SCM 2025

Romain De Groote

June 5, 2025

Contents

Chapter 1

Nombres et ensembles

1.1 Nombres naturels et ensembles

On admet comme donnés les nombres naturels

$$0, 1, 2, 3, 4, ...$$

Ainsi que les opérations élémentaires

$$+, \times$$

Ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ La collection de ces nombres (naturels) est un ensemble que l'on dénotera par

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

$\mathfrak{N}$

<u>Notation</u>
On écrit

$$n \in \mathbb{N}$$

pour dire que n est élément de $\mathbb{N}$ ou encore n est un nombre naturel.

$\mathfrak{U}$

On peut créer d'autres ensembles à partir d'ensembles $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ donnés.

1. On peut expliciter la collection finie d'objets connus:

$$\begin{aligned} &\mathcal{A} := \{0\}, \{1\}, \{2\}, ... \\ &\mathcal{B} := \{0, 1\}, \{7, 15\}, \{2, 4, 8, ...\} \\ &\varnothing := \{\} && \varnothing \neq \{\varnothing\} \end{aligned}$$

2. Choisir dans un ensemble donné les éléments qui satisfont certaines règles claires.

$$\begin{aligned} &\mathcal{A} := \left\{n \in \mathbb{N} | \exists m \in \mathbb{N} | n = 2m\right\} \\ &\mathcal{B} := \left\{n \in \mathbb{N} | \exists m \in \mathbb{N} | n = 3m\right\} \\ &\mathcal{C} := \left\{n \in \mathbb{N} | n \times n = 0\right\} && = \{0\} \\ &\mathcal{D} := \left\{n \in \mathbb{N} | n \neq n\right\} && = \varnothing \end{aligned}$$

3. Si $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ sont deux ensembles définis, alors on peut construire $\mathcal{E} \cap \mathcal{F}, \mathcal{E} \cup \mathcal{F}, \mathcal{E} \setminus \mathcal{F}$ en posant:

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{E} \cap \mathcal{F} &\Longleftrightarrow x \in \mathcal{E} \wedge x \in \mathcal{F} \\ x \in \mathcal{E} \cup \mathcal{F} &\Longleftrightarrow x \in \mathcal{E} \vee x \in \mathcal{F} \\ x \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{F} &\Longleftrightarrow x \in \mathcal{E} \wedge x \notin \mathcal{F} \end{aligned}$$

4. On dit que $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ si et seulement si

$$\forall x; x \in \mathcal{E} \implies x \in \mathcal{F} \iff \mathcal{E} \cap \mathcal{F} = \mathcal{E}$$

La collection de tous les ensembles de $\mathcal{E}$ forme l'ensemble des parties de $\mathcal{E}$, dénoté $\mathcal{P}(\mathcal{E})$. Autrement dit,

$$\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\mathcal{E}) \iff \mathcal{A} \subset \mathcal{E}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\varnothing) &= \{\varnothing\} \\ \mathcal{P}(\mathfrak{P}(\varnothing)) &= \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \\ \mathcal{P}\Big(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))\Big) &= \Big\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\Big\} \end{aligned}$$

5. Si $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ sont des ensembles données on définit l'ensemble

$$\mathcal{E} \times \mathcal{F} := \big\{(x, y) \,|x \in \mathcal{E} \wedge y \in \mathcal{F}\big\}$$

où (x, y) est un couple ordonné

Rem $\{x, y\} = \{y, x\}$ mais $(x, y) \neq (y, x)$

Couple ordonné

$$(x, y) := \big\{x, \{x, y\}\big\}$$

On admettra les règles suivantes pour les opérations $+$ et $\times$ sur $\mathbb{N}$:

$$n^m := \begin{cases} 1 & m = 0 \\ \underbrace{n \times n \times \ldots \times n}_{m \text{ fois}} & m \neq 0 \end{cases}$$

$$n! := \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n & n \neq 0 \end{cases}$$

On définit sur $\mathbb{N}$ l'existence d'un ordre.

Plus petit que On écrit

$$n < m \iff \exists d \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \,|m = n + d$$

On admet que

1. Ordre total

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \text{ soit } n < m, \text{ soit } n = m, \text{ soit } n > m$$

2. Bon ordre $<$ est un bon ordre, i.e.,

$$\forall \mathcal{E} \subset \mathbb{N}, \mathcal{E} \neq \varnothing \implies \exists n \in \mathcal{E} | \forall x \in \mathcal{E} \setminus \{n\}, x > n$$

3. Successeur de n

$$n \leq l \leq m \implies n = l \vee l = n + 1$$

$m = n + 1$ est le successeur de n

4. Prédécesseur de n

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! m \in \mathbb{N} | n = m + 1$$

5. La relation $<$ est compatible avec $\times$ et $+$, i.e.

   5.1 $\forall n, m, p \in \mathbb{N}, n < m \implies n + p < p + m$

   Preuve

   En effet, si $n < m$, alors
   $$\exists d \in \mathbb{N}^* | n + d = m$$
   mais alors
   $$m + p = (n + d) + p = d + (n + p) > n + p$$
   □

   5.2 $\forall n, m, p \in \mathbb{N}^*, n < m \implies n \times p < m \times p$

   Preuve

   Effet, si $n < m$, alors
   $$\exists d \in \mathbb{N}^* | n + d = m$$
   mais alors
   $$m \times p = (n + d) \times p = n \times p + \underbrace{d \times p}_{>0} > n \times p$$
   □

   5.3 Si $a, b, n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ alors
   $$a \cdot b = n \implies a, b < n$$

   Preuve

   En effet, supposons que $a \geq n$, alors
   $$\exists d \in \mathbb{N} | a = n + d$$
   On sait aussi
   $$\exists c \in \mathbb{N}^* | c + 1 = b$$
   Mais alors
   $$\begin{aligned} a \cdot b =& a\,(c+1) \\ =& \underbrace{ac}_{>0} + a \\ >& a \\ \geq& n \end{aligned}$$
   Il y a donc contradiction.

   □

Théorème

$+$ et $\times$ possède la propriété de simplification.

1. $\forall n, m, p \in \mathbb{N}, n + m = n + p \implies m = p$
2. $\forall n, m, p \in \mathbb{N}^*, n \times m = n \times p \implies m = p$

◇

Preuve

1. On suppose que $m \neq p$, sans perte de généralité, on a alors $m < p$

$$\exists d \in \mathbb{N}^* | m + d = p$$

mais alors

$$\begin{aligned} n + p =& n + (m + d) \\ =& (n + m) + d \\ >& n + m \end{aligned}$$

On a donc une contradiction.

2. On suppose que $m \neq p$, sans perte de généralité, on a alors $m < p$

$$\exists d \in \mathbb{N}^* | m + d = p$$

mais alors

$$\begin{aligned} n \times p =& n \times (m + d) \\ =& n \times m + n \times d \\ >& n \times m \end{aligned}$$

On a donc une contradiction.

$\square$

Corollaire
Si $n + m = p \times q$ et si $n = p \times r$ alors

$$\exists r' \in \mathbb{N} | m = p \times r'$$

$\diamond$

Preuve
$p \cdot r = n \leq n + m = pq$, par le théorème précédant $r \leq q$, i.e.,

$$\exists d \in \mathbb{N} | r + d = q$$

mais alors

$$\begin{aligned} pq =& p\,(r + d) \\ =& pr + pd \\ =& n + m \\ =& pr + m \end{aligned}$$

Par simplification,

$$m = pd$$

$\square$

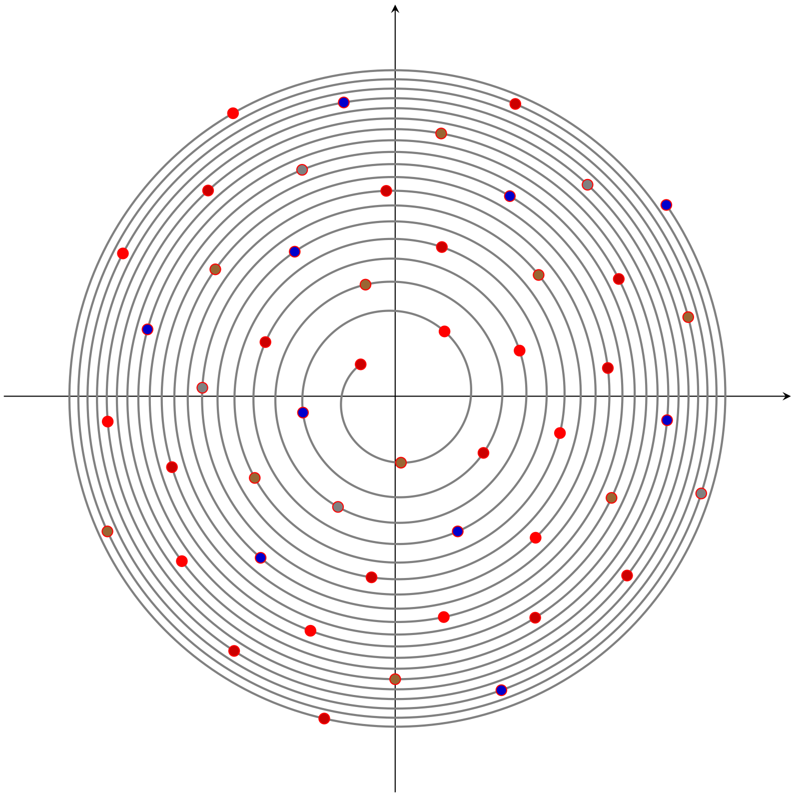
Nombre premier Un nombre $p \in \mathbb{N}$ est dit premier si et seulement si

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, a \cdot b = p \implies a = 1 \veebar b = 1$$

$\mathfrak{R}$

Ex

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ...$$



Théorème
Tout nombre $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ peut se factoriser

$$n = p_1 \cdot p_3 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_k$$

avec

$$p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq ... \leq p_k$$

$\diamond$

Preuve
Supposons par l'absurde qu'il existe des $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ sans factorisation en premiers. Formons la collection de ces nombres. On obtient ainsi un ensemble

$$\mathbb{M} \subseteq \mathbb{N}$$

Par bon ordre sur $\mathbb{N}$, cet ensemble $\mathbb{M}$ possède un élément minimal, disons m. m n'est pas premier, car sinon il serait sa propre factorisation. Donc

$$\exists a, b \in \mathbb{N}^* | a \neq 1 \neq b \wedge m = a \cdot b$$

On a aussi que

$$a, b < m$$

Par minimalité de m, a et b possèdent une factorisation en premiers. Mais alors, m aussi et donc $m \notin \mathbb{M}$. On a donc une contradiction.

$\square$

Théorème fondamental de l'arithmétique
Si $n \in \mathbb{N}_{\geq 2} \implies \exists! p_i \in \mathbb{N}_{\geq 2}, 1 \leq i \leq k, p_i \leq p_{i+1}, 1 \leq i \leq k-1$

$\diamond$

Preuve
Il suffit de montrer l'unicité. Supposons l'existence de nombres $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ avec plusieurs factorisation. Notons leur collection par $\mathbb{M}$. Par le bon ordre, $\mathbb{M}$ possède un élément minimal, disons m. On a donc

$$m = p_1 \cdot ... \cdot p_k = q_1 \cdot ... \cdot q_l$$

avec

$$p_+ \leq ... \leq p_k, q_1 \leq ... \leq q_l$$

des nombres premiers. Sans perte de généralité, si $p_1 = q_1$, alors par simplification, on aurait

$$p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_k = q_2 \cdot q_3 \cdot ... \cdot q_l$$

contredisant alors la minimalité de m. On a donc

$$\{p_1, ..., p_k\} \cap \{q_1, ..., q_l\} = \varnothing$$

Comme $p_1 \neq q_1$, on a soit $p_1 < q_1$, soit $q_1 < p_1$. Sans perte de généralité, on suppose alors $p_1 < q_1$. On a alors

$$q_1 = p_1 + d, d > 0$$

On a donc

$$\begin{aligned} m =& p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot = q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_l \\ =& (p_1 + d) \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_l \\ =& p_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_l + \underbrace{d \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_l}_{<m} \end{aligned}$$

Par le corollaire précédent, $dq_2 \cdot ... \cdot q_l$ est un multiple de p_1. Par minimalité de m, le nombre $d \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_l$ ne possède qu'une unique factorisation en premiers et donc p_1 doit être un facteur de ce nombre. Mais comme $\{p_1\} \cap \{q_2, ..., q_l\} = \varnothing$, p_1 est facteur de d. Mais comme

$$q_1 = p_1 + d$$

on a que q_1 comme multiple de p_1, ce qui est une contradiction comme q_1 est premier. Donc $\mathbb{M}$ n'a pas d'élément minimal, donc de par son bon ordre, pas d'élément tout court.

□

Principe de récurrence
Soit $\left\{\mathcal{A}(n) | n \in \mathbb{N}\right\}$ une famille d'affirmations telles que

1. $\exists n_0 \in \mathbb{N} | \mathcal{A}(n_0)$ est vraie
2. $\forall n \geq n_0$, si $\mathcal{A}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{A}(n+1)$ aussi

Alors $\forall n \geq n_0, \mathcal{A}(n)$ est vraie.

Preuve
Supposons que $\mathcal{A}(n)$ est fausse pour certains $n > n_0$. Formons alors l'ensemble:

$$\mathbb{M} := \left\{n \in \mathbb{N}_{>n_0} | \mathcal{A}(n) \text{ est fausse}\right\}$$

$\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$ et si $\mathbb{M} \neq \varnothing$, il possède un élément minimal, disons m. Puisque $m > n_0$, alors m possède un unique prédécesseur, disons p[1]. Par minimalité de m, $\mathcal{A}(p)$ est vraie. Mais alors $\mathcal{A}(p+1)$ est vraie aussi. Il y a donc une contradiction.

□

[1] $p + 1 = m$

1.2 Nombres entiers

L'objectif est de construire qui permette de résoudre des équations bien définies dans $\mathbb{N}$ telles que

$$x + 1 = 0$$

qui n'a pas de définition dans $\mathbb{N}$. Donc on aimerait construire des nombres "négatifs". L'idée est de considérer un nombre $n \in \mathbb{N}$ comme étant la différence entre a et $a + n$. On va donc considérer des couples

$$(a, b) \in \mathbb{N}^2$$

Équivalence $\sim$ On dit que (a, b) est équivalent à (c, d), et on écrit

$$(a, b) \sim (c, d) \Longleftrightarrow a + d = b + c$$

$\mathfrak{B}$

Théorème
$\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}^2$, i.e.,

1. elle est réflexive
$$\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2, (a, b) \sim (a, b)$$
2. elle est symétrique
$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{N}^2, (a, b) \sim (c, d) \implies (c, d) \sim (a, b)$$
3. elle est transitive
$$\forall (a, b), (c, d), (k, l) \in \mathbb{N}^2, (a, b) \sim (c, d) \wedge (c, d) \sim (k, l) \implies (a, b) \sim (k, l)$$

$\diamond$

Preuve
exo

$\square$

Classe d'équivalence pour $\sim$ Soit $\{a, b) \in \mathbb{N}^2$, la classe d'équivalence de (a, b), pour $\sim$, est donnée par

$$\big[(a, b)\big] := \Big\{(k, l) \in \mathbb{N}^2 |\, (k, l) \sim (a, b)\Big\}$$

$\mathfrak{B}$

Théorème
Si $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N}^2$ et
$$\big[(a, b)\big] = \big[(c, d)\big] \implies (a, b) \sim (c, d)$$
et réciproquement.

$\diamond$

Preuve
Supposons que $(a,b) \sim (c,d)$. Soit $(k,l) \in \big[(a,b)\big]$. Par définition, on a

$$(k,l) \sim (a,b)$$

Puisque $(a,b) \sim (c,d)$ et que $\sim$ est transitive, on a

$$(k,l) \sim (c,d)$$

Donc

$$(k,l) \in \big[(c,d)\big]$$

Soit $(k,l) \in \big[(c,d)\big]$. Par définition,

$$(k,l) \sim (c,d)$$

Par symétrie, $(c,d) \sim (a,b)$ et par transitivité, $(k,l) \sim (a,b)$. Donc,

$$(k,l) \in \big[(a,b)\big]$$

Supposons que $\big[(a,b)\big] = \big[(c,d)\big]$. Par réflexivité,

$$(a,b) \sim (a,b)$$

et donc,

$$(a,b) \in \big[(a,b)\big]$$

et donc

$$(a,b) \in \big[(c,d)\big]$$

Donc

$$(a,b) \sim (c,d)$$

$\square$

Ensemble des entiers $\mathbb{Z}$ L'ensemble des nombres entiers est défini par

$$\mathbb{Z} := \Big\{ \big[(a,b)\big] \mid (a,b) \in \mathbb{N}^2 \Big\}$$

Rem L'ordre total sur $\mathbb{N}$ nous permet d'observer que $(a,b) = (b+d,b) \vee (a,a+d)$. On a donc

$$(a,b) \sim (d,0) \vee (a,b) \sim (0,d)$$

Donc,

$$\big[(a,b)\big] = \big[(d,0)\big] \vee \big[(a,b)\big] = \big[(0,d)\big]$$

. On pose alors

$$\mathbb{Z}_+ := \Big\{ \big[(a,b)\big] \mid \big[(a,b)\big] = \big[(d,0)\big], d \in \mathbb{N} \Big\}$$
$$\mathbb{Z}_- := \Big\{ \big[(a,b)\big] \mid \big[(a,b)\big] = \big[(0,d)\big], d \in \mathbb{N} \Big\}$$

On voit alors que $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_+^* \cup \{0,0\} \cup \mathbb{Z}_-^*$ où cette union est disjointe. Par abus de notation, on écrit $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, en identifiant $\mathbb{N}$ avec $\mathbb{Z}_+$[2]

[2]i.e., $n \in \mathbb{N} \leftrightarrow \big[(n,0)\big] \in \mathbb{Z}_+$

Addition On pose une addition sur $\mathbb{Z}$ par

$$\big[(a,b)\big] + \big[(c,d)\big] := \big[(a+c, b+d)\big]$$

$\mathfrak{N}$

Vérification de la définition
Vérifions que cette définition est bien posée, si

$$(k,l) \sim (a,b) \wedge \left(k', l'\right) \sim (c,d)$$

Preuve

$$\begin{aligned} a + c + l + l' =& b + c + k + l' \\ =& b + d + k + k' \\ \Longrightarrow (a+c, b+d) \sim& \left(k + k', l + l'\right) \end{aligned}$$

□

Théorème
L'opération + fait de $\mathbb{Z}$ un groupe abélien, i.e.,

1. elle est commutative
$$\forall n, m \in \mathbb{Z}, n + m = m + n$$
2. elle est associative
$$\forall n, m, p \in \mathbb{Z}, n + (m + p) = (n + m) + p$$
3. existence d'un élément neutre
$$\forall n \in \mathbb{Z}, n + \big[(0,0)\big] = \big([0,0)\big] + n$$
4. existence d'un opposé
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \exists! n' \in \mathbb{Z} | n + n' = \big[(0,0)\big] = n' + n$$

◇

Preuve

1. exo
2. exo
3. exo
4. exo

□

Notation
Si

$$n + n' = \big[(0,0)\big]$$

On notera

$$n' = -n$$

et on a

$$-\big[(a,b)\big] = \big[(b,a)\big]$$

$\mathfrak{U}$

Soustraction On définit la soustraction comme la somme par la classe opposée

$$\big[(a,b)\big] - \big[(c,d)\big] := \big[(a,b)\big] + \big[(d,c)\big]$$

$\mathfrak{N}$

Multiplication Soient $\big[(a,b)\big], \big[(c,d]\big) \in \mathbb{Z}$. On pose

$$\big[(a,b)\big] \times \big[(c,d)\big] := \big[(ac+bd, ad+bc)\big]$$

$\mathfrak{N}$

Vérifions la consistance de cette définition, si

$$(k,l) \sim (a,b), \left(k', l'\right) \sim (c,d)$$

$$\begin{aligned}
\left(kk' + ll', kl' + k'l\right) &\sim \left(kk' + ll' + ad + bc + al' + bk', kl' + k'l + ad + bc + al' + bk'\right) \\
&\sim \left(kk' + kl' + ad + bc + bl' + bk', kl' + k'l + ad + bc + al' + bk'\right) \\
&\sim \left(lk' + kl' + ad + bc + bl' + ak', kl' + k'l + ad + bc + al' + bk'\right) \\
&\sim \left(lk' + kl' + ac + bc + bl' + al', kl' + k'l + ad + bc + al' + bk'\right) \\
&\sim \left(lk' + kl' + ac + bd + bk' + al', kl' + k'l + ad + bc + al' + bk'\right) \\
&\sim (ac+bd, ad+bc)
\end{aligned}$$

Rem Si $n, m \in \mathbb{Z}$. On a 4 choix possibles

0.1 $n = \big[(d,0)\big], m = \Big[\left(d',0\right)\Big] \implies n \times m \in \mathbb{Z}_+$

0.2 $n = \big[(d,0)\big], m = \Big[\left(0,d'\right)\Big] \implies n \times m \in \mathbb{Z}_-$

0.3 $n = \big[(0,d)\big], m = \Big[\left(d',0\right)\Big] \implies n \times m \in \mathbb{Z}_-$

0.4 $n = \big[(0,d)\big], m = \Big[\left(0,d'\right)\Big] \implies n \times m \in \mathbb{Z}_+$

On observe donc que

$$\begin{aligned}
&\forall n, m \in \mathbb{Z}, \\
&\qquad \implies n \times m \in \mathbb{Z}_+ \iff n, m \in \mathbb{Z}_+ \vee n, m \in \mathbb{Z}_+ \\
&\qquad \implies n \times m \in \mathbb{Z}_- \iff (n \in \mathbb{Z}_+ \wedge m \in \mathbb{Z}_-) \vee (n \in \mathbb{Z}_-, m \in \mathbb{Z}_+)
\end{aligned}$$

Donc

$$\forall n, m \in \mathbb{Z}, n \times m = 0^{3} \iff n = 0 \vee m = 0$$

On dit que $\times$ sur $\mathbb{Z}$ est intègre.

[3] $= \big[(0,0)\big]$

Théorème
L'opération $\times$ fait de $\mathbb{Z}$ un anneau commutatif, i.e.,

1. elle est commutative
$$\forall n, m \in \mathbb{Z}, n \times m = m \times n$$
2. elle est associative
$$\forall n, m, p \in \mathbb{Z}, n \times (m \times p) = (n \times m) \times p$$
3. elle est distributive sur $+$
$$\forall n, m, p \in \mathbb{Z}, m \times (n + p) = m \times n + m \times p$$

De plus, $\mathbb{Z}$ est unitaire, i.e.,
$$\forall m \in \mathbb{Z}, m \times \left[(1,0)\right] = \left[(1,0)\right] \times m = m$$
De plus, $\mathbb{Z}$ est intègre.

$\diamond$

Preuve

1. exo
2. exo
3. exo
4. exo
5. exo

$\square$

Corollaire
$\mathbb{Z}$ possède la propriété de simplification pour $+$ et $\times$, i.e.,

1. $\forall n, m, p \in \mathbb{Z}, m + n = m + p \iff n = p$
2. $\forall m \in \mathbb{Z}^*, \forall n, p \in \mathbb{Z}, m \times n = m \times p \iff n = p$

De plus,
$$m \times (-n) = -(m \times n)$$

$\diamond$

Preuve
Si
$$n = p \implies m + n = m + p$$
est clair. Si
$$\begin{aligned} & m + n = m + p \\ \implies & (-m) + (m + n) = (-m) + (m + p) \\ \implies & (-m + m) + n = (-m + m) + p \\ \implies & 0 + n = 0 + p \\ \implies & n = p \end{aligned}$$

Cela montre également l'unicité de l'opposé $-m$. Donc

$$\begin{aligned}(m \times n) + (-m \times n) =&0\\ =&\big(m + (-m)\big) \times n\\ =&0 \times n\\ =&0\\ (m \times n) + \big((-m) \times n\big) =&\big(m + (-m)\big) \times n\\ =&0 \times n\\ =&0\end{aligned}$$

Par unicité de l'opposé,

$$-(m \times n) = (-m) \times n$$

Si $m \neq 0 \wedge m \times p = m \times n$

$$\begin{aligned}\implies \quad m \times p + -m \times n =&0\\ \implies m \times p + m \times (-n) =&0\\ \implies \quad m \times \big(p + (-n)\big) =&0\end{aligned}$$

par intégrité

$$P = (-n) = 0$$

par unicité de l'opposé,

$$p = n$$

Si $p = n$, alors clairement

$$m \times p = m \times n$$

□

Ordre sur $\mathbb{Z}$ $\forall n.m \in \mathbb{Z}, n > m \iff n - m \in \mathbb{Z}_+^*$

$\mathfrak{D}$

Théorème

$>$ est total, et compatible avec $\times$ et $+$, i.e.,

1. $\forall n, m, p \in \mathbb{Z}, n + m < n + p \iff m < p$
2. $\forall m \in \mathbb{Z}_+^*, \forall p, n \in \mathbb{Z}, m \times n < m \times p \iff n < p$

◇

Preuve

Comme $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_-^* \cup \Big([(0,0)]\Big\} \cup \mathbb{Z}_+^*$ et que cette union est disjointe, alors

$$\begin{aligned}\forall n, m \in \mathbb{Z}, n - m \in \mathbb{Z}_+^*,&\\ &\veebar n - m = \big[(0,0)\big],\\ &\veebar n - m \in \mathbb{Z}_-^*\end{aligned}$$

Donc, soit $n > m$, soit $n = m$, soit $n < m$. Montrons la compatibilité

$$\begin{aligned}
n+m < n+p &\Longleftrightarrow (n+p)-(n+m) \in \mathbb{Z}_+^* \\
&\Longleftrightarrow (n+p)+(-n-m) \in \mathbb{Z}_+^* \\
&\Longleftrightarrow (n+p-n)+(-m) \in \mathbb{Z}_+^* \\
&\Longleftrightarrow p-m \in \mathbb{Z}_+^* \\
&\Longleftrightarrow p > m \\
m \times n < m \times p &\Longleftrightarrow m \times p - m \times n \in \mathbb{Z}_+^* \\
&\Longleftrightarrow m \times p + m \times (-n) \in \mathbb{Z}_+^* \\
&\Longleftrightarrow m \times \big(p+(-n)\big) \in \mathbb{Z}_+^* \\
&\Longleftrightarrow P+(-n) \in \mathbb{Z}_+^* \\
&\Longleftrightarrow p > n
\end{aligned}$$

□

Rem Quand on passe de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}$,

- on a gagné l'existence des opposés
- on a gardé le produit et l'addition
- on a gardé la relation d'ordre
- on a gardé la compatibilité du produit et l'intégrité

Mais, on a perdu le bon ordre.

1.3 Nombres rationnels

L'équation

$$2x + 1 = 0$$

n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

Équivalence $\sim'$ On définit une relation d'équivalence $\sim'$ sur $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ par

$$(a, b) \sim' (c, d) \Longleftrightarrow ad = bc$$

$\mathfrak{R}$

Théorème
$\sim'$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}'$

◇

Preuve
exos

□

Classe d'équivalence pour $\sim'$ On pose

$$\big[(a,b)\big] := (k,l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}' | \, (k,l) \sim' (a,b)$$

<u>Théorème</u>
On a

$$\big[(a,b)\big] = \big[(c,d)\big] \Longleftrightarrow (a,b) \sim' (c,d)$$

$\diamond$

<u>Preuve</u>
exo

$\square$

Ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ L'ensemble des nombres rationnels est défini par

$$\mathbb{Q} := \Big\{ \big[(a,b)\big] \,|\, (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \Big\}$$

Addition

$$\big[(a,b)\big] + \big[(c,d)\big] := \big[(ad+bc, bd)\big]$$

Vérifions la consistance de la définition. Soit $(k,l) \sim' (a,b)$ et $\big(k',l'\big) \sim' (c,d)$
<u>Preuve</u>
On a

$$\big(kl' + k'l, ll'\big) \sim' (ad+bc, bd)$$

car

$$\begin{aligned} \big(kl' + k'l\big)\, bd =& kl'bd + k'lbd \\ =& ll'ad + l'lbc \\ =& \, ll'\,(ad+bc) \end{aligned}$$

$\square$

Multiplication

$$\big[(a,b)\big] \times \big[(c,d)\big] := \big[(ac, bd)\big]$$

Vérifions la consistance de la définition. Soit $(k,l) \sim' (a,b)$ et $\left(k',l'\right) \sim' (c,d)$

Preuve

On a

$$\left(kk',ll'\right) \sim' (ac,bd)$$

car

$$\begin{aligned} kk' &= lk'ad \\ &= ll'ac \end{aligned}$$

□

Théorème

$+$ et $\times$ font de $\mathbb{Q}$ un corps commutatif

1. $+$ fait de $\mathbb{Q}$ un groupe abélien
2. $\times$ fait de $\mathbb{Q}^*$ un groupe abélien
3. $\forall r,s,t \in \mathbb{Q}, r \times (s \times t) = r \times s + r \times t$

⋄

Preuve

exo

□

Ordre On définit un ordre $<$ sur $\mathbb{Q}$ par

$$\forall r,s \in \mathbb{Q}, r < s \Longleftrightarrow s - r \in \mathbb{Q}_+^*$$

où

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_+ &:= \left\{ \left[(a,b)\right] \in \mathbb{Q} | a \times b \in \mathbb{Z}_+ \right\} \\ \mathbb{Q}_- &:= \left\{ \left[(a,b)\right] \in \mathbb{Q} | a \times b \in \mathbb{Z}_- \right\} \end{aligned}$$

$\mathfrak{B}$

On observe que

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_-^* \cup \left\{ \left[(0,1)\right] \right\} \cup \mathbb{Q}_+^*$$

Théorème

$<$ est totale sur $\mathbb{Q}$, et compatible avec $+$ et $\times$

1. $\forall r,s,t, \in \mathbb{Q}, r + s < r + t \Longleftrightarrow s < t$
2. $\forall r \in \mathbb{Q}_+^*, \forall s,t \in \mathbb{Q}, r \times s < r \times t \Longleftrightarrow s < t$

⋄

Rem Quand on passe de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Q}$

- on a gagné $\exists$ solution à $2x+1=0$
- on a conservé $+, \times$, le notion de corps, $>$ total, compatible avec $+, \times$
- il n'y a plus de successeur à $r \in \mathbb{Q}$

Convention
On peut écrire $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ si on identifie $a \in \mathbb{Z}$ à $\left[(a,1)\right] \in \mathbb{Q}$. Du même, si $a \in \mathbb{Z}$ et $n < 0$,

$$a^n := \left(a^{-1}\right)^n = \left[(1,a)\right]^n = \left[(1,a^n)\right]$$

Finalement, par convention

$$\sum_{k\in\varnothing} x_k = 0 \qquad \wedge \qquad \prod_{k\in\varnothing} x_k = 1$$

Théorème fondamental de l'arithmétique, version $\mathbb{Q}$
$\forall r \in \mathbb{Q}_+^*, \exists! \left(\{p_1,...,p_m\}, \{q_1,...,q_n\}\right) \subset \mathbb{P} \wedge \exists! \left(\{a_1,...,a_m\}, \{b_1,...,b_n\}\right) \subset \mathbb{N}^*|$

- $\{p_1,...,p_m\} \cap \{q_1,...,q_n\} = \varnothing$
- $r = \left[\left(p_1^{a_1} \cdot ... \cdot p_m^{a_m}, q_1^{b_n} \cdot ... \cdot q_n^{b_n}\right)\right]$

$\diamond$

Preuve

- Existence si $r \in \mathbb{Q}_+^*$, on a que $r = \left[(a,b)\right], a, b \in \mathbb{Z}^* = \mathbb{N}^*$, par le 1.1, on a

$$\begin{aligned} a =& p_1^{a_1} \cdot ... \cdot p_m^{a_m} \\ b =& q_1^{b_1} \cdot ... \cdot q_n^{b_n} \end{aligned}$$

par la propriété de simplification pour x dans $\mathbb{Z}_+^*$, on peut supposer que a et b n'ont pas de facteurs commun et donc que

$$\{p_1,...,p_m\} \cap \{q_1,...,q_n\} = \varnothing$$

- Unicité Supposons que

$$r = \left[\left(p_1'^{a_1'} \cdot ... \cdot p_m'^{a_m'}, q_1'^{b_1'} \cdot ... \cdot q_n'^{b_n'}\right)\right]$$

$$\begin{aligned} &\implies \left(p_1^{a_1} \cdot ... \cdot p_m^{a_m}, q_1^{b_n} \cdot ... \cdot q_n^{b_n}\right) \sim' \left(p_1'^{a_1'} \cdot ... \cdot p_m'^{a_m'}, q_1'^{b_1'} \cdot ... \cdot q_n'^{b_n'}\right) \\ &\iff p_1^{a_1} \cdot ... \cdot p_m^{a_m} \cdot q_1'^{b_1'} \cdot ... \cdot q_n'^{b_n'} \sim' q_1^{b_n} \cdot ... \cdot q_n^{b_n} \cdot p_1'^{a_1'} \cdot ... \cdot p_m'^{a_m'} \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Par le 1.1, on doit retrouver les mêmes facteurs à gauche et à droite, i.e.,

$$\left\{p_1,...,p_m,q_1',...,q_n'\right\} = \left\{p_1',...,p_m',q_1,...,q_n\right\}$$

On a

$$\{p_1,...,p_m\} = \left\{p_1',...,p_m'\right\} \wedge \left\{q_1',...,q_n'\right\} = \{q_1,...,q_n\}$$

Par le 1.1, à nouveau, on doit avoir

$$\{a_1,...,a_m\} = \left\{a_1',...,a_m'\right\} \wedge \{b_1,...,b_n\} = \left\{b_1',...,b_n'\right\}$$

$\square$

1.4 Nombres réels

Théorème
$\nexists r \in \mathbb{Q} | r^2 = 2$

$\diamond$

Preuve
Supposons que $r \in \mathbb{Q} | r^2 = 2$, sans perte de généralité, $r \in \mathbb{Q}_+^*$, par le 1.3,

$$\begin{aligned} r &= \left[\left(p_1^{a_1} \cdot ... \cdot p_m^{a_m}, q_1^{b_1} \cdot ... \cdot q_n^{b_n}\right)\right] \\ r^2 &= \left[\left(p_1^{2a_1} \cdot ... \cdot p_m^{2a_m}, q_1^{2b_1} \cdot ... \cdot q_n^{2b_n}\right)\right] \\ &= \left[(2, 1)\right] \end{aligned}$$

par unicité d'une telle factorisation,

$$\begin{aligned} \{q_1, ..., q_n\} &= \varnothing \\ \{p_1, ..., p_m\} &= \{2\} \end{aligned}$$

donc $2a_1 = 1$ qui n'a pas de solution dans $\mathbb{N}^*$, il y a donc contradiction.

$\square$

On peut par contre trouver des approximations à un $r \in \mathbb{Q}_+^* | r^2 = 2$:

$$\begin{aligned} & r^2 = 2 \\ \iff \quad & r^2 - 1 = 1 \\ \iff \quad & (r-1)(r+1) = 1 \\ \iff \quad & r - 1 = \frac{1}{1+r} \\ \iff \quad & r = 1 + \frac{1}{1+r} \\ \iff \quad & r = 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1+r}} \\ \iff \quad & r = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\cdots}}}}} \end{aligned}$$

L'idée est de poser

$$r_0 = 1, r_{n+1} := 1 + \frac{1}{1 + r_n}, n \geq 1$$

Calculons

$$\begin{aligned} r_0 &= 1 \\ r_1 &= \frac{3}{2} \\ r_2 &= \frac{7}{5} \\ r_3 &= \frac{17}{12} \\ &\vdots \end{aligned}$$

On peut montrer par récurrence que

- $r_n < r_m \iff r_{n+1} > r_{m+1}$
- $(r_{2n})^2 < (r_{2n+2})^2 < 2 < (r_{2n+3})^2 < (r_{2n+1})^2$

On observe en que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq r_n \leq \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}
|r_{n+1} - r_n| &= \left|1 + \frac{1}{1 - r_n} - 1 - \frac{1}{1 + r_{n-1}}\right| \\
&= \left|\frac{1}{1 + r_n} - \frac{1}{1 + r_{n-1}}\right| \\
&= \left|\frac{r_{n-1} - r_n}{(1 + r_n)(1 + r_{n-1})}\right| \\
&\leq \frac{1}{4}|r_{n-1} - r_n| \\
&\leq \left(\frac{1}{4}\right)^2 |r_{n-2} - r_{n-1}| \\
&\leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |r_1 - r_0| \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n
\end{aligned}$$

Si $n > m$

$$\begin{aligned}
|r_n - r_m| \leq& |r_n - r_{n-1}| + |r_{n-1} - r_{n-2}| + ... + |r_{m+1} - r_m| \\
=& \sum_{k=m}^{n-1} |r_{k+1} - r_k| \\
\leq& \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 \\
\leq& \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k \\
=& \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^m + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \\
=& \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^m
\end{aligned}$$

On peut alors montrer que

$$\lim_{k \to \infty} r_n^2 = 2$$

avec

Convergence Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, on dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $r \in \mathbb{Q}$ si et seulement si

$$\forall \epsilon \in \mathbb{Q}_+^*, \exists N_\varepsilon | \forall n \geq N_\varepsilon, |x_n - r| < \varepsilon$$

et on écrit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = r$

$\mathfrak{k}$

Cauchy On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si et seulement si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*, \exists N_\varepsilon | n, m \geq N_\varepsilon \implies |x_n - x_m| < \varepsilon$$

$\mathfrak{k}$

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ de Cauchy,

1. $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy
2. $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy

Preuve

1. exo
2. exo

$\square$

Si on considère,

$$r_0 = 1, r_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+r_n}, n \geq 0 \implies (r_n)^2 \xrightarrow{n\to\infty} 2 \wedge \left(r_n + \frac{1}{n+1}\right)^2 \xrightarrow{n\to\infty} 2$$

Équivalence $\sim''$ Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ deux suites de Cauchy, on dit que

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim'' (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$$

$\mathfrak{D}$

Théorème

$\sim''$ est une relation d'équivalence sur les suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.

$\diamond$

Preuve

exo

$\square$

Classe d'équivalence sur $\mathbb{R}$ [4] Un nombre réel est une classe d'équivalence

$$\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right]_{\sim''} := \left\{(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim'' (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\}$$

où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. La collection de ces classes est $\mathbb{R}$

$\mathfrak{D}$

Rem 1. On identifie $r \in \mathbb{Q}$ à la suite $\left[(r)_{n\in\mathbb{N}}\right]$. Dans ce sens, on peut dire que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Rem 2. Si $r_0 = 1, r_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+r_n}, n \geq 0$, on a vu que

$$\lim_{n\to\infty} r_n^2 = 2$$

On a donc $\left[(r_n^2)_{n\in\mathbb{N}}\right] = \left[(2)_{n\in\mathbb{N}}\right] = 2_{\mathbb{R}}$

[4] Nombre Réel

Addition Soient $\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right], \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \in \mathbb{R}$. On pose

$$\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] + \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] := \left[(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right]$$

Vérifions que si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim'' (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim'' (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\implies (w_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim' (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Preuve
exo

□

Multiplication Soient $\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right], \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \in \mathbb{R}$. On pose

$$\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \cdot \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] := \left[(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right]$$

Vérifions que si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim'' (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim'' (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\implies (w_n \cdot v_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim'' (x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Preuve
exo

□

Théorème
$\mathbb{R}$, muni de $+$ et de $\times$ forme un corps commutatif, i.e.,

1. $\mathbb{R}$, muni de $+$ est un groupe commutatif
2. $\mathbb{R}^*$, muni de $\times$ est un groupe commutatif
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

◇

Preuve
exo

□

<u>**Rem 1**</u>. Considérons la suite

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= \frac{9}{10} \\ x_2 &= \frac{99}{100} \\ x_3 &= \frac{999}{1000} \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{10^n - 1}{10^n} \end{aligned}$$

On observe que

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - 1) = \lim_{n\to\infty}\frac{-1}{10^n} = 0$$

Donc

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim'' (1)_{n\in\mathbb{N}}$$

Donc

$$\left[(0.\overline{9})_{n\in\mathbb{N}}\right] = \left[(1)_{n\in\mathbb{N}}\right] = 1_{\mathbb{R}}$$

Similairement

$$\frac{1}{2} = 0.5 = 0.4\overline{9}$$

<u>**Rem 2**</u>. il nous faut encore une relation d'ordre $<$ sur $\mathbb{R}$.
<u>1er essai</u>

$$\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] < \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \iff \forall n \in \mathbb{N}, x_n > y_n$$

Mais ce n'est pas une bonne définition, car

$$\left[(1)_{n\in\mathbb{N}}\right] = \left[\left(\frac{10^n - 1}{10^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right]$$

mais

$$1 > \frac{10^n - 1}{10^n}$$

<u>2e essai</u>
$\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] > \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right]$, on veut aussi que

$$\begin{aligned} &\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \neq \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \\ \iff &(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \not\sim'' (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ \iff &\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0 \text{ faux} \\ \iff &\neg\left(\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*, \exists N_\varepsilon | n \geq N_\varepsilon \implies |x_n - y_n| < \varepsilon\right) \\ \iff &\exists \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^* | \neg\left(\exists N_\varepsilon | n \geq N_\varepsilon \implies |x_n - y_n| < \varepsilon\right) \\ \iff &\exists \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^* | \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \wedge |x_n - y_n| < \varepsilon \end{aligned}$$

Ordre sur $\mathbb{R}$ Soient $\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right], \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \in \mathbb{R}$, alors on pose

$$\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] > \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \iff \exists d \in \mathbb{Q}_+^*, \exists N \in \mathbb{N} | n \geq N \implies x_n \geq y_n + d$$

$\mathfrak{R}$

Il faut vérifier que $>$ est bien posée sur les classes, i.e., il faut montrer que cette relation d'équivalence est indépendante du représentant.

Preuve

exo

$\square$

Théorème

$>$ ordonne $\mathbb{R}$ totalement.

$\diamond$

Preuve

Soient $\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right], \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \in \mathbb{R}$ distinctes. Montrons alors que

$$\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] > \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \veebar \left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] < \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right]$$

Puisque ces deux classe sont distinctes,

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \not\sim'' (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) \neq 0$$

$$\exists \mathbb{Q}_+^* | \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N | \, |y_n - x_n| \geq \varepsilon$$

Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy,

$$\exists N_{\frac{\varepsilon}{3}}, \exists N'_{\frac{\varepsilon}{3}}, n, m \geq N_{\frac{\varepsilon}{3}} \wedge n, m \geq N'_{\frac{\varepsilon}{3}} \implies |x_n - x_m| \leq \frac{\varepsilon}{3} \wedge |y_n - y_m| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Posons

$$N_\varepsilon := \max\left\{N_{\frac{\varepsilon}{3}}, N_{\frac{\varepsilon}{3}}\right\}$$

On sait

$$\exists n' \geq N_\varepsilon | \, |x_{n'} - y_{n'}| \geq \varepsilon$$

Donc, on a

$$x_{n'} \geq y_{n'} + \varepsilon \wedge |x_n - x_{n'}| < \frac{\varepsilon}{3} \wedge |y_n - y_{n'}| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Donc,

$$x_n \geq y_n + \frac{\varepsilon}{3}$$

soit

$$y_{n'} \geq x_{n'} + \varepsilon \wedge |x_n - x_{n'}| < \frac{\varepsilon}{3} \wedge |y_n - y_{n'}| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Donc,

$$y_n \geq x_n + \frac{\varepsilon}{3}, \forall n \geq N_\varepsilon$$

$\square$

Théorème

$>$ est transitive sur $\mathbb{R}$. De plus, on a comptabilité avec l'addition et la multiplication, i.e.,

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x > y \iff x + z > y + z$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0 \implies x \cdot y > 0$

$\diamond$

Preuve
exo

$\square$

Rem Tout corps est intègre. On peut d'ailleurs montrer que dans un corps $\mathbb{K}$,

$$0 \times x = 0, \forall x \in \mathbb{K}$$

En effet,

$$\begin{aligned} 0 \times x =& x < \\ =& 0 \times x + (x - x) \\ =& (0 \times x + x) + (-x) = (0 \times x + 1 \times x) + (-x) \\ =& (0 + 1) \times x + (-x) \\ =& 1 \times x + (-x) \\ =& x + (-x) \\ =& 0 \end{aligned}$$

De manière similaire, on a $(-x) \times y = -(x \times y)$

$$x \cdot y = 0 \iff x = 0 \vee y = 0$$

$$x \cdot y > 0 \iff x, y > 0 \vee x, y < 0$$

1.5 Existence des bornes supérieures et inférieures et ses conséquences

Majorant Soit $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}, \mathcal{E} \neq \varnothing$. Un majorant de $\mathcal{E}$ est un

$$x \in \mathbb{R} | \forall y \in \mathcal{E}, x \geq y$$

Minorant Soit $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}, \mathcal{E} \neq \varnothing$. Un minorant de $\mathcal{E}$ est un

$$x \in \mathbb{R} | \forall y \in \mathcal{E}, x \leq y$$

Borne supérieure La borne supérieure de $\mathcal{E}$[5], est

$$\sup(\mathcal{E}) := \min\left\{y \in \mathbb{R} | y \text{ majore } \mathcal{E}\right\}$$

[5] Si elle existe.

𝔎

Borne inférieure La borne inférieure de $\mathcal{E}$[6], est

$$\inf(\mathcal{E}) := \max\left\{y \in \mathbb{R} | y \text{ minore } \mathcal{E}\right\}$$

𝔎

Théorème de la borne supérieure
Soit $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}, \mathcal{E} \neq \varnothing$ et majoré. Alors

$$\exists s \in \mathbb{R} | s = \sup(\mathcal{E})$$

◇

Preuve
On peut, sans perte de généralité, que $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}_+$[7]. Puisque $\mathcal{E}$ est majorée, on peut poser

$$M_0 := \left\{n \in \mathbb{N} | n \text{ majore } \mathcal{E}\right\}$$

et $M_0 \neq \varnothing$. On pose $s_0 = \min(M_0)$, pour $n \geq 1$, on pose

$$\mathcal{E}_n := \left\{2^n x | x \in \mathcal{E}\right\}$$

$\mathcal{E}_n$ est majoré, puisque $\mathcal{E}_n$. On pose

$$M_n := \left\{n \in \mathbb{N} | n \text{ majore } \mathcal{E}_n\right\}$$

On a

$$\varnothing \neq M_n \subset \mathbb{N}$$

Donc $\exists m \in \mathbb{R} | s = \min(M_n)$ et on pose

$$s_n := 2^{-n} \min(M_n)$$

On obtient ainsi une suite décroissante $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. De plus,

$$\begin{aligned}
2\mathcal{E}_n &= \mathcal{E}_{n+1} \\
\Longrightarrow \quad 2M_n &\subset M_{n+1} \\
\Longrightarrow \quad \min(2M_n) &\geq \min(M_{n+1}) \\
\Longrightarrow 2^{-n} \min(M_n) &\geq 2^{-n-1} \min(M_{n+1}) \\
\Longrightarrow \quad s_n &\geq s_{n+1} > s_n - \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

car$2^n\left(s_n - \frac{1}{2^n}\right) = 2^n s_n - 1 = \min(M_n) - 1$ qui ne majore plus $\mathcal{E}_n$. Donc $s_n - \frac{1}{2^n}$ ne majore plus $\mathcal{E}$.
$(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, car, si $n > m$,

$$\begin{aligned}
|s_n - s_m| &\leq \sum_{k=m}^{n-1} |s_{k+1} - s_k| \\
&\leq \sum_{k=m}^{\infty} |s_{k+1} - s_k| \\
&\leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\
&\leq \frac{1}{2^m} \sum_{k \geq 0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\
&= 2^{1-m}
\end{aligned}$$

Donc, $\left[(s_n)_{n \in \mathbb{N}}\right] \in \mathbb{R}$

[6] Si elle existe.
[7] Ceci est dû à la comptabilité de $>$ avec $+$.

1. $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ majore tout $x \in \mathcal{E}$. Clair, puisque par construction,
$$s_n \geq x, \forall x \in \mathcal{E}, \forall n \in \mathbb{N}$$
2. Si $\left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] < \left[(s_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \implies \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right]$ ne majore plus $\mathcal{E}$. Car si
$$\exists d \in \mathbb{Q}_+^* \wedge N \in \mathbb{N} | n \geq N \implies y_n + d \leq s_n$$
Il doit exister $k \in \mathbb{N} | d > 2^{-k}$
$$\begin{aligned} \implies \quad & n \geq \max\{N, K\} \\ \implies y_n + 2^{-k} & \leq s_n \\ \implies y_n + 2^{-n} & \leq s_n \\ \implies \quad y_n & \leq s_n - 2^{-n} \end{aligned}$$
Donc y_n ne majore plus du tout $x \in \mathcal{E}$. Donc
$$\left[(s_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] = \sup(\mathcal{E})$$

□

Rem De façon analogue, si $\mathcal{E}$ est minorée, alors $\inf(\mathcal{E}) \in \mathbb{R}$

Suite réelle Une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une fonction $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{R}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ si et seulement si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon | n \geq N_\varepsilon \implies |l - x_n| < \varepsilon$$

𝕭

Théorème de la convergence monotone

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ croissante et majorée[8], alors
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$$

◇

Preuve

Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ est majoré aussi et possède donc une borne supérieure. Soit $\varepsilon > 0$, on a que
$$\sup\{x_n | n \in \mathbb{N}\} - \varepsilon$$
ne majore plus $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$, donc
$$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} | x_{N_\varepsilon} > \sup\{x_n | n \in \mathbb{N}\} - \varepsilon$$
Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a que
$$\forall n \geq N_\varepsilon \implies \sup\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \geq x_n > \sup\{x_n | n \in \mathbb{N}\} - \varepsilon$$
Donc,
$$\varepsilon > x_n - \sup\{x_n | n \in \mathbb{N}\} > -\varepsilon$$
On a donc bien
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon | n \geq N_\varepsilon \implies \left| x_n - \sup\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \right| < \varepsilon$$

[8] Le raisonnement est également valable pour des suites décroissantes et minorées

□

Lemme
$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$,

$$a < b \iff 0 \leq (b-a)\, na^{n-1} < b^n - a^n < (b-a)\, nb^{n-1}$$

◇

Preuve
On a que

$$b^n - a^n = (b-a)\left(b^{n-1} + ab^{n-2} + ... + a^{n-2}b + a^{n-1}\right)$$

$\implies$ si $0 \leq a < b$, alors $0 \leq a^2 \leq ab$ et $a^{n-1} \leq a^k b^{n-1-k} < b^{n-1}$

$$0 \leq (b-a)\, na^{n-1} < b^n - a^n < (b-a)\, nb^{n-1}$$

$\impliedby$ on a, en particulier,

$$(b-a)\, nb^{n-1} > 0$$

on a par intégrité,

$$(b-a)\, , nb^{n-1} > 0$$

Donc

$$b > a$$

□

Théorème de la méthode Newton
Soient $y \geq 0, y \neq 1, n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. On pose

$$x_0 := \max\{1, y\}$$
$$x_{k+1} := x_k - \frac{x_k^n - y}{nx_k^{n-1}}$$

Alors

$$\lim_{k \to \infty} x_k = r \in \mathbb{R}, r^n = y$$

◇

Preuve
On observe que $0 < x_0$ et $(x_0)^n > y$. On peut observer que si $x_k > 0$ et $(x_k)^n > y$, alors

$$0 < x_{k+1} < x_k$$

De plus,

$$y - (x_{k+1})^n = y - x_k^n + x_k^n - (x_k + 1)^n \qquad x_{k+1} - x_k = -\frac{x_k^n - y}{nx_k^n - 1} = -h$$

$$\begin{aligned} &= y - x_k^n + \left(x_{k+1}^n + h\right)^n - (x_{k+1} + h)^n \\ &< y - x_k^n + nhx_k^{n-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On peut donc conclure par récurrence que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée[9]. Donc

$$\lim_{k\to\infty} x_k = r \in \mathbb{R}$$

par le théorème de la convergence monotone. On peut montrer que

$$\lim_{n\to\infty} x_k^n = r^n = y$$

□

Théorème de la complétude de $\mathbb{R}$
Toute suite de Cauchy converge dans $\mathbb{R}$.

◇

Preuve
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy à valeurs réelles. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée. Posons pour un $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{U}_n = \sup\left\{x_m | m \geq n\right\}$$

$(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée[10]. donc

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{U}_n = L \in \mathbb{R}$$

Soit

$$\varepsilon > 0, \exists N_{\frac{\varepsilon}{3}} | n, m \geq N_{\frac{\varepsilon}{3}} \implies |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\exists N'_{\frac{\varepsilon}{3}} | n \geq N'_{\frac{\varepsilon}{3}} \implies |\mathcal{U}_n - L| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Pour

$$n \geq \max\left\{N_{\frac{\varepsilon}{3}}, N'_{\frac{\varepsilon}{3}}\right\}, x_n \leq \mathcal{U}_n \leq x_n + \frac{\varepsilon}{3}$$

Donc, si $N_\varepsilon = \max\left\{N_{\frac{\varepsilon}{3}}, N'_{\frac{\varepsilon}{3}}\right\}$ et si $n \geq N_\varepsilon$

$$\begin{aligned}|x_n - L| &= |x_n - x_{N_\varepsilon} + x_{N_\varepsilon} - \mathcal{U}_{N_\varepsilon} + \mathcal{U}_{N_\varepsilon} - L| \\ &\leq |x_n - x_{N_\varepsilon}| + |x_{N_\varepsilon} - \mathcal{U}_{N_\varepsilon}| + |\mathcal{U}_{N_\varepsilon} - L| \\ &< 3\frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

□

Un intervalle Un intervalle $\mathcal{I}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R} | \forall x, y \in \mathbb{R}, x, y \in \mathcal{I} \implies [x, y] \subset \mathcal{I}$

- Un intervalle est dit bornée s'il est du type

$$[a, b], [a, b), (a, b], (a, b)$$

- Un ensemble $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}$ est dit ouvert si et seulement si

$$\forall x \in \mathcal{E}, \exists \delta > 0 | (x - \delta, x + \delta) \subset \mathcal{E}$$

- Un ensemble $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}$ est dit fermé si et seulement si $\mathbb{R} \setminus \mathcal{E}$ est ouvert.

$\mathfrak{R}$

[9] Par exemple par 0
[10] Car x_n est minorée

1.6 Nombres complexes

On remarque que dans $\mathbb{R}$,

$$\nexists x \in \mathbb{R} | x^2 = -1$$

Dans $M_2(\mathbb{R})$,

$$\exists m \in M_2(\mathbb{R}) | m^2 = -\mathbb{1}_2$$

Par exemple, on prend

$$\mathfrak{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose alors la définition suivante:

Complexe On définit $\mathbb{C}$, soit l'ensemble des nombres complexes, comme

$$\mathbb{C} := \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} | x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

avec $+$ et $\times$ données par les opérations sur les matrices. Si $z \in \mathbb{C}$, on a

$$z = \mathbb{1}_2 x + \mathfrak{i} y$$

On dit que $x = \Re(z)$ est la partie réelle et $y = \Im(z)$ est la partie imaginaire.

$\mathfrak{B}$

Puisque $M_2(\mathbb{R})$ est un groupe abélien pour $\times$, $\mathbb{C}$, muni de $+$ l'est aussi. Si $z = \mathbb{1}_2 x + \mathfrak{i} y$ et $z' = \mathbb{1}_2 x' + \mathfrak{i} y'$, alors

$$\begin{aligned} zz' &= (\mathbb{1}_2 x + \mathfrak{i} y)(\mathbb{1}_2 x' + \mathfrak{i} y') \\ &= \mathbb{1}_2 (xx' - yy') + \mathfrak{i}(yx' + xy') \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

On vérifie donc que $\times$ est une opération interne à $\mathbb{C}$, est associative et distributive. Si $z \in \mathbb{C}^*, z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R}^*$. Calculons son det

$$\det(z) = x^2 + y^2$$

Donc

$$z \neq \mathbb{0}_2 \iff \det(z) \neq 0 \iff \exists z^{-1} \in M_2(\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} \iff z^{-1} &= \frac{1}{\det(z)} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det(z)} (\mathbb{1}_2 x - \mathfrak{i} y) \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Module Si $z = \mathbb{1}_2 x + \mathfrak{i} y$, on pose le module de z

$$|z| := \left(\det(z)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\mathfrak{B}$

Conjugué Si $z = \mathbb{1}_2 x + \mathfrak{i} y$, on pose le conjugué de z

$$\overline{z} := z^t$$

$\mathfrak{B}$

Rem 1. Stricto senso, $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{C}$, mais si on identifie $x \in \mathbb{R}$ à $\mathbb{1}_2 x \in \mathbb{C}$, alors $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Rem 2. Puisque $\mathbb{1}_2 = 1_{\mathbb{C}}$, on a que
$$z = \mathbb{1}_2 x + \mathrm{i}y = 1_{\mathbb{C}} x + \mathrm{i}y$$
et on écrit
$$z = x + \mathrm{i}y$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, posons
$$\mathrm{CIS}(\alpha) := \cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{CIS}(\alpha)\,\mathrm{CIS}(\beta) &= ... \\
&= \mathrm{CIS}(\alpha+\beta) \\
\mathrm{CIS}(n\alpha) &= \mathrm{CIS}(\alpha)^n \\
z^{10} &= 1 \\
&= \cos(0) + \mathrm{i}\sin(0) \\
&= \mathrm{CIS}(0) \\
&= \mathrm{CIS}(2\pi) \\
&= \mathrm{CIS}(4\pi) \\
&= \mathrm{CIS}(6\pi) \\
\Longrightarrow \qquad z &= \mathrm{CIS}\left(\frac{2\pi}{10}\right), \mathrm{CIS}\left(\frac{4\pi}{10}\right), \mathrm{CIS}\left(\frac{6\pi}{10}\right), \mathrm{CIS}\left(\frac{8\pi}{10}\right), \mathrm{CIS}\left(\frac{10\pi}{10}\right), \mathrm{CIS}\left(\frac{12\pi}{10}\right), \mathrm{CIS}\left(\frac{14\pi}{10}\right), \mathrm{CIS}\left(\frac{16\pi}{10}\right), \mathrm{CIS}
\end{aligned}$$

Ex Calcul de $z | z^2 = -8 - 6\mathrm{i}$. Posons $z = a + \mathrm{i}b, a, b \in \mathbb{R}$. On veut

$$\begin{aligned}
(a+\mathrm{i}b)^2 &= -8 - 6\mathrm{i} \\
&= a^2 - b^2 + \mathrm{i}2ab \\
\Longleftrightarrow \quad & \begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ -3 = ab \end{cases} \\
\Longleftrightarrow \quad & \begin{cases} a^2 - \frac{9}{a^2} = -8 \\ b = -\frac{9}{a} \end{cases} \\
\Longleftrightarrow \quad & \begin{cases} a^4 + 8a^2 - 0 = \quad 0 = \left(a^2+9\right)\left(a^2-1\right) \\ b = -\frac{3}{a} \end{cases} \\
\Longleftrightarrow \quad & \begin{cases} a = \pm 1 \\ b \mp 3 \end{cases} \\
\Longrightarrow \quad & z = (1 - 3\mathrm{i}), (-1 + 3\mathrm{i})
\end{aligned}$$

Dans notre construction, $z \in M_2(\mathbb{R})$. On a donc une action de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}^2$: si $z = (a + \mathrm{i}b)$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors
$$z\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$
On sait que
$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$$
mais
$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{R}^2 = 1$$

Par exemple, $(1,0)=e_1$ est une base pour $\mathbb{R}^2$, vu comme un espace vectoriel complexe. Si $z=ab\mathfrak{i}$,

$$(a+\mathfrak{i}b)\overrightarrow{e}_1=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=ae_1+be_2$$

où $e_2=(0,1)$ c'est la représentation de Gauss de $\mathbb{C}$.

Théorème fondamental de l'algèbre

Si $P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+...+a_nz^n$ est un polynôme à coefficients $a_0,a_1,...,a_n\in\mathbb{C}$ complexes, et si $n\geq 1$, alors $P(z)=0$ possède au moins une solution dans $\mathbb{C}$. On dit que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

$\diamond$

Rem Dans $\mathbb{C}$, il n'existe pas de relation d'ordre total et compatible avec $+$ et $\times$. En effet, supposons que $<$ est une telle relation d'ordre. On a alors soit $\mathfrak{i}>0_{\mathbb{C}}\veebar-\mathfrak{i}>0_{\mathbb{C}}$. Mais alors, on aurait $(\mathfrak{i})^2>0_{\mathbb{C}}$, donc

$$-1>0_{\mathbb{C}}$$

on aurait alors

$$\mathfrak{i}>0_{\mathbb{C}}\implies-\mathfrak{i}>0_{\mathbb{C}}\implies\mathfrak{i}>0_{\mathbb{C}}\implies0_{\mathbb{C}}>0_{\mathbb{C}}※$$

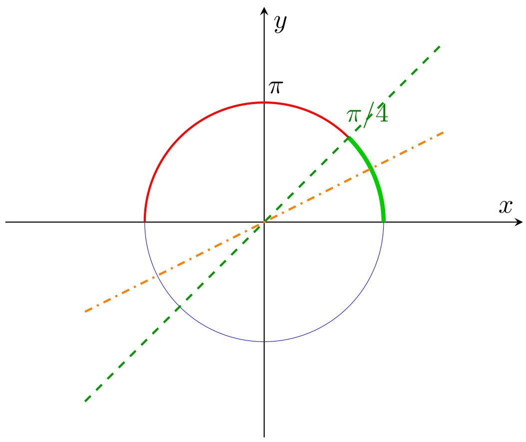
Chapter 2

Outils d'analyse

On va utiliser tous les résultats de Analyse B (pour lesquels les notes ne sont pas fournies).

2.1 Polynômes de Taylor

Essayons de calculer la valeur de π. Géométriquement, π est le demi-périmètre d'un cercle de rayon 1:



Paramétrisons un point P sur le $\Gamma(0,1)$. Chaque point $P(x,y) \in \Gamma(0,1)$ est l'intersection de $\Gamma(0,1)$ avec $y = tx$ et $t \in [0,1]$. On sait que[11]

$$x^2 + y^2 = 1$$

Aussi

$$\frac{y}{x} = t$$

Donc

$$\frac{y^2}{x^2} = t^2$$

et

$$y^2 = t^2 x^2$$

Ainsi

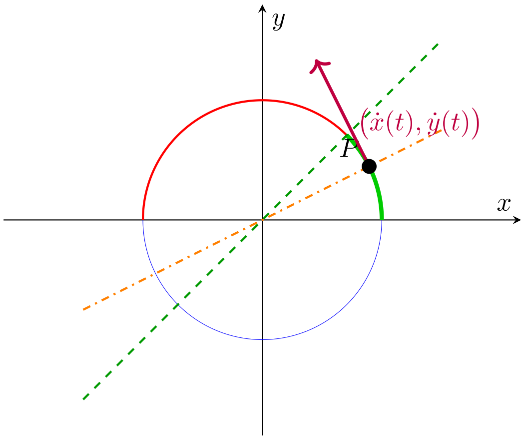
$$\begin{aligned} x^2 + t^2 x^2 &= 1 \\ \Longleftrightarrow x^2\left(1+t^2\right) &= 1 \\ \Longleftrightarrow \qquad x^2 &= \frac{1}{1+t^2} \end{aligned}$$

Puisque $P(x,y)$ est dans le premier cadran, $x \geq 0$ et ainsi

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+t}}, y = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

[11]Pythagore

$$
\begin{aligned}
\dot{x} =& -\frac{t}{(1+t)^{\frac{3}{2}}} \\
\dot{y} =& \frac{1}{\sqrt{1+t}} - \frac{t^2}{(1+t)^{\frac{3}{2}}} \\
=& \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \\
=& \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$



La longueur de $\big(\dot{x}(t), \dot{y}(t)\big)$ est égale à

$$
\sqrt{\frac{t^2}{(1+t^2)^3} + \frac{1}{(1+t^2)^3}} = \frac{1}{1+t^2}
$$

Un accroissement d'arc de $P\,\big(x(t), y(t)\big)$ est donc

$$
\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}
$$

On obtient alors que

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-(-t^2)} \\
&= \int_0^1 \Big(1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - ...\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \Big(-t^2\Big)^n \mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^1 \Big(-t^2\Big)^n \mathrm{d}t \\
\implies \frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + ...
\end{aligned}
$$

Mais a-t-on le droit d'échanger une $\sum$ infinie et l'intégrale ? Étudions un peu $\frac{1}{1-r}, |r| < 1$. Si

$$
1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + r^7 + r^8 + r^9 + r^{10} = \sum_{k=0}^{10} r^k
$$

On a

$$\begin{aligned}(1-r)\sum_{k=0}^{10} r^k &= \sum_{k=0}^{10} r^k - \sum_{k=0}^{10} r^{k+1}\\ &= 1-r^{11}\\ \Longrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{10} r^k &= \frac{1-r^{11}}{1-r}\\ \sum_{k=0}^{n} r^k &= \frac{1-r^{n+1}}{1-r}\\ &= \frac{1}{1-r} - \frac{r^{n+1}}{1-r}\end{aligned}$$

et ainsi

$$\frac{1}{1-r} = \sum_{k=0}^{n} r^k + \underbrace{\frac{r^{n+1}}{1-r}}_{\to 0, |r|<1}$$

Si on remplace r par $\left(-t^2\right)$

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-(-t^2)}\\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n}\left(-t^2\right)^k + \frac{\left(-t^2\right)^{n+1}}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 \left(-t^2\right)^k \mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{\left(-t^2\right)^{n+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \sum_{0\le 2k+1\le 2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1} + \int_0^1 \frac{\left(-t^2\right)^{n+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \frac{\left(-t^2\right)^{n+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| &\le \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\ &\le \int_0^1 t^{2n+2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2n+3} \xrightarrow{n\to\infty} 0\end{aligned}$$

On a écrit

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n}\left(-t^2\right)^n + \frac{\left(-t^2\right)^{n+1}}{1+t^2}$$

On l'appelle le développement limité de $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$, où $\sum_{k=0}^{n}\left(-t^2\right)$ est le polynôme de Taylor et où $\frac{\left(-t^2\right)^{n+1}}{1+t^2}$ est le terme de correction.

S oit $f\colon \mathcal{I}\to\mathbb{R}$ un fonction n fois dérivable en $x_0\in\mathcal{D}_f$. Le polynôme de Taylor de $f(x)$, autour de x_0, à l'ordre n est donné par

$$P_{f,x_0,n}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\left(x-x_0\right)^k$$

$\mathfrak{V}$

Théorème
Soit $f\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}$, une fonction n fois dérivable en $x_0 \in \mathcal{D}_f$, alors

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_{f,x_0,n}(x)}{(x-x_0)^k} = 0, \forall k = 0,1,...,n$$

◇

Preuve
Fixons $k = \{0,n\} \cap \mathbb{N}$. Si $k=0$, par convention, $(x-x_0)^k = 1$. On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x) - P_{f,x_0,n}(x) =& \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right)\\ =& \lim_{x\to x_0} - \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} - 1\\ =& f(x_0) - f(x_0)\\ =& 0\end{aligned}$$

Si $k \neq 0$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \sum_{l=0}^{n} \frac{f^{(l)}(x_0)}{l!}(x-x_0)^l}{(x-x_0)^k} \underset{\text{BH}}{=} & \lim_{x\to x_0} \frac{f(1)(x) - \sum_{l=1}^{n} \frac{f^{(l)}(x_0)}{l!} l (x-x_0)^{l-1}}{l(x-x_0)^{k-1}}\\ \underset{\text{BH}}{=} & ...\\ \overset{k \text{ fois}}{\underset{\text{BH}}{=}} & \frac{f^{(k)}(x) - \sum_{l=k}^{n} \frac{f^{(l)}(x_0)}{l!} l\cdot(l-1)\cdot ...\cdot(l-k+1)(x-x_0)^{l-k}}{k!(x-x_0)^0}\\ =& \frac{f^{(k)}(x_0) - \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} k\cdot(k-1)\cdot...\cdot(1)\cdot(x-x_0)^0}{k!}\\ =& \frac{f^{(k)}(x_0) - f^{(k)}(x_0)}{k!}\\ =& 0\end{aligned}$$

□

On pose pour une fonction f suffisamment dérivable en x_0

$$f(x) = P_{f,x_0,n}(x) + (x-x_0)^n \varepsilon(x), \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Théorème
Si f est une fonction n fois continûment dérivable en x_0 et si

$$f(x) = P(x) + (x-x_0)^n \varepsilon(x)$$

avec $P(x)$ un polynôme de degré n et

$$\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

alors

$$P(x) = P_{f,x_0,n}(x)$$

◇

Preuve
Calculer

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P(x) - (x-x_0)^n \varepsilon(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

On peut en conclure que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

En appliquant la s (pour lesquels les notes ne sont pas fournies)uffisamment de fois, on conclut que

$$P(x) = P_{f,x_0,n}(x)$$

$\square$

Ex 1. $f(x) = \frac{1}{1-x}, x_0 = 0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} x^n + \underbrace{\frac{x^{N+1}}{1-x}}_{x^N \frac{x}{1-x}}$$

En posant

$$\varepsilon(x) = \frac{x}{1-x}, \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Donc

$$P_{\frac{1}{1-x},0,N}(x) = \sum_{n=0}^{N} x^n$$

Ex 2. $f(x) = \ln(x), f'(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{1-(1-x)}$. On prend $x_0 = 1$, si $x \in (0,2)$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x} \\
&= \sum_{n=0}^{N} (1-x)^n + \frac{(1-x)^{N+1}}{x} \\
P_{\frac{1}{x},1,N}(x) &= \sum_{n=0}^{N} (1-x)^n \qquad\qquad \varepsilon(x) = \frac{(1-x)}{x} \\
\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t &= \sum_{n=0}^{N} \int_1^t (1-t)^n\,\mathrm{d}t + \int_1^x \left(1-t^N\right) \frac{(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t \\
\Longrightarrow \qquad \ln(x) &= \sum_{n=0}^{N} \int_1^x (-1)^n (t-1)^n\,\mathrm{d}t + (-1)^{N+1} \int_1^x \frac{(t-1)^n}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} + (-1)^{N+1} \int_1^x \frac{(t-1)^{N+1}}{t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Mais

$$\left| (-1)^{N+1} \int_1^x \frac{(t-1)^{N+1}}{t}\,\mathrm{d}t \right| \le \int_1^x \frac{|t-1|^{N+1}}{|t|}\,\mathrm{d}t$$

- si $x \ge 1$

$$\le \int_1^x (t-1)^{N+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{N+2}(x-1)^{N+2}$$

- si $0 < x \le 1$

$$\le \int_1^x \frac{|t-1|^{N+1}}{x}\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{(N+2)\,x}(1-x)^{N+2}$$

Donc

$$P_{\ln(x),1,N+1}(x) = \sum_{n=0}^{N} (-1) \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$$

On constate que si $x \in (0,2]$

$$\ln(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$$

Donc si $x = 2$

$$\implies \ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$
$$\implies \ln(10) = \ln\left(2^3 \frac{10}{8}\right) = 3\ln(2) + \ln\left(\frac{5}{4}\right)$$

Corollaire
Si $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n fois continûment dérivables en $x_0 \in \mathcal{D}_{f,g}$, alors

1. $P_{f+g,x_0,n}(x) = \mathbb{P}_{f,x_0,n}(x) + P_{g,x_0,n}(x)$
2. $P_{f+g,x_0,n}(x) = \left[\mathbb{P}_{f,x_0,n}(x) \cdot P_{g,x_0,n}(x)\right]_n$

où $[...]_n$ signifie que l'on retient que les termes $(x-x_0)^k, k \leq n$

◇

Preuve

1.
$$\begin{aligned}
f(x) =& P_{f,x_0,n}(x) + (x-x_0)^n \varepsilon_f(x), \\
g(x) =& P_{g,x_0,n}(x) + (x-x_0)^n \varepsilon_g(x), \\
\lim_{x\to x_0} \varepsilon_f(x), \varepsilon_g(x) =& 0 \\
\implies \quad f(x) + g(x) =& \underbrace{P_{f,x_0,n}(x) + P_{g,x_0,n}(x)}_{P_{f+g,x_0,n}} (x-x_0)^n \underbrace{\left(\varepsilon_f(x) + \varepsilon_g(x)\right)}_{\varepsilon_{f+g}(x)}
\end{aligned}$$

2. Exo

□

Théorème
Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n+1$ fois dérivable sur un intervalle $\mathcal{I}$, et $x_0, x \in \mathcal{I}$. Alors

$$f(x) - P_{f,x_0,n}(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

avec $\xi \in \left(\min(x_0,x), \max(x_0,x)\right)$

◇

Preuve
Posons $[x_0, x] \ni y \mapsto F(y)$, où

$$F(y) = f(x) - P_{f,y,n}(x) - c(x-y)$$

où

$$c = \frac{1}{(x-x_0)^{n+1}} \left(f(x) - P_{f,x_0,n}(x)\right)$$

$$\begin{aligned}
F(x) =& 0 \\
F(x_0) =& 0
\end{aligned}$$

et $F(y)$ est dérivable en (x_0, x). Par le , (pour lesquels les notes ne sont pas fournies)

$$\exists \xi \in (x_0, x) \,|\, F'(\xi) = 0$$

$$\begin{aligned}
\iff 0 =& -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}\left(y\right)}{k!}(x-y)^k \Bigg|_{y=\xi} + (n+1)x(x-\xi)^n \\
\iff 0 =& -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}\left(\xi\right)}{k!}(x-\xi)^k + \sum_{k=1} \frac{f^{(k)}\left(\xi\right)}{k!} k(x-\xi)^{k-1} + (n+1)c(x-\xi)^n \\
\iff 0 =& -\frac{f^{(n+1)}\left(\xi\right)}{n!}(x-\xi)^n + (n+1)c(x-\xi)^n \\
\iff c =& \frac{f^{(n+1)}\left(\xi\right)}{(n+1)!} \\
=& \frac{1}{(x-x_0)^{n+1}} \left(f\left(x\right) - P_{f,x_0,n}(x)\right)
\end{aligned}$$

$\square$

Chapter 3

Introduction aux équations différentielles

Équation différentielle ordinaire Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction. Par exemple:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{GMm}{\|\mathbf{x}\|^3}\mathbf{x}, t \mapsto \mathbf{x}(t)$$

Ou encore:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -k\mathbf{x}$$

Ce sont des équations différentielles ordinaires, abrégées EDO, car la fonction ne dépend que d'une variable.

Rem Il existe d'autres équations différentielles, comme celle de Navier-Stokes, ou encore celle de Yang-Mills, qui dépendent de plusieurs variables.

3.1 Équation différentielle ordinaire linéaire de premier ordre

Équation différentielle ordinaire linéaire de premier ordre Une équation différentielle ordinaire linéaire de premier ordre, abrégée EDOL1, est du type

$$y' + py = q$$

où

- $p, q \colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, continue sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$.
- Une EDOL1 est dite homogène si $q = 0$. Si on abrège parfois EDOL1 homogène par EDOL1h.

Solution Une solution à l'EDOL1 $y' + py = q$ est une fonction $f \colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}$, où $\mathcal{I} \subset \mathcal{D}$ est un intervalle ouvert, tel que

$$f' + pf = q$$

Condition initiale Une condition initiale pour une EDOL1 est la donnée d'un point

$$(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_p \times \mathbb{R}$$

$x_0, x \in \mathcal{I}, y(x_0) = y_0$ et tel que $f(x_0) = y_0$. On a

$$y(x) = y_0 \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p \, \mathrm{d}t\right)$$

Ex 1. $y' =$ const. est une EDOL1, de plus elle est homogène si const. $= 0$, on voit que dans ce cas $p = 0, q =$ const. .

Ex 2. $m\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{GMm}{\|\mathbf{x}\|^3}\mathbf{x}$ n'est clairement pas une EDOL1

Ex 3. $yy' + y^2 = x^2$ n'est pas une EDOL1. Par contre, si on pose $u = y^2$, alors on a

$$u' = 2yy'$$

et on obtient

$$\frac{1}{2}u' = u = x^2 \iff u' + 2u = 2x^2$$

qui est une EDOL1, avec $p = 2, q = 2x^2$

Ex 4. $y' + \cos(x)\, y = \sin(2x) + \cos(x)$, on a $p = \cos(x)\,, q = \sin(2x) + \cos(x)$ et $p, q \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Cette équation est donc une EDOL1.

Essayons maintenant de résoudre une EDOL1 homogène

$$y' + py = 0$$

$$\begin{aligned}
& y' + py = 0 \\
\iff \quad & y' = py \\
\iff \quad & \frac{y'}{y} = -p \\
\iff \quad & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(y) = -p \\
\iff \quad & \ln(y) = \int_{x_0}^{x} (-p)\, \mathrm{d}t + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\
\iff \quad & y = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p \, \mathrm{d}t\right)\mu, \mu \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Si en plus on a la condition initiale que $y(x_0) = y_0$, on doit choisir $\mu = y_0$ et la solution devient

$$y(x) = y_0 \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p \, \mathrm{d}t\right)$$

Rem On part du principe que $y \neq 0$

Théorème

Soit $y' + py = 0$ une EDOL1h. Soit en $\mathcal{I}$ ouvert, tel que $\mathcal{I} \subset \mathcal{D}_p$. Soit $x_0 \in \mathcal{I}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors l'EDOl1h possède une unique solution, donnée par

$$y = y_0 \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p \, \mathrm{d}t\right)$$

sur $\mathcal{I}$

$\diamond$

Preuve
Le fait que y soit une solution à l'EDOL1h tel que $y(x_0) = y_0$ est clair. Soit $f \colon \mathcal{I} \to \mathbb{R} | f(x_0) = y_0$ et $f' + pf = 0$.
Posons $g := f \exp\left(\int_{x_0}^{x} p \,\mathrm{d}t\right)$, pour $x \in I$.
On a que

$$\begin{aligned}
g' =& f' \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p \,\mathrm{d}t\right) + f \exp\left(\int_{x_0}^{x} p \,\mathrm{d}t\right) p \\
=& \exp\left(\int_{x_0}^{x} p \,\mathrm{d}t\right) (f' + pf) \\
=& 0 \\
\implies g =& \text{ const.} \\
\implies f =& \text{ const. } \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p \,\mathrm{d}t\right)
\end{aligned}$$

Comme de plus

$$f(x_0) = y_0$$

On a

$$y = y_0 \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p \,\mathrm{d}t\right) = y$$

$\square$

Lemme
Si $f, g \colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ sont solutions de $y' + py = q$. Alors $f - g$ est solution de $y' + py = 0$

$\diamond$

Preuve
$(f - g)' = f' - g' = q - pf - q(pg) = -p(f - g)$

$\square$

Ex 1. Résoudre

$$y' + \cot(x) y = 0$$

avec $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, on a $p = \cot(x), \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}, x_0 = \frac{\pi}{2}, y_0 = 1, \mathcal{I} = (0, \pi)$. D'après le théorème précédent.

$$\begin{aligned}
y =& 1 \cdot \exp\left(-\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \cot(t) \,\mathrm{d}t\right) \\
=& \exp\left(-\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\cos(t)}{\sin(t)} \,\mathrm{d}t\right) \\
=& \exp\left(-\ln\left(\sin(x)\right)\right) \\
=& \frac{1}{\sin(x)}
\end{aligned}$$

Ex 2. Trouver $f \in C^1\left(\mathbb{R}_+^*\right) | f\left(x^y\right) = yf\left(x\right), \forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$. Dérivons par rapport à y.

$$\begin{aligned} f'\left(x^y\right)\left(x^y\right)' =& f\left(x\right) \\ \implies f'(x^y)x^y \ln\left(x\right) =& f\left(x\right) \end{aligned}$$

Posons $y = 1$

$$f'(x) \times \ln\left(x\right) = f\left(x\right)$$

Si $x \neq 1$,

$$\begin{aligned} f'(x) - \frac{1}{x\ln\left(x\right)} f\left(x\right) =& 0 \\ \implies \qquad f\left(x_0\right) =& y_0 \exp\left(+\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\ln\left(A\right)^{\mathrm{d}t}}\right) \\ \overset{\text{si } x_0, x>1}{=}& y_0 \exp\left(\ln\left(\ln\left(t\right)\right)\Big|_{x_y}^{x}\right) = y_0 \exp\left(\ln\left(\ln\left(x\right)\right) - \ln\left(\ln\left(x_0\right)\right)\right) \\ =& y_0 \frac{\exp\left(\ln\left(\ln\left(x\right)\right)\right)}{\exp\left(\ln\left(\ln\left(x\right)\right)\right)} \\ =& y_0 \frac{\ln\left(x\right)}{\ln\left(x_0\right)} \end{aligned}$$

Ex 3. $y' + py = q, q \neq 0$, Une solution particulière peut être donné par l'équation suivante:

$$y_p(x) = y_h(x) \int_{\overline{x_0}}^{x} \frac{q(t)}{y_h(t)}\,\mathrm{d}t$$

avec $\overline{x_0} \in [x_0, x]$. De plus, on a

$$\exists! X \in \mathcal{I} | y_p(X) = 0 \iff X = \overline{x_0}$$

Corollaire
Si $y' + py = q$ est une EDOL1, et si $\mathcal{I} \subset \mathcal{D}$ est un intervalle ouvert,

$$y = y_p \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

y_p est une solution particulière à $y' + py = q$ et

$$y_n = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p\,\mathrm{d}t\right)$$

est solution à l'EDOL1h.

◇

- On peut trouver y_p en devinant:

  $$y' + xy = x^2 + 1$$

  Après comparaison des degrés, on cherche

  $$y = ax + b$$

  $$y' = a \implies a + x\left(ax + b\right) = x^2 + 1 \implies a = 1, b = 0 \implies y_p = x$$

  Cherchons maintenant une solution de l'homogène:

  $$y_h' + xy_h = 0, y_h = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} t\,\mathrm{d}t\right) = \lambda e^{\frac{x^2}{2}}$$

Soit
$$y = x + \lambda \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$
On cherche la solution avec la condition initiale $y(0) = 1$
$$y(0) = 0 + \lambda \exp(0) = \lambda \equiv 1 \implies y(x) = x + \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Théorème de variation des constantes
Soient EDOL1 $y' + py = q, p, q\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, continues, soit $x_0 \in \mathcal{I} \subset \mathcal{D}, \mathcal{I}$ un intervalle ouvert. Alors l'unique solution $y' + py = q, y(x_0) = 0$ est
$$y_p = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_{x_0}^{x} q(t)\exp\left(\int_{x_0}^{t} p\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t\right)$$

$\diamond$

Ex $y' + \cos(x)\, y = 0$ est une EDOL1 homogène, avec $p = \cos(x), q = 0$. On a aussi $p, q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$. Cette équation est donc une EDOL1 homogène. Une solution $y\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}, \mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ ouvert. Toute solution à $y' + py = 0$ est de la forme
$$y(x) = \lambda \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p\,\mathrm{d}t\right), \lambda \in \mathbb{R}, [x_0, x] \subset \mathcal{D}_p$$
On aurait donc
$$\begin{aligned}
y(x) =& \lambda \exp\left(-\int_{\pi}^{x} \cos(t)\,\mathrm{d}t\right)\\
=& \lambda \exp\big(-\sin(x)\big)\\
=& \lambda' \exp\left(-\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \cos(t)\,\mathrm{d}t\right)\\
=& \lambda' \exp\big(-\sin(x) + 1\big)\\
=& \lambda' \exp\big(-\sin(x)\big)\exp(1)\\
=& \lambda' e \exp\big(-\sin(x)\big)
\end{aligned}$$

On a la même solution si $\lambda = \lambda' e$. En mettant maintenant la condition initiale suivante: $y(\pi) = 2$, on a
$$\begin{aligned}
y(x) =& 2\exp\big(-\sin(x)\big)\\
=& \frac{2}{e}\exp\big(-\sin(x) + 1\big)
\end{aligned}$$

On a donc
$$y_p(x) = \exp\big(-\sin(x)\big)\underbrace{\int_{\pi}^{x} (\sin(2t) + \cos(t))\exp\big(\sin(t)\big)\,\mathrm{d}t}_{I}$$
$$\begin{aligned}
I =& \exp\big(\sin(x)\big) - 1 + \int_{\pi}^{x} \sin(2t)\exp\big(\sin(t)\big)\,\mathrm{d}t\\
=& \exp\big(\sin(x)\big) - 1 + 2\int_{\pi}^{x} \underbrace{\sin(t)}_{v}\underbrace{\cos(t)\exp\big(\sin(t)\big)\,\mathrm{d}t}_{u'}\\
=& \exp\big(\sin(x)\big) - 1 + 2\left[\exp\big(\sin(t)\big)\sin(t)\Big| - \int_{\pi}^{x} \cos(t)\exp\big(\sin(t)\big)\,\mathrm{d}t\right]\\
=& \exp\big(\sin(x)\big) - 1 + 2\Big[\exp\big(\sin(x)\big)\sin(x) - \exp\big(\sin(x)\big) + 1\Big]\\
=& 1 - \exp\big(\sin(x)\big) + 2\exp\big(\sin(x)\big)\sin(x)
\end{aligned}$$
$$\implies y_p(x) = \exp\big(-\sin(x)\big) - 1 + 2\sin(x)$$

On peut maintenant vérifier notre solution:

$$\begin{aligned}
y_p' &= -\cos(x)\exp\big(-\sin(x)\big) + 2\cos(x) \\
\cos(x)\, y_p &= \cos(x)\exp\big(-\sin(x)\big) - \cos(x) + \cos(x)\sin(x) \\
y_p' + \cos(x)\, y_p &= \cos(x) + \sin(2x)
\end{aligned}$$

On peut également tester avec le fait que l'unique $\overline{x_0} \in \mathcal{I} | y_p(\overline{x_0}) = 0$ est π. En effet, on a

$$y_p(\pi) = \exp\big(-\sin(\pi)\big) - 1 + 2\sin(\pi) = \exp(0) - 1 + 0 = 0$$

Essayons maintenant de deviner une solution particulière. Pour cela, on suppose que

$$y_p(x) = a + b\cos(x) + c\sin(x)$$

Si on dérive, on a

$$\begin{aligned}
y_p' &= -b\sin(x) + c\cos(x) \\
\cos(x)\, y_p &= a\cos(x) + b\cos^2(x) + c\sin(x)\cos(x) \\
\sin(2x) + \cos(x) &= -b\sin(x) + c\cos(x) + a\cos(x) + b\cos^2(x) + c\sin(x)\cos(x) \\
&= -b\sin(x) + c\cos(x) + a\cos(x) + b\cos^2(x) + \frac{c}{2}\sin(2x) \\
\overset{c=2, b=0, a=-1}{\iff} \qquad y_p(x) &= -1 + 2\sin(x)
\end{aligned}$$

On remarque que la différence entre les deux solutions particulières est une solution de l'homogène. Pour finir, on a

$$\mathcal{S} = \Big\{ 2\sin(x) - 1 + \lambda\exp\big(-\sin(x)\big), \lambda \in \mathbb{R} \Big\}$$

Si on veut $y(\pi) = 2$, on a

$$-1 + \lambda = 2 \implies \lambda = 3$$

Notre solution est donc

$$y(x) = 2\sin(x) - 1 + 3\exp\big(-\sin(x)\big)$$

Cependant, on peut aussi écrire

$$\mathcal{S} = \Big\{ \exp\big(-\sin(x)\big) - 1 + 2\sin(x) + \lambda'\exp\big(-\sin(x)\big) | \lambda' \in \mathbb{R} \Big\}$$

Ce qui nous donnerait $\lambda' = 2$.

Corollaire

Toute solution à $y' + py = q$ s'écrit comme

$$y = y_p + \lambda y_h$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et y_h solutions de l'homogène $y' + py = 0$

$$\implies y_0 = y(x) - y_p(x_0) + \lambda y_h(x_0) \implies \lambda = \frac{y_0 - y_p(x_0)}{y_h(x_0)}$$

◇

Ex Soit

$$y' + \cot(x)\, y = \frac{\exp(x)}{\sin(x)}$$

On a $p = \cot(x), q = \frac{\exp(x)}{\sin(x)}$. On voit que $p\colon \mathcal{D}_p \to \mathbb{R}, \mathcal{D}_p = \mathbb{R} \setminus \big\{k\pi | k \in \mathbb{Z}\big\}$ est continue sur $\mathcal{D}_p$ qui est un ouvert, cependant ce n'est pas un intervalle mais une réunion d'une infinité d'intervalles, on voit que $q\colon \mathcal{D}_q \to \mathbb{R}$ est continue sur $\mathcal{D}_q = \mathbb{R} \setminus \big\{k\pi | k \in \mathbb{Z}\big\}$ qui est aussi un ouvert, cependant ce n'est pas un intervalle mais une réunion d'une infinité d'intervalles.
Posons maintenant l'équation homogène:

$$y' + \cot(x)\, y = 0$$

On a

$$\begin{aligned} y(x) =& \lambda \exp\left(-\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \cot(t)\,\mathrm{d}t\right) \\ =& \lambda \exp\left(-\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\cos(t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t\right) \\ =& \lambda \exp\left(-\ln|\sin(x)|\right) \\ =& \lambda \frac{1}{|\sin(x)|} \end{aligned}$$

On peut faire ça car:

$$\begin{aligned} \ln|\sin(t)|' \overset{\mathcal{D}}{=}& \frac{1}{|\sin(t)|}|\sin(t)|' \\ =& \frac{\operatorname{sgn}\left(\sin(t)\right)}{|\sin(t)|} \cdot \cos(t) \\ y(x) =& \begin{cases} \frac{1}{\sin(x)} & x \in \mathcal{D}_p \cap \mathbb{R}_+ \\ \frac{2}{\sin(x)} & x \in \mathcal{D}_p \cap \mathbb{R}_- \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc, pour une solution particulière,

$$\begin{aligned} y_p(x) =& \frac{1}{\sin(x)} \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\exp(t)}{\sin(t)} \cdot |\sin(t)|\,\mathrm{d}t}_{I}, x, t \in (0, \pi) \\ =& \frac{1}{\sin(x)} \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \exp(t)\,\mathrm{d}t \\ =& \frac{\exp(x) - \exp\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin(x)} \end{aligned}$$

On a alors:

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\exp(x) - \exp\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin(x)} + \lambda \frac{1}{\sin(x)} | \lambda \in \mathbb{R} \right\}, x \in (0, \pi)$$

Si $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\exp\left(\frac{\pi}{2}\right) - \exp\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} + \lambda \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} =& 2 \\ \implies \qquad \lambda =& 2, y(x) = \frac{\exp(x) - \exp\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin(x)} + \frac{2}{\sin(x)} \end{aligned}$$

Si $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\exp\left(\frac{\pi}{6}\right) - \exp\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} + \lambda \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} =& 4 \\ \implies 2\exp\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2\exp\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\lambda =& 4 \\ \implies \qquad \lambda =& 2 + \exp\left(\frac{\pi}{6}\right) - \exp\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

L'unique solution à $y' + \cot(x)\,y = \frac{\exp(x)}{\sin(x)}$ est donc

$$y_h(x) \int_{x_0}^{x} \frac{q}{y_h}\,\mathrm{d}t + y_0 y_h, y_h = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p\,\mathrm{d}t\right)$$

3.2 Séparation des variables

Équation différentielle ordinaire à variables séparables Une équation différentielle ordinaire à variables séparables, abrégée EDOVS, est une équation de la forme

$$y' = h(y)g(x)$$

où $h\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ sont continues sur leurs domaines respectifs, $\mathcal{E}, \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$.

Solution Une solution est une fonction $y : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$, dérivable sur un intervalle ouvert $\mathcal{I} \subset \mathcal{D}$ et $\operatorname{Im}(y) \subset \mathcal{E}$ qui vérifie

$$y' = h(y)g(x)$$

Condition initiale Une condition initiale pour y est $(x_0, y_0) \in \mathcal{D} \times \mathcal{E}$ telle que $y(x_0) = y_0$.

Discussion
Si

$$y' = h(y)g(x)$$

Si $h(y_0) \neq 0$, alors $h(y) \neq 0, \forall y \in \mathcal{I}_2$, un intervalle ouvert qui contient y_0. On a alors sur $\mathcal{I}_2$

$$\frac{y'}{h(y)} = g(x)$$

Si $H(y)$ est une primitive de $\frac{1}{h(y)}$, i.e., $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}H(y) = \frac{1}{h(y)}$, alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H(y) = g(x)$$

On aura alors

$$H(y) - H(y_0) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t = G(x)$$

où $G(x)$ est une primitive de $g(x)$, définie sur $\mathcal{I}_1$, un intervalle ouvert qui contient x_0, x. Donc

$$H(y) = G(x) + H(y_0)$$

Puisque $\frac{1}{h(y)}$ ne s'annule pas sur $\mathcal{I}_2$, $H(y)$ est une bijective sur $\mathcal{I}_2$. Donc

$$y = H^{-1}(G(x) + H(y_0))$$

Théorème
Soit l'EDOVS $y' = h(y)g(x)$ et la condition initiale $y(x_0) = y_0, x_0 \times y_0 \in \mathcal{D} \times \mathcal{E}$. Supposons que

- $g\colon \mathcal{I}_1 \to \mathbb{R}$ est continue, avec $\mathcal{I}_\infty \ni x_0$ un intervallee ouvert.
- $h\colon \mathcal{I}_2 \to \mathbb{R}$ est continue, et bornée sur l'intervalle ouvert $\mathcal{I}_2 \ni y_0$. Il existe alors un intervalle ouvert $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}_1 | x_0 \in \mathcal{J}$ et il existe une solution unique $y\colon \mathcal{J} \to \mathbb{R} \mid y' = h(y)g(x)$ et $y(x_0) = y_0$.

$\diamond$

Preuve

Puisque $h\colon \mathcal{I}_2 \to \mathbb{R}$ est non-mulle et continue, $\frac{1}{n}\colon \mathcal{I}_n \to \mathbb{R}$ le sera aussi. Comme $y \in \mathcal{I}_2$, on peut poser $\forall y \in \mathcal{I}_2$

$$H(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{1}{y(t)}\,\mathrm{d}t$$

On a $h(y_0) = 0$ et $H\colon \mathcal{I}_2 \to \mathbb{R}$ estinjective, $H'(y) = \frac{1}{h(y)}$. Pour $x \in \mathcal{I}_1$, on pose

$$G(x) := \int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t, G(x) = 0, G'(x)$$

On a donc

$$G^{-1}\{\mathrm{Im}\,(H)\} \neq \varnothing$$

Comme H eat continue sur I_2, alors $H(\mathcal{I}_2)$ est un intervalle ouvert. Donc $G^{-1}\{\ln{(H)}\}$ est un ouvert qui contient x_0. Il exsite fonc un intervalle ouvert $\mathcal{J} \subset G^{-1}\{\mathrm{Im}\,(g)\}$ et tel que $X_0 \in \mathcal{J}$. Pour $x \in \mathcal{J}$ on pose $y(x) = H^{-1}(G(x))$. On a $y_{x_0} = y_0$ et

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H^{-1}(G(x)) \\
&\overset{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) = \frac{1}{f(f^{-1}(x))}}{=} h(H^{-1}(G(x)))g(x) \\
&= h(y(x))g(x)
\end{aligned}$$

Soit $f\colon \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ telle que $f' = h(f)g$ et $f\,(x_0) = y_0$. On a alors

$$\begin{aligned}
H(f(x)) &= \int_{f(x_0)}^{f(x)} \frac{1}{h(s)}\,\mathrm{d}s \\
&\overset{\substack{s = f(s) \\ \mathrm{d}s = f'(t)\,\mathrm{d}t}}{=} \int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(f(t))} f'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t \\
&= G(x) \\
&= \int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{h(t)}\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\substack{s = y(t) \\ \mathrm{d}s = y'(t)\,\mathrm{d}t}}{=} \int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(s)}\,\mathrm{d}s \\
&= H(y)
\end{aligned}$$

Comme H est injective, on a

$$f(x) = y(x)$$

$\square$

<u>Marche à suivre</u>

$Y' = h(y)g(x)$, $g\colon \mathcal{I}_1 \to \mathbb{R}, h\colon \mathcal{I}_2 \to \mathbb{R}^*$ continues, avec $(x_0, y_0) \in \mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2$ une condition initiale.

1. $G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$
2. $H(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(s)}\,\mathrm{d}s$

3. Trouver $\mathcal{J} \subset G^{-1}(\operatorname{Im}(H)) \mid x_0 \in \mathcal{J}$
4. Calcul de $y = H^{-1}(G(x)) \iff H(y) = G(x)$

Ex $y' = \frac{\cos'}{x}, (x_0, y_0) = (1, \pi), g = \frac{1}{x} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}^*, h = \cos(y) : \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \to [-1, 0)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

0.1 $G(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(x)$

$$\begin{aligned} H(y) &= \int_\pi^y \frac{1}{\cos(s)}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_\pi^y \frac{\cos(s)}{\cos^2(s)}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_\pi^y \frac{\cos(s)}{1-\sin^2(s)}\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

0.2

$$\begin{aligned} &\overset{\substack{u = \sin(s) \\ \mathrm{d}u = \cos(s)\,\mathrm{d}s}}{=} \int_0^{\sin(y)} \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\sin(y)} \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)\right)\Bigg|_0^{\sin(y)} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin(y)}{1-\sin(y)}\right) \end{aligned}$$

0.3

$$\lim_{y\to\frac{\pi}{2}^+} H(y) = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin(y)}{1-\sin(y)}\right) = +\infty$$

$$\lim_{y\to\frac{3\pi}{2}^-} H(y) = \lim_{y\to\frac{3\pi}{2}^-} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin(y)}{1-\sin(y)}\right) = -\infty \implies \operatorname{Im}(H) = \mathbb{R}, G^{-1}(\operatorname{Im}(H)) = \mathbb{R}_+^*$$

$$\implies \mathcal{J} = \mathbb{R}_+^*$$

0.4

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin(y)}{1-\sin(y)}\right) &= \ln(x) \\ \iff \frac{1+\sin(y)}{1-\sin(y)} &= e^{2\ln(x)} = x^2 \\ \iff 1+\sin(y) &= x^2(1-\sin(y)) \\ \iff \sin(y)(1+x^2) &= x^2-1 \\ \iff \sin(y) &= \frac{x^2-1}{x^2+1} \\ \overset{y\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)}{\iff} y &= \pi - \arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) \end{aligned}$$