Série 11

3.1 Equations différentielles ordinaires et linéaires de 1er ordre

1. Déterminer toutes les solutions aux EDOL1 suivantes:

(a) $y' + 2y = 1$, (b) $w' - 2w = 10$.

Trouver les solutions pour les conditions initiales $y(0) = 1$ et $w(1) = 0$.

2. Déterminer toutes les solutions aux EDOL1 suivantes en devinant une solution particulière:

(a) $y' - y = x^2 - 1$, (c) $w' + (1 + x)w = e^{-x^2/2}$.

(b) $v' - \frac{1}{x}v = x\sin(x)$,

Trouver les solutions pour les conditions initiales $y(0) = 1$, $v(1) = 1$ et $w(1) = 0$.

3. On considère les deux EDOL1:

$$xy' - y = 0 \quad \text{et} \quad xy' - y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}.$$

Trouver des solutions à ces équations sur $I = \mathbb{R}_+^*$. Existe-t-il une solution à la deuxième équation sur $J = \mathbb{R}_+$?

4. Trouver l'EDOL1 qui a comme ensemble solutions

(a) $S = \{\sqrt{x} + \lambda \ln(x) \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\}$, (b) $S = \{\ln x + \lambda\sqrt{x} \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

5. Résoudre les équations différentielles suivantes en les transformant en EDOL1 après avoir transformé y:

(a) $\frac{y'}{\sqrt{y}} + \frac{1}{x}\sqrt{y} = x^2 + 1$, (b) $\frac{y'}{y} + x\ln(y) = x\cos(x^2)$.

6. Vrai ou faux (donner un contre-exemple si possible)?

(a) Si on donne une condition initiale pour une EDOL1, celle-ci aura une solution unique sur un intervalle ouvert.

(b) Si on donne une condition initiale pour une EDOL1, celle-ci aura une solution unique sur un ouvert.

(c) Une solution à une EDOL1 n'est pas toujours deux fois dérivable.

(d) Si $y_p + \lambda y_h$ est une solution à une EDOL1 sur un intervalle ouvert, alors $\lambda = y(x_0)$.

7. Le mouvement d'une particule chargé dans un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B}(x, y, z) = B\overrightarrow{e_z}$ est régi par le système d'EDOL1 suivant:

$$\begin{cases} \ddot{x} = w\dot{y} \\ \ddot{y} = -w\dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

où w est une constante dépendant de B, de la charge et de la masse de la particule. Résoudre ce système différentiel en posant $u = \dot{x} + i\dot{y}$.

Problèmes supplémentaires

(PS1) Quelles sont les uniques fonctions f et g dérivables sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, qui vérifient $\forall x, y \in I$

(a) $f(x+y) = f(x)f(y)$, et $0 \in I$, (b) $g(xy) = g(x) + g(y)$ et $1 \in I$.

(PS2) Si $P(z)$ est un polynôme non constant à coefficients complexes, alors il existe un $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) = 0$.

Solutions

S1. (a) $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\exp(2x_0 - 2x) + \lambda \exp(2x_0 - 2x)$,
avec c. i.: $y = \frac{1}{2}\left(1 + \exp(-2x)\right)$.

(b) $w = 5(\exp(2x - 2x_0) - 1) + \lambda \exp(2x - 2x_0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
avec c.i. : $w = 5\left(\exp(2x - 2) - 1\right)$.

S2. (a) $y = -x^2 - 2x - 1 + \lambda \exp(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
avec c.i. : $y = -x^2 - 2x - 1 + 2\exp(x)$.

(b) $v = -x\cos(x) + \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
avec c.i. : $v = -x\cos(x) + (1 + \cos(1))x$.

(c) $w = \exp(-x^2/2) + \lambda \exp(x_0 + \frac{1}{2}x_0^2 - x - \frac{1}{2}x^2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
avec c.i. : $w = \exp(-x^2/2) - \exp(1 - x - \frac{1}{2}x^2)$.

S3. $y = \sqrt{x} + \lambda x$ si $x > 0$. Pas de solutions si $x \geq 0$.

S4. (a) $y' - \frac{1}{x\ln(x)}y = \frac{\sqrt{x}\ln(x) - 2\sqrt{x}}{2x\ln(x)}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$.

(b) $y' - \frac{1}{2x}y = \frac{2 - \ln(x)}{2x}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$.

S5. (a) $y = \left(\frac{x^3}{7} + \frac{x}{3} + \mu\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right)^2$.

(b) $y = \exp(\frac{1}{5}\left(\cos(x^2) + 2\sin(x^2)\right) + \mu e^{-x^2/2})$.

S6. (a) Vrai. (c) Vrai.
(b) Faux. (d) Faux.

S7. $$\begin{cases} x = \frac{\dot{x}_0}{w}\sin(w(t - t_0)) - \frac{\dot{y}_0}{w}\cos(w(t - t_0)) + \frac{\dot{y}_0}{w} + x_0, \\ y = \frac{\dot{x}_0}{w}\cos(w(t - t_0)) + \frac{\dot{y}_0}{w}\sin(w(t - t_o)) - \frac{\dot{x}_0}{w} + y_0, \\ z = \dot{z}_0 t + z_0. \end{cases}$$

PS1.

(a) $f(x) = \exp(\lambda x), \quad \lambda \in \mathbb{R}$, (b) $g(x) = \lambda \ln(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

Questionnaire d'auto-évaluation

1. Ai-je retenu la définition d'une EDOL1 homogène et inhomogène?

2. Suis-je en mesure de résoudre une EDOL1h?

3. Est-ce que j'arrive à calculer une solution particulière?

4. Suis-je à l'aise pour deviner une solution particulière?

5. Puis-je donner un exemple d'une EDO non-linéaire importante en physique?

6. Est-ce que je suis arrivé à montrer les affirmations proposése dans cette série?