Enseignant: Bossoney
SCM - MAN
4 Juillet 2023
Durée : 120 minutes

1

Dalton Joe

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- La note maximale est accordée dès 20 points acquis. La dernière question permet l'acquisition de 2 points supplémentaires.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 (2 points)
Si $[(7,3)] \in \mathbb{Z}$, alors:

- ☐ $(14,6) \in [(7,3)]$.
- ☐ $(4,0) = [(7,3)]$.
- ☐ $(-3,-7) = [(7,3)]$.
- ☐ $(5,1) \in [(7,3)]$.

Question 2 (2 points)
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels, croissante et bornée. La coupure de Dedekind représentant sa limite dans $\mathbb{R}$ est

- ☐ $A = \{r \in \mathbb{Q} \,:\, \exists n \in \mathbb{N},\, r \leq a_n\}$, $B = \mathbb{Q} \setminus A$.
- ☐ $B = \{r \in \mathbb{Q} \,:\, \forall n \in \mathbb{N},\, r \geq a_n\}$, $A = \mathbb{Q} \setminus B$.
- ☐ $A = \cap_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}_{<a_n}$, $B = \mathbb{Q} \setminus A$.
- ☐ $A = \{a_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \mathbb{Q} \setminus A$.

Question 3 (2 points)
Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble borné et non vide. Alors:

- ☐ l'ensemble des minorants de E possède un maximum.
- ☐ comme E est majoré, son maximum est égal à son supremum.
- ☐ l'ensemble des majorants de E possède un maximum.
- ☐ E n'a pas de maximum.

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 4: *Cette question est notée sur 5 points.*

Pour $\alpha \in [0, 4]$ on définit la fonction f_α par

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_\alpha(x) = \alpha x(1 - x).$$

(a) Montrer que $\forall \alpha \in [0, 4]$, $\mathrm{Im}(f) \subset [0, 1]$.

(b) Trouver un point fixe x_α non nul pour f_α si $\alpha > 1$.

(c) Pour $1 < \alpha < 3$, trouver un intervalle fermé $I_\alpha \subset [0, 1]$, contenant un voisinage de x_α et tel que $f_\alpha\big|_{I_\alpha}$ est contractante.

Question 4: *Cette question est notée sur 4 points.*

Pour cet exercice, f désignera les fonctions sin, cos, sinh et cosh. Pour chacune de ces fonctions,

(a) Calculer $\mathrm{dl}^n_{f,0}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

(b) Evaluer $\mathrm{dl}^n_{f,0}(iy)$ pour $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

(c) Sachant que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{dl}^n_{f,0}(x) = f(x)$, calculer $\lim_{n\to\infty} \mathrm{dl}^n_{f,0}(iy)$ pour $y \in \mathbb{R}$.

Question 4: *Cette question est notée sur 5 points.*

Soit I un idéal d'un anneau commutatif $\mathcal{A}$ (on peut, sans perte de généralité, prendre $\mathbb{Z}$, $\mathbb{K}[X]$ ou $C(\mathbb{R})$ pour l'anneau en question). On définit le **radical** $\sqrt{I}$ de I comme

$$\sqrt{I} := \{x \in \mathcal{A} : \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ t.q. } x^n \in I\}.$$

(a) Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de $\mathcal{A}$.

(b) Si $\mathcal{A} = \mathbb{Z}$ et que $g = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$ est la factorisation en premiers du générateur de I, quel est le générateur de $\sqrt{I}$? Justifier clairement votre réponse.

Question bonus : *Cette question est notée sur 2 points.*

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ un nombre non premier. Montrer que si tout diviseur $1 < d < n$ de n vérifie $2d > n - 1$, alors $n = 4$.

(b) Soit $n \geq 5$ un nombre naturel. Montrer que $\frac{(n-1)!}{n} \in \mathbb{N}$ ssi n n'est pas premier.

(c) Déterminer $f^{-1}\{0\}$ et $f^{-1}\{1\}$ pour

$$\mathbb{N}^* \ni n \mapsto f(n) := 1 - \left\lfloor \cos^2\left(\frac{(n-1)!}{n}\pi\right)\right\rfloor - \delta_{n\,4},$$

où $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est la fonction partie entière et $\delta_{n\,4}$ est le symbole de Kronecker.

EPFL

Enseignant: Bossoney
SCM - MAN
4 Juillet 2023
Durée : 120 minutes

1

Dalton Jack

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- La note maximale est accordée dès 20 points acquis. La dernière question permet l'acquisition de 2 points supplémentaires.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer
Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer
NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer
Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 (2 points)
Si $[(7,3)] \in \mathbb{Z}$, alors:

- ☐ $(5,1) \in [(7,3)]$.
- ☐ $(-3,-7) = [(7,3)]$.
- ☐ $(14,6) \in [(7,3)]$.
- ☐ $(4,0) = [(7,3)]$.

Question 2 (2 points)
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels, croissante et bornée. La coupure de Dedekind représentant sa limite dans $\mathbb{R}$ est

- ☐ $A = \{r \in \mathbb{Q} : \exists n \in \mathbb{N},\, r \leq a_n\}$, $B = \mathbb{Q} \setminus A$.
- ☐ $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, $B = \mathbb{Q} \setminus A$.
- ☐ $B = \{r \in \mathbb{Q} : \forall n \in \mathbb{N},\, r \geq a_n\}$, $A = \mathbb{Q} \setminus B$.
- ☐ $A = \cap_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{Q}_{<a_n}$, $B = \mathbb{Q} \setminus A$.

Question 3 (2 points)
Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble borné et non vide. Alors:

- ☐ E n'a pas de maximum.
- ☐ comme E est majoré, son maximum est égal à son supremum.
- ☐ l'ensemble des majorants de E possède un maximum.
- ☐ l'ensemble des minorants de E possède un maximum.

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 4: *Cette question est notée sur 5 points.*

Pour $\alpha \in [0,4]$ on définit la fonction f_α par

$$\forall x \in [0,1], \quad f_\alpha(x) = \alpha x(1-x).$$

(a) Montrer que $\forall \alpha \in [0,4]$, $\mathrm{Im}(f) \subset [0,1]$.

(b) Trouver un point fixe x_α non nul pour f_α si $\alpha > 1$.

(c) Pour $1 < \alpha < 3$, trouver un intervalle fermé $I_\alpha \subset [0,1]$, contenant un voisinage de x_α et tel que $f_\alpha\big|_{I_\alpha}$ est contractante.

Question 4: *Cette question est notée sur 4 points.*

Pour cet exercice, f désignera les fonctions sin, cos, sinh et cosh. Pour chacune de ces fonctions,

(a) Calculer $\mathrm{dl}_{f,0}^{n}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

(b) Evaluer $\mathrm{dl}_{f,0}^{n}(iy)$ pour $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

(c) Sachant que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{dl}_{f,0}^{n}(x) = f(x)$, calculer $\lim_{n\to\infty} \mathrm{dl}_{f,0}^{n}(iy)$ pour $y \in \mathbb{R}$.

Question 4: *Cette question est notée sur 5 points.*

Soit I un idéal d'un anneau commutatif $\mathcal{A}$ (on peut, sans perte de généralité, prendre $\mathbb{Z}$, $\mathbb{K}[X]$ ou $C(\mathbb{R})$ pour l'anneau en question). On définit le **radical** $\sqrt{I}$ de I comme

$$\sqrt{I} := \{x \in \mathcal{A} : \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ t.q. } x^n \in I\}.$$

(a) Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de $\mathcal{A}$.

(b) Si $\mathcal{A} = \mathbb{Z}$ et que $g = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$ est la factorisation en premiers du générateur de I, quel est le générateur de $\sqrt{I}$? Justifier clairement votre réponse.

Question bonus : *Cette question est notée sur 2 points.*

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ un nombre non premier. Montrer que si tout diviseur $1 < d < n$ de n vérifie $2d > n-1$, alors $n = 4$.

(b) Soit $n \geq 5$ un nombre naturel. Montrer que $\frac{(n-1)!}{n} \in \mathbb{N}$ ssi n n'est pas premier.

(c) Déterminer $f^{-1}\{0\}$ et $f^{-1}\{1\}$ pour

$$\mathbb{N}^* \ni n \mapsto f(n) := 1 - \left\lfloor \cos^2\left(\frac{(n-1)!}{n}\pi\right)\right\rfloor - \delta_{n\,4},$$

où $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est la fonction partie entière et $\delta_{n\,4}$ est le symbole de Kronecker.