Série 2

1.2. Récurrence et nombres entiers

1. Soit l'affirmation $A(n)$: "le nombre $10^n + 1$ est un multiple de 3".

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $A(n)$ est vraie, alors $A(n+1)$ est vraie aussi.

(b) Pourquoi ne peut-on pas conclure par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A(n)$ est vraie?

2. On définit sur $\mathbb{N}^2$ la relation

$$(n, m) \sim (n', m') \Leftrightarrow n + m' = m + n'.$$

(a) Déterminer parmi les couples suivants, ceux qui sont en relation:

$$(1, 3),\ (2, 5),\ (7, 2),\ (4, 6),\ (5, 0).$$

(b) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}$, i.e.

i. $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$, $(n, m) \sim (n, m)$,

ii. $\forall (n, m), (n', m') \in \mathbb{N}^2$, $(n, m) \sim (n', m')$ implique $(n', m') \sim (n, m)$,

iii. $\forall (n, m), (n', m'), (n'', m'') \in \mathbb{N}^2$, $(n, m) \sim (n', m')$ et $(n', m') \sim (n'', m'')$ impliquent $(n, m) \sim (n'', m'')$.

3. Pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ on définit la classe d'équivalence

$$[(m, n)] := \{(m', n') \in \mathbb{N}^2 \ : \ (m', n') \sim (m, n)\}.$$

On pose alors l'opération

$$[(m, n)] + [(m', n')] := [(m + m', n + n')].$$

(a) Décrire l'ensemble qui correspond à la classe d'équivalence $[(1, 3)]$.

(b) Décrire l'ensemble qui correspond à la classe d'équivalence $[(1, 3)] + [(3, 1)]$.

(c) Montrer que l'ensemble des classes d'équivalences $\{[(n, m)] \ : \ (n, m) \in \mathbb{N}^2\}$ muni de $+$ est un groupe commutatif.

4. Vrai ou faux (donner un contre-exemple si c'est faux)?

(a) l'opération $n \star m := n^m$ est commutative sur $\mathbb{N}$.

(b) l'opération $n \star m := n^m$ est associative sur $\mathbb{N}$.

(c) l'opération $n \star m := n^m$ sur $\mathbb{N}$ possède un élément neutre.

5. En utilisant le théorème fondamental de l'arithmétique, montrer que si $m, n \in \mathbb{N}^*$ et si m est un multiple de n, alors tous les facteurs premiers de n sont aussi des facteurs premiers de m.

6. En utilisant l'exercice précédent, montrer que si $m, n \in \mathbb{N}^*$, le plus petit commun multiple (PPCM(n, m)) et le plus grand commun diviseur (PGCD(n, m)) de n et m existent. Comment les calcule-t-on? Donner le résultat pour $n = 117$ et $m = 66$.

7. On pose
$$2\mathbb{Z} := \{2n \,:\, n \in \mathbb{Z}\} \text{ et } 3\mathbb{Z} := \{3n \,:\, n \in \mathbb{Z}\}.$$
Montrer que
$$2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}.$$
Montrer qu'en général, si $a, b \in \mathbb{N}^*$,
$$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \mathrm{PPCM}(a, b)\mathbb{Z}.$$

Problèmes supplémentaires

(PS1) Vérifier les propriétés suivantes pour la multiplication dans $\mathbb{Z}$: $\forall n, m, p \in \mathbb{Z}$, on a

(a) $m \times n = n \times m$ (commutativité),

(b) $m \times (n \times p) = (m \times n) \times p$ (associativité),

(c) $m \times (n + m) = m \times n + m \times p$ (distributivité),

(d) $m \times [(1, 0)] = m$ (existence d'un élément neutre pour $\times$),

(e) $m \times [(0, 0)] = [(0, 0)]$ (existence d'un élément annulateur pour $\times$),

(f) $(-m) \times n = -(m \times n)$ (compatibilité de $\times$ avec $>$).

Solutions

S1.(b) Il n'est pas possible d'initialiser la relation de récurrence.

S2.(a) $(1,3) \sim (4,6), \quad (7,2) \sim (5,0)$.

S3. (a) $[(1,3)] = \{(m', n') \in \mathbb{N}^2 \,:\, n' = m' + 2\}$.

(b) $[(1,3)] + [(3,1)] = [(0,0)]$.

S4. (a) Faux.

(b) Faux.

(c) Faux

S6. $\mathrm{PPCM}(117, 66) = 2'574$, $\mathrm{PGCD}(117, 66) = 3$.

Questionnaire d'auto-évaluation

1. Suis-je à l'aise avec le raisonnement par récurrence ?

2. Est-ce que j'arrive à énumérer les propriétés d'une relation d'équivalence?

3. Ai-je un exemple d'une relation d'équivalence non vue au cours?

4. Puis-je énoncer le théorème fondamental de l'arithmétique?

5. Ai-je compris la notion de classe d'équivalence?

6. Qu'est-ce qu'un ordre total? Qu'est-ce qu'un bon ordre? Un ordre total est-il bon?