Série 12

3.2 Equations différentielles ordinaires à variables séparées

1. Parmi les équations différentielles suivantes, lesquelles sont des EDOL1? lesquelles des EDOv.s.?

(a) $y' = y^2 + x^2$.

(b) $y' = (y + x)^2$.

(c) $y' = y^2 x^2$.

(d) $y = y2x$.

2. Résoudre l'EDOv.s. avec condition initiale suivante:

$$y' = 3y, \quad y(X_0) = Y_0, \quad X_0, Y_0 \in \mathbb{R}.$$

3. Résoudre l'EDOv.s.

$$y' = e^{-y} cos(x)$$

avec condition initiale

(a) $X_0 = 0 = Y_0$.

(b) $X_0 = 2\pi, Y_0 = 0$.

(c) $X_0 = 0, Y_0 = 2\pi$.

4. Vrai ou faux (donner un contre-exemple si possible)?

(a) Une EDOv.s. possède toujours une solution unique dès qu'une condition initiale est donnée.

(b) Toute EDO de premier ordre est soit une EDOL1, soit une EDOv.s..

(c) Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, alors l'EDOv.s. $y' = f(y)g(x)$ possède des solutions non-triviales définies sur tout $\mathbb{R}$.

(d) Une EDOL1 est aussi une EDOv.s..

5. Résoudre l'EDOv.s.

$$y' = y(y - 1)(x + 1)$$

avec la condition initiale $X_0 = 0, Y_0 = 2$.

6. Pour les EDOv.s. avec conditions initiales suivantes, justifier l'existence et l'unicité des solutions. Puis, trouver ces solutions:

(a) $y' = 4 + y, \quad X_0 = 0,\ Y_0 = 1$.

(b) $y' = y^{\frac{8}{3}}, \quad X_0 = 0,\ Y_0 = 1$.

7. Parmi les équations différentielles suivantes se cachent des EDOv.s.. Utiliser la fonction $z = \frac{y}{x}$ pour les découvrir et les résoudre:

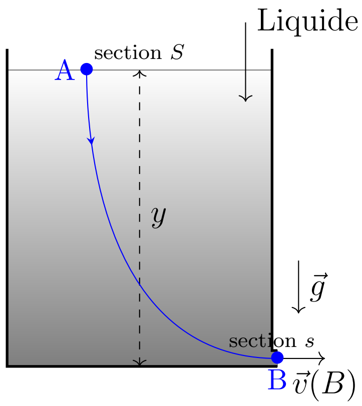
(a) $xy' = xe^{-\frac{y}{x}} + y, \quad y(1) = 0$.

(b) $x^2 y' = x^2 + xy - y^2, \quad y(1) = 0$.

Problèmes supplémentaires

(PS1)

Considérons un récipient cylindrique de section S contenant de l'eau qui peut s'échapper par une petite ouverture de section s située en bas de ce récipient Notons $y(t)$ la hauteur dans le récipient de l'eau à l'instant t.



(a) Etablir une équation différentielle pour $y(t)$.
(Indication: on suppose g constant le long du récipient et la conservation de la densité d'énergie est donné par

$$p_A + \rho g y + \frac{1}{2}\rho v^2(A,t) = p_B + \frac{1}{2}\rho v^2(B,t).$$

On supposera en plus que $S \gg s$ et que les pressions en A et B égalent la pression atmosphérique.)

(b) Combien de temps faut-il au récipiant pour se vider complètement?

Solutions

S1 (a) ni une EDOv.s., ni une EDOL1.

(b) ni une EDOv.s., ni une EDOL1.

(c) c'est une EDOv.s..

(d) c'est une EDOL1 et aussi une EDOv.s..

S2 $y(x) = Y_0 e^{3(x-X_0)}$.

S3 (a) $y(x) = \ln(\sin(x) + 1)$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

(b) $y(x) = \ln(\sin(x) + 1)$ pour $x \in]\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}[$.

(c) $y(x) = \ln(\sin(x) + e^{2\pi})$ pour $x \in \mathbb{R}$.

S4 (a) Faux.

(b) Faux.

(c) Faux.

(d) Faux.

S5 $y(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x^2+x}}$ pour $x \in]-1-\sqrt{1+\ln(4)}, -1+\sqrt{1+\ln(4)}[$

S6 (a) $y(x) = 5e^x - 4$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(b) $y(x) = \big(-\frac{5}{3}x + 1\big)^{-\frac{3}{5}}$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{5}\}$,

S7 (a) $y(x) = x\ln(\ln(ex)), \quad x > \frac{1}{e}$.

(b) $y(x) = x\frac{x^2-1}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$,

PS1 (a) $\dot{y}\frac{1}{\sqrt{y}} = -k, \quad y(0) = y_0 > 0,\ t_0 = 0.$

(b) $\tau = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}\frac{\sqrt{S^2-s^2}}{s}.$

Questionnaire d'auto-évaluation

1. Est-ce que je reconnais une EDOv.s.?

2. Est-ce que je vois la différence entre une EDOv.s. et une EDOL1?

3. Est-ce que je connais la procédure pour résoudre une EDOv.s.?

4. Ai-je réussi à résoudre les problèmes proposées?

5. Est-ce que j'arrive à calculer la fonction réciproque d'une fonction H?

6. Est-ce que j'ai compris pourquoi pour une solution $y(x)$, on a $x \in G^{-1}(\mathrm{Im}(H))$?