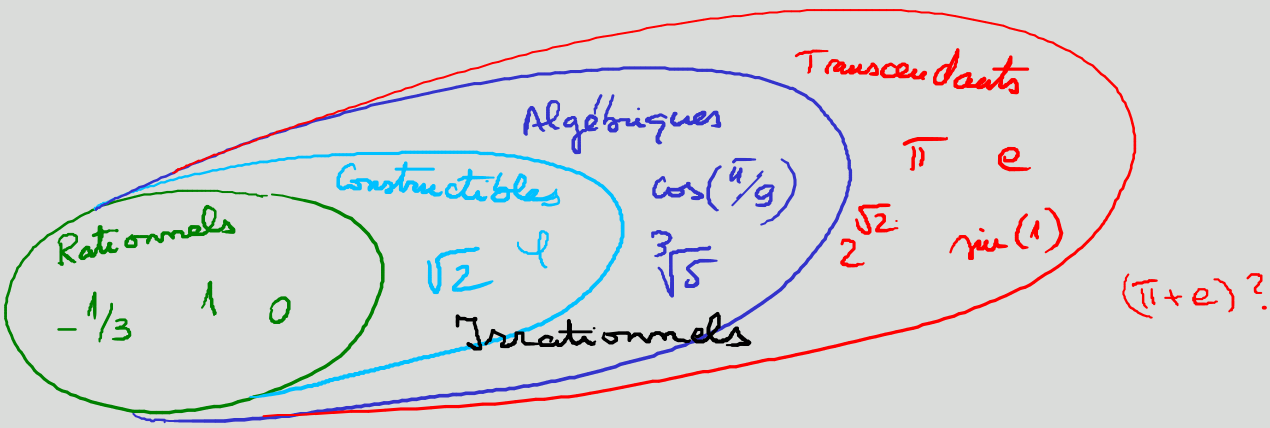
2.4 Développements

Motivation La méthode des points fixes est une méthode efficace pour le calcul des solutions des équations polynômiales à coefficients rationnels.
Ces solutions sont des nombres réels appelés des nombres algébriques.

Cependant, certains nombres réels ne sont pas de nombres algébriques et ils sont appelés des nombres transcendants (comme π et e).



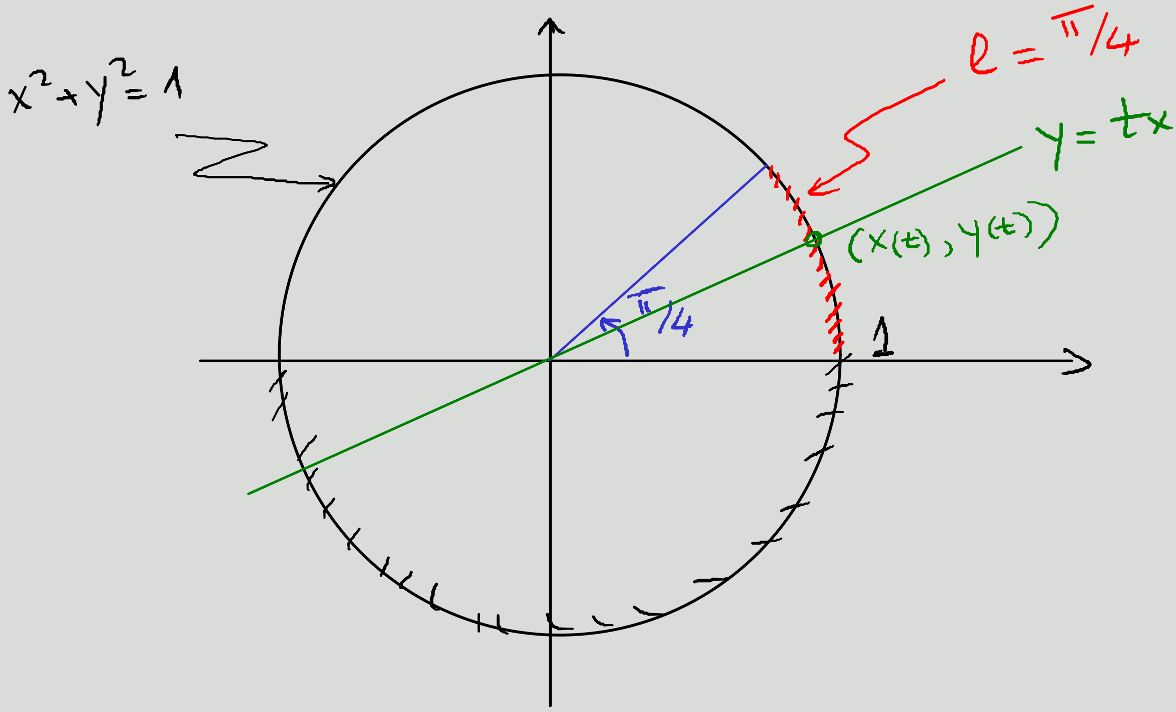
Remarque L'ensemble des nombres algébriques est dénombrable, tandis que l'ensembles des nombres réels ne l'est pas.

Problème Comment construire / calculer (efficacement) des nombres transcendants ?

EXEMPLE

On peut définir π comme le demi-périmètre du cercle unitaire (de rayon 1).
On veut calculer la valeur de $\pi/4$ (et le choix n'est pas anodin)

$\Rightarrow$ on va faire une paramétrisation convenable de l'arc de cercle en fonction des droites $y(t) = t \cdot x$



$x^2+y^2=1 \qquad (1)$

$y = tx \qquad (2)$

$y \geq 0$

$\boxed{0 \leq t \leq 1}$

(2) en (1) $\Rightarrow x^2 + t^2x^2 = 1 \Rightarrow x^2(1+t^2) = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ y = tx \end{cases}$$

La paramétrisation du premier quart de l'arc du demi-cercle unitaire est donnée par la fonction :

$$[0,1] \ni t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

On calcule les vecteurs tangents $\vec{T}(t)$ à cet arc de cercle par dérivation :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\left(1+t^2\right)^{-1/2}\right) = \frac{-t}{\left(1+t^2\right)^{3/2}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) = \frac{d}{dt}\left(t\cdot\left(1+t^2\right)^{-1/2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{-1/2\, t\cdot 2t}{\left(1+t^2\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{\left(1+t^2\right)^{3/2}}$$

Donc :

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{\left(1+t^2\right)^{3/2}}\cdot\begin{pmatrix}-t\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \|\vec{T}(t)\| = \left(\frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^3} + \frac{1}{\left(1+t^2\right)^3}\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{1+t^2}$$

Ainsi, la longueur du premier quart de l'arc du demi-cercle unitaire

$$\ell = \int_0^1 d\ell(t) = \int_0^1 \|\vec{T}(t)\|\, dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{4} \quad \text{(voir dessin)}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\pi = 4\cdot\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt}_{} \qquad (*)$$

<u>Remarque</u> On sait que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt = \operatorname{Arctan}(t)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$

mais on veut calculer effectivement la valeur du nombre π à partir de la relation $(*)$, donc il faut calculer explicitement l'intégrale.

Pour $0 \leq t < 1$:

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1-(-t^2)} = \sum_{n \geq 0} (-t^2)^n$$

$$r \neq 1 : \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n$$

$$\Rightarrow I \overset{\text{notation}}{=\!=} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^1 \sum_{n \geq 0} (-t^2)^n$$

Attention !

$$= \sum_{n \geq 0} \int_0^1 (-t^2)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1} \Bigg|_0^1$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Finalement :

$$\pi \overset{(*)}{=} 4 \cdot I = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} \ldots$$

FIN DE L'EXEMPLE

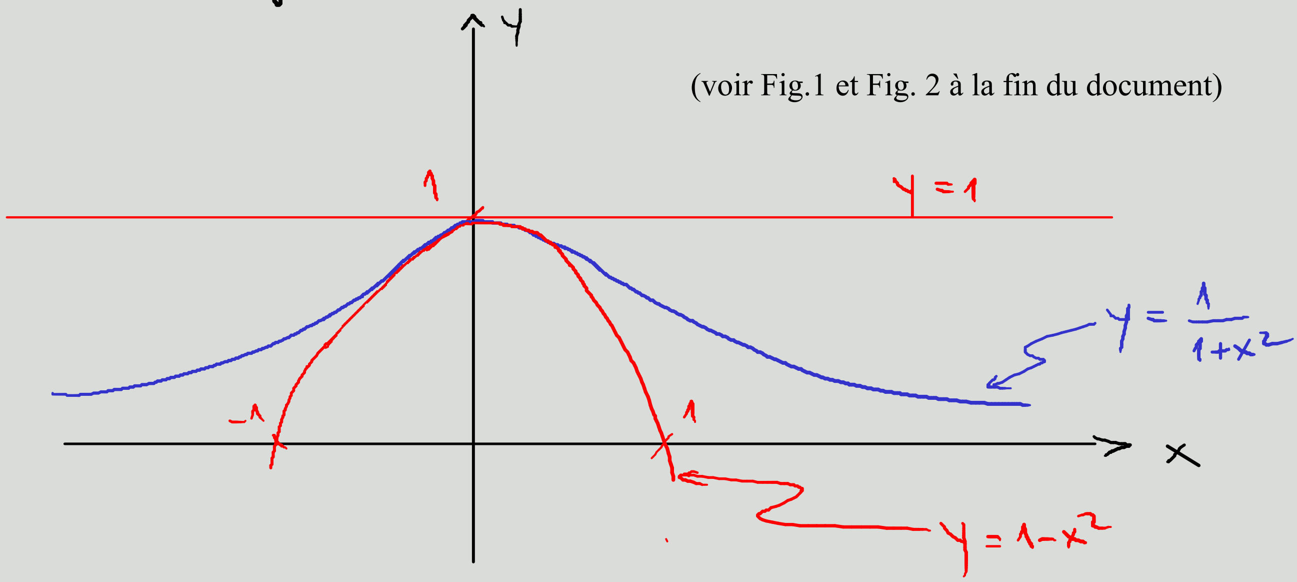
<u>Idée</u> Généraliser l'approche de cet exemple afin d'écrire une certaine fonction (dans l'exemple c'était $\frac{1}{1+t^2}$) comme une limite de polynômes (dans l'exemple c'était $P_n(t) = \sum_{n=0}^{N} (-t^2)^n$).

<u>Difficulté</u> Comment déterminer quel polynôme $P(x)$ approxime "le mieux" une fonction $f(x)$ donnée et quelles conditions doit remplir la fonction $f(x)$ pour qu'une telle approximation soit "bonne".

<u>Remarque</u> La réponse dépend aussi du degré $\deg(P)$ de $P(x)$.

Si on revient à notre exemple, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ est déjà bien approximée par le polinôme constant $P(x) = 1$ en $x_0 = 0$.

On peut améliorer l'approximation pour des x qui s'éloignent de $x_0 = 0$ en ajoutant le terme $-x^2$ et donc $P(x) = 1 - x^2$



(voir Fig.1 et Fig. 2 à la fin du document)

En fait :

$$f(0) = P(0) = 1$$

$$f'(0) = P'(0) = 0$$

$$f''(0) = P''(0) = -2$$

<u>Démarche</u> : afin de déterminer un polynôme $P(x)$ de degré n qui approxime une fonction $f(x)$ (suffisament régulière) en un point x_0, on impose que les n premières derivées en x_0 de $P(x)$ coïncident avec les n premières dérivées en x_0 de $f(x)$.

<u>Définition 2.4.1.</u>

Soit * $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable sur un intervalle ouvert I

* $x_0 \in I$

Le développement limité de f autour de x_0 à l'ordre n est un polynôme $dl^n_{f,x_0}(x)$ de degré n qui satisfait

$$\forall\, 0 \leq k \leq n, \left(\frac{d^k}{dx^k}\, dl^n_{f,x_0}\right)(x_0) = \left(\frac{d^k}{dx^k} f\right)(x_0) \qquad (**)$$

<u>Attention</u> Le développement limité est unique.

<u>Notations</u> Par la suite, on utilise une notation allégée :

$$f^{(0)}(x) = f(x)$$

$$f^{(1)}(x) = \left(\frac{d}{dx} f\right)(x)$$

$$f^{(k)}(x) = \left(\frac{d^k}{dx^k} f\right)(x)$$

<u>Théorème 2.4.2.</u>

Soit $*$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable sur un intervalle ouvert I

$*$ $x_0 \in I$

Alors :

$$dl^n_{f,x_0}(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{P(x)}$$

<u>Démonstration</u>

Le polynôme $P(x)$ (le terme de droite de la relation ci-dessus) satisfait bien

$$P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \text{pour } \forall k \in \mathbb{N}$$

Il faut encore prouver que ce polynôme est unique.

On suppose (par l'absurde) qu'un autre polynome $Q(x)$ de degré n satisfait aussi la condition $(**)$ sur les dérivées

$\Rightarrow$ $P(x) - Q(x)$ est un polynôme de degré n dont toutes les dérivées s'annulent en x_0.

Par conséquent : $P(x) - Q(x) = 0$

Donc, $dl^n_{f,x_0}(x)$ est unique.

Exemple 1

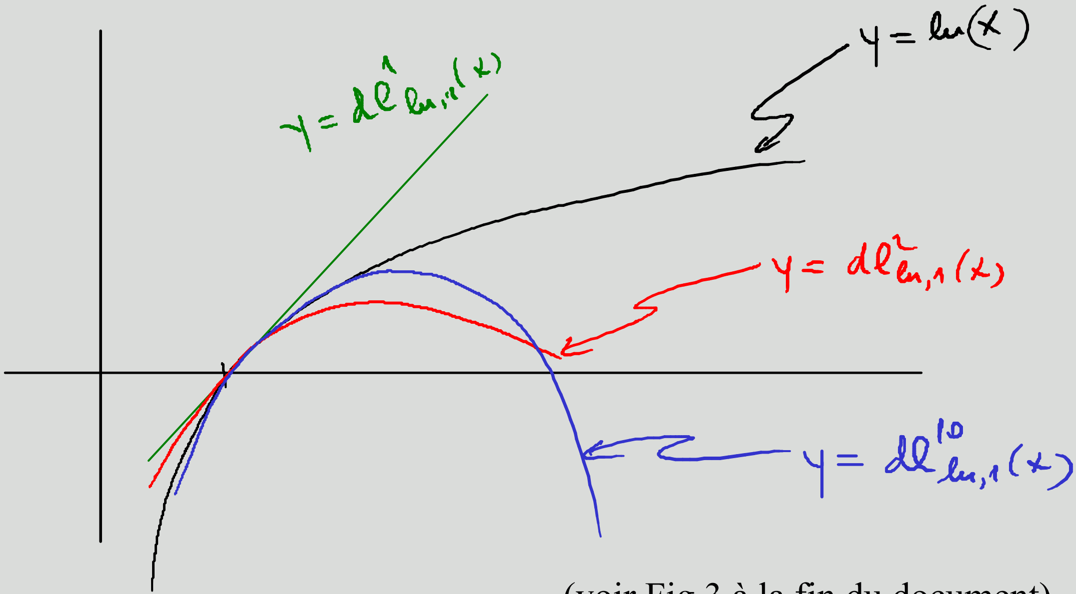
Soit $\mathbb{R}_+^* \ni x \longmapsto \ln(x) := \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$

Clairement $\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$$\ln^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} \quad \text{pour } k \geq 1$$

Donc, le développement limité de ln autour de $x_0 = 1$ à l'ordre n :

$$dl^n_{\ln,1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot (x-1)^k$$



(voir Fig.3 à la fin du document)

Exemple 2

Soit $\mathbb{R} \ni x \longmapsto \exp(x) := \ln^{-1}(x)$

On a : $\frac{d}{dx}\exp(x) = \frac{d}{dx}\ln^{-1}(x) = \frac{1}{\left(\frac{d}{dx}\ln\right)(\exp(x))} =$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} = \exp(x)$$

Ainsi $\exp^{(k)}(x) = \exp(x)$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$ (8)

Donc, le développement limité de $\exp(x)$ autour de $x_0 = 0$ à l'ordre n :

$$d\ell^n_{\exp, 0} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

<u>Question</u> Dans quelle mesure les développements limités approximent bien une fonction f donnée ?

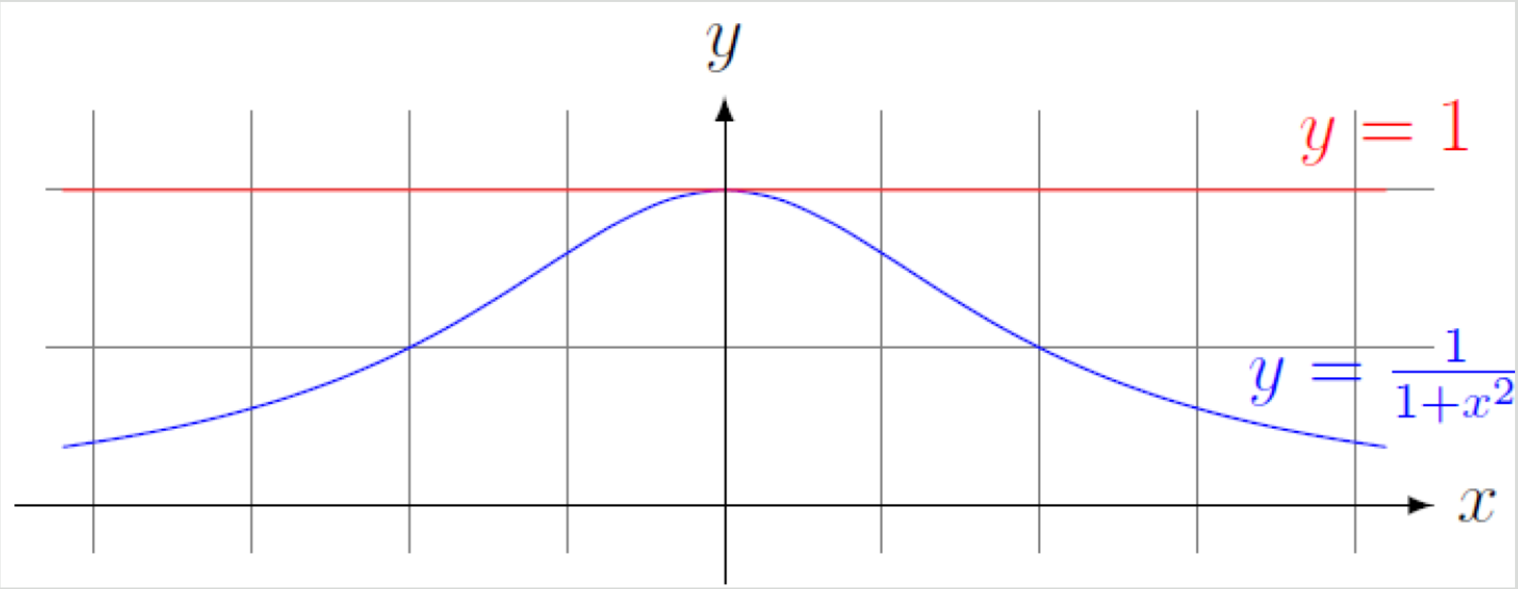


Fig. 1

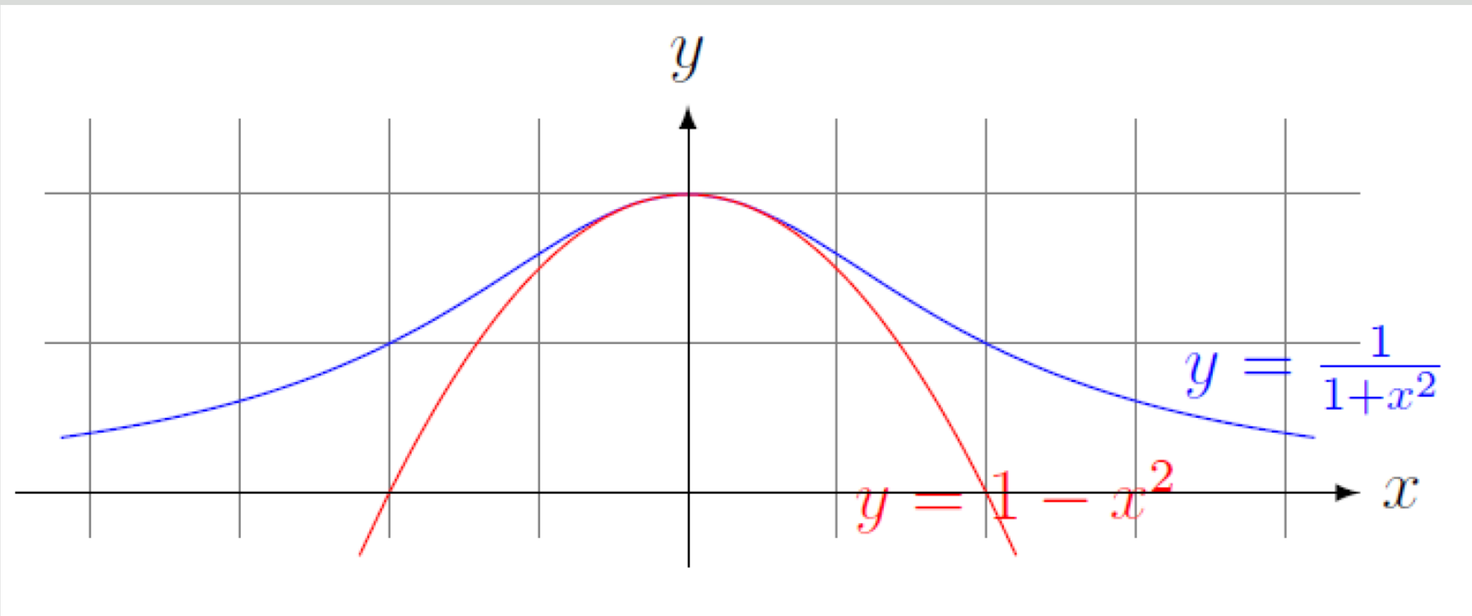


Fig. 2

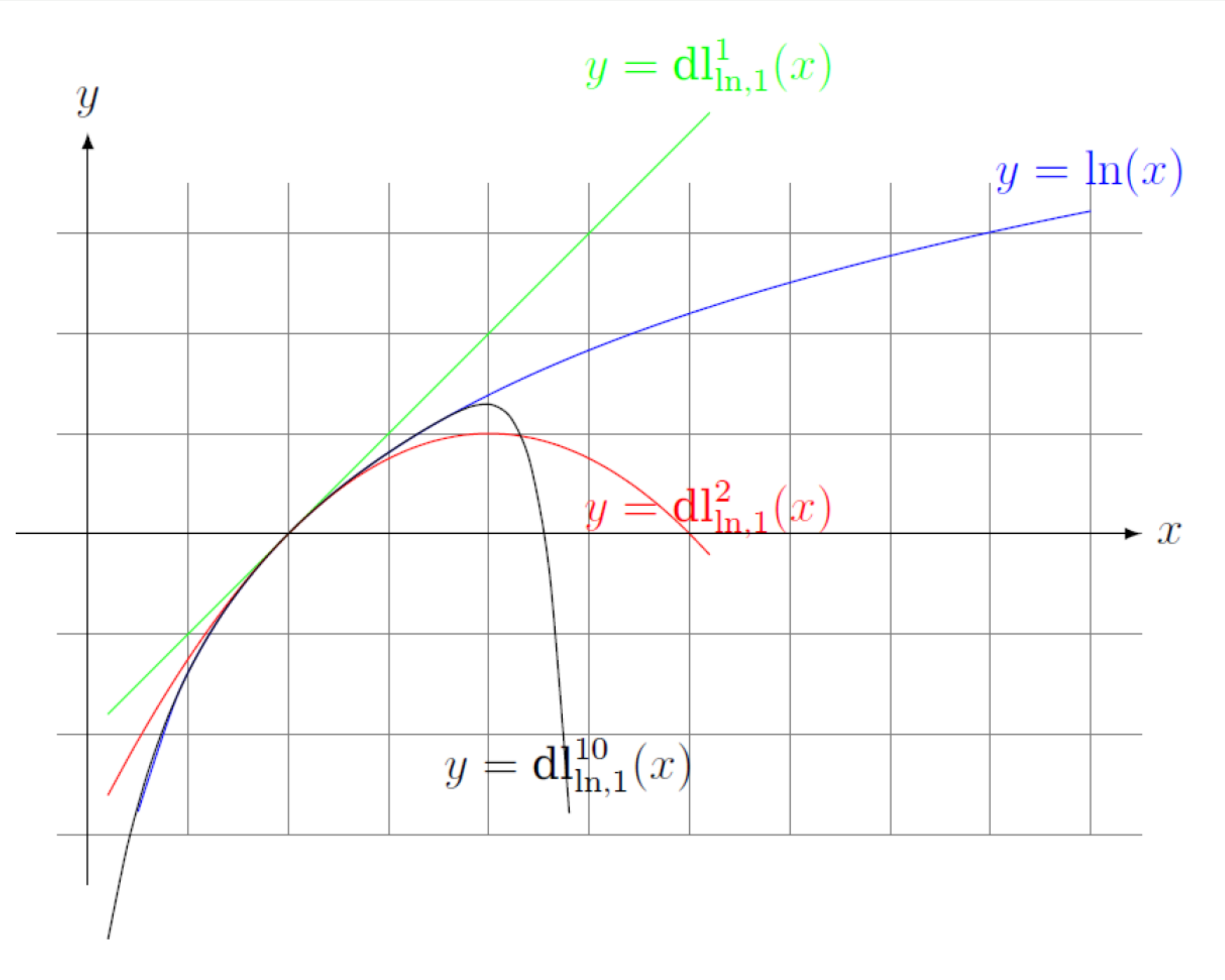


Fig. 3