f] \circ \imath = f$.

Solutions

S6. (a) Vrai.
(b) Faux.

S7. (a) P.ex. $p = [(6, 7)]$ et $q = [(7, 8)]$.
(b) P.ex. $p = [(152, 39)]$ et $q = [(39, 8)]$.
(c) P.ex. $p = [(2a_r b_x a_y, 2a_r b_x b_y + 1)]$ et $q = [(2a_r b_x b_y + 1, 2b_r b_x a_y)]$, si $x = [(a_x, b_x]$, $y = [(a_y, b_y)]$ et $[(a_r, b_r)]$.

Questionnaire d'auto-évaluation

1. Suis-je en mesure d'énoncer la définition d'un groupe?

2. Est-ce que j'arrive à énumérer les propriétés d'un corps commutatif?

3. Ai-je un exemple d'un corps commutatif non vu au cours?

4. Puis-je citer un résultat nouveau par rapport aux cours précédents?

5. Ai-je compris les opérations arithmétiques sur les classes d'équivalence?

6. Quel est le rapport entre les classes d'équivalences qui définissent les rationnels et les fractions?