Série 10

2.2. Développements limités: corrections

1. Reprendre le polynôme de Taylor des fonctions $\cos(x)$ et $\sin(x)$ autour de $x_0 = 0$ à l'ordre n et calculer le terme de correction pour $P^n_{\cos,0}(x)$ et pour $P^n_{\sin,0}(x)$. Montrer que les fonctions $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont entières.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction n fois continûment dérivable sur un voisinage ouvert $x_0 \in I \subset \mathrm{def}_f$. Supposons de plus que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + (x - x_0)^n \epsilon(x),$$

avec $\lim_{x\to x_0} \epsilon(x) = 0$.

(a) Montrer alors que pour tout $0 \le k \le n$, $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ en observant que

$$0 = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k - (x - x_0)^n \epsilon(x)}{(x - x_0)^k}.$$

(b) Pour $f, g : I \to \mathbb{R}$ suffisamment dérivables, déduire du point précédent $P^n_{f+g,x_0}(x)$ et $P^n_{fg,x_0}(x)$ à partir de $P^n_{f,x_0}(x)$ et de $P^n_{g,x_0}(x)$.

(c) Pour $f, g : I \to \mathbb{R}$ suffisamment dérivables, déduire du point précédent des formules pour $\frac{d^k}{dx^k}(f + g)(x)$ et $\frac{d^k}{dx^k}(fg)(x)$ en fonction des dérivées de f et g.

3. (a) Montrer que $\forall x \in]-1, 1[$, $\frac{1}{1+x^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-x^2)^k$.

(b) Montrer que $\forall x \in]-1, 1[$, $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_0^x (-t^2)^k dt$ (écrire $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-x^2)^k + \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}$).

4. Une suite complexe est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre $z \in \mathbb{C}$ ssi $\lim_{n\to\infty} |u_n - z| = 0$. On pose alors la suite complexe suivante:

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto u_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{(iy)^k}{k!}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Utiliser les développements limités pour montrer que cette suite converge (vers quoi?).

5. Vrai ou faux (donner un contre-exemple si possible)?

(a) Si $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $P^n_{f,x_0}(x)$ et $P^n_{g,x_0}(x)$ existent et sont égaux, alors $\forall x \in \mathrm{def}_f \cap \mathrm{def}_g$, $f(x) = g(x)$.

(b) Si $P(x)$ est un polynôme de degré n, alors $P^n_{P,x_0}(x) = P(x)$.

(c) Si $P^n_{f,x_0}(x)$ et $P^n_{f,0}(x)$ existent, alors $P^n_{f,x_0}(x) = P^n_{f,0}(x - x_0)$.

(d) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est infiniment dérivable sur tout $\mathbb{R}$, alors f est une fonction entière.

6. L'exercice 4 nous livre une définition pour $\exp(iy)$ et y réel.

(a) Comment définir l'exponentielle complexe, i.e $\exp(x+iy)$, si l'on impose la relation $\exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$?

(b) Comment définir alors $\sinh(z)$ et $\cosh(z)$?

(c) Comment définir $\sin(z)$ ou $\cos(z)$?

7. Soient J un voisinage ouvert de $y_0 \in J$, $f : \mathbb{R} \to J$ et $h : J \to \mathbb{R}$, suffisament dérivables et $y_0 = f(x_0)$. Déduire $P^n_{h\circ f,x_0}(x)$ à partir de $P^n_{f,x_0}(x)$ et de $P^n_{h,y_0}(y)$.

Problèmes supplémentaires

On va continuer la preuve du **thórème fondamental de l'algèbre**:

(PS1) Soit le polynôme $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, où $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Montrer que si $R := 1 + 2n\max\{|a_k| \, : \, k = 0, 1, \ldots, n\}$ et si $|z| \geq R$, alors $|P(z)| \geq |z|^n \frac{|a_n|}{2}$.

(PS2) Soit le polynôme $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$. Alors, $|P(z)|$ atteint un minimum pour un certain z_0, i.e.

$$\exists z_0 \in \mathbb{C} \text{ tel que } \forall z \in \mathbb{C}, \, |P(z_0)| \leq |P(z)|.$$

Solutions

S1. $R^n_{\cos,0}(x) = \frac{\cos(\xi + \frac{(n+1)\pi}{2})}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad R^n_{\sin,0}(x) = \frac{\sin(\xi + \frac{(n+1)\pi}{2})}{(n+1)!} x^{n+1},$

S2. (b) $P^n_{f+g,x_0}(x) = P^n_{f,x_0}(x) + P^n_{g,x_0}(x)$,
$P^n_{fg,x_0}(x) = \left[P^n_{f,x_0}(x) P^n_{g,x_0}(x) \right]_n$.

(c) $\frac{d^k}{dx^k}(f+g)(x) = \frac{d^k}{dx^k} f(x) + \frac{d^k}{dx^k} g(x)$,
$\frac{d^k}{dx^k}(fg)(x) = \sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!(k-l)!} \frac{d^l}{dx^l} f(x) \frac{d^{k-l}}{dx^{k-l}} g(x)$.

S4. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(iy)^k}{k!} = \cos(y) + i\sin(y) \quad (= e^{iy})$.

S5. (a) Faux.
(b) Vrai.
(c) Faux.
(d) Faux.

S6. (a) $\exp(x+iy) = \exp(x)\big(\cos(y) + i\sin(y)\big)$.
(b) $\sinh(z) = \frac{1}{2}\big(\exp(z) - \exp(-z)\big), \quad \cosh(z) = \frac{1}{2}\big(\exp(z) + \exp(-z)\big)$.
(c) $\sin(z) := -i\sinh(iz), \quad \cos(z) := \cosh(iz)$.

S7. $P_{h\circ f,x_0,n}(x) = \left[P^n_{h,y_0}\left(P^n_{f,x_0}(x) \right) \right]_n$.

Questionnaire d'auto-évaluation

1. Ai-je retenu les propriétés du terme d'erreur?

2. Suis-je en mesure d'estimer le terme de correction?

3. Est-ce que j'arrive à faire le lien entre les différentes expression du terme de correction?

4. Suis-je à l'aise avec la notation en somme et ses indices?

5. Est-ce que j'arrive à expliquer la formule $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$?