Enseignant: Bossoney
SCM - MAN
4 Juillet 2023
Durée : 120 minutes

1

Dalton Joe

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- La note maximale est accordée dès 20 points acquis. La dernière question permet l'acquisition de 2 points supplémentaires.

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 (2 points)
Si $[(7,3)] \in \mathbb{Z}$, alors:

- ☐ $(14,6) \in [(7,3)]$.
- ☐ $(4,0) = [(7,3)]$.
- ☐ $(-3,-7) = [(7,3)]$.
- ☐ $(5,1) \in [(7,3)]$.

Question 2 (2 points)
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels, croissante et bornée. La coupure de Dedekind représentant sa limite dans $\mathbb{R}$ est

- ☐ $A = \{r \in \mathbb{Q} : \exists n \in \mathbb{N},\, r \leq a_n\}$, $B = \mathbb{Q} \setminus A$.
- ☐ $B = \{r \in \mathbb{Q} : \forall n \in \mathbb{N},\, r \geq a_n\}$, $A = \mathbb{Q} \setminus B$.
- ☐ $A = \cap_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}_{<a_n}$, $B = \mathbb{Q} \setminus A$.
- ☐ $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, $B = \mathbb{Q} \setminus A$.

Question 3 (2 points)
Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble borné et non vide. Alors:

- ☐ l'ensemble des minorants de E possède un maximum.
- ☐ comme E est majoré, son maximum est égal à son supremum.
- ☐ l'ensemble des majorants de E possède un maximum.
- ☐ E n'a pas de maximum.

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 4: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5
☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Pour $\alpha \in [0, 4]$ on définit la fonction f_α par

$$\forall x \in [0,1], \quad f_\alpha(x) = \alpha x(1-x).$$

(a) Montrer que $\forall \alpha \in [0, 4]$, $\mathrm{Im}(f) \subset [0, 1]$.

(b) Trouver un point fixe x_α non nul pour f_α si $\alpha > 1$.

(c) Pour $1 < \alpha < 3$, trouver un intervalle fermé $I_\alpha \subset [0, 1]$, contenant un voisinage de x_α et tel que $f_\alpha\big|_{I_\alpha}$ est contractante.

Solution

(a) Première solution: Puisque f_α est la parabole $y = -\alpha x^2 + \alpha x$, on sait que ses racines se trouvent en $x = 0$ et $x = 1$, et que son maximum égale son sommet: en l'occurence, ce sommet se situe en $(\frac{1}{2}, \frac{\alpha}{4})$. On en conclut que $\mathrm{Im}(f_\alpha) = [0, \frac{\alpha}{4}] \subset [0, 1]$ si $0 \leq \alpha \leq 4$.
Deuxième solution: On peut procéder à une petite étude de fonction: $f'_\alpha = \alpha(1 - 2x)$. La dérivée est donc positive pour $x \leq \frac{1}{2}$ et négative pour $x \geq \frac{1}{2}$. Le maximum de f_α est donc atteint en $x = \frac{1}{2}$ et vaut $\frac{\alpha}{4}$. Les valeurs minimales sont alors sur le bord de l'intervalle $[0, 1]$: $0 = f(0) = f(1)$. On conclut que $\mathrm{Im}(f_\alpha) = [0, \frac{\alpha}{4}] \subset [0, 1]$ si $0 \leq \alpha \leq 4$.

(b) Pour trouver un point fixe on doit résoudre $\alpha x(1 - x) = x \Leftrightarrow \alpha x^2 + (1 - \alpha)x = 0$. On trouve alors $x_\alpha = \frac{\alpha-1}{\alpha} \in]0, 1]$ si $\alpha > 1$.

(c) Par calcul, on trouve $f'_\alpha(x_\alpha) = -2\alpha x_\alpha + \alpha = 2 - \alpha$. Donc, si $1 < \alpha < 3$, $|f'_\alpha(x_\alpha)| < 1$.
Par ailleurs,

$$|f'_\alpha(x)| < 1 \Leftrightarrow -1 < f'_\alpha(x) < 1 \Leftrightarrow -1 < \alpha - 2\alpha x < 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha - 1}{2\alpha} < x < \frac{\alpha + 1}{2\alpha}.$$

Ainsi, pour tout intervalle fermé $I_\alpha \subset]\frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha}[$, on aura $\max_{x \in I_\alpha} |f'(x)| < 1$. Donc, par le théorème des accroissements finis, et si $x, y \in I_\alpha$, $|f(x) - f(y)| \leq \max_{x \in I_\alpha} |f'(x)|\,|x - y|$, et f_α sera contractante.
Ainsi, tout intervalle fermé $I_\alpha \subset]\frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha}[$ avec $x_\alpha \in I_\alpha$ conviendra.

Question 5: *Cette question est notée sur 4 points.*

☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5
☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

Pour cet exercice, f désignera les fonctions sin, cos, sinh et cosh. Pour chacune de ces fonctions,

(a) Calculer $\mathrm{dl}^n_{f,0}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

(b) Evaluer $\mathrm{dl}^n_{f,0}(iy)$ pour $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

(c) Sachant que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{dl}^n_{f,0}(x) = f(x)$, calculer $\lim_{n\to\infty} \mathrm{dl}^n_{f,0}(iy)$ pour $y \in \mathbb{R}$.

Solution

(a) Les dérivées des fonctions en question sont

$$\frac{d^n}{dx^n}\sin(x) = \begin{cases} (-1)^{n/2}\sin(x) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ (-1)^{(n-1)/2}\cos(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\cos(x) = \begin{cases} (-1)^{n/2}\cos(x) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ (-1)^{(n+1)/2}\sin(x) & \text{sinon} \end{cases}.$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\sinh(x) = \begin{cases} \sinh(x) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \cosh(x) & \text{sinon} \end{cases}.$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\cosh(x) = \begin{cases} \cosh(x) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \sinh(x) & \text{sinon} \end{cases}.$$

Evaluant ces dérivées en $x = 0$ et utilisant la définition des développements limités, on arrive à

$$\mathrm{dl}^n_{\sin,0}(x) = \sum_{0\le 2k+1\le n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\mathrm{dl}^n_{\cos,0}(x) = \sum_{0\le 2k\le n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

$$\mathrm{dl}^n_{\sinh,0}(x) = \sum_{0\le 2k+1\le n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\mathrm{dl}^n_{\cosh,0}(x) = \sum_{0\le 2k\le n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

(b) Evaluant les développements limités en iy on obtient

$$\mathrm{dl}^n_{\sin,0}(iy) = \sum_{0\le 2k+1\le n} (-1)^k \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} = i\,\mathrm{dl}^n_{\sinh,0}(y),$$

$$\mathrm{dl}^n_{\cos,0}(iy) = \sum_{0\le 2k\le n} (-1)^k \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} = \mathrm{dl}^n_{\cosh,0}(y),$$

$$\mathrm{dl}^n_{\sinh,0}(iy) = \sum_{0\le 2k+1\le n} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} = i\,\mathrm{dl}^n_{\sin,0}(y),$$

$$\mathrm{dl}^n_{\cosh,0}(iy) = \sum_{0\le 2k\le n} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} = \mathrm{dl}^n_{\cos,0}(y).$$

(c) Utilisant le fait que toutes ces fonctions sont entières, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{dl}^n_{\sin,0}(iy) = i\sinh(y),$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{dl}^n_{\cos,0}(iy) = \cosh(y),$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{dl}^n_{\sinh,0}(iy) = i\sin(y),$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{dl}^n_{\cosh,0}(iy) = \cos(y).$$

Question 6: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Soit I un idéal d'un anneau commutatif $\mathcal{A}$ (on peut, sans perte de généralité, prendre $\mathbb{Z}$, $\mathbb{K}[X]$ ou $C(\mathbb{R})$ pour l'anneau en question). On définit le **radical** $\sqrt{I}$ de I comme

$$\sqrt{I} := \{x \in \mathcal{A} : \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ t.q. } x^n \in I\}.$$

(a) Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de $\mathcal{A}$.

(b) Si $\mathcal{A} = \mathbb{Z}$ et que $g = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$ est la factorisation en premiers du générateur de I, quel est le générateur de $\sqrt{I}$? Justifier clairement votre réponse.

Solution

(a) $\sqrt{I}$ n'est pas vide, puisque $0 \in \sqrt{I}$.
Si $x, y \in \sqrt{I}$ et si $x^n, y^m \in \sqrt{I}$, on calcule

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+m} &= \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} x^k y^{n+m-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+m}{k} x^k y^{n+m-k} + \sum_{k=n+1}^{n+m} \binom{n+m}{k} x^k y^{n+m-k} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n+m}{k} x^k y^{n-k}\right) y^m + x^n \left(\sum_{k=n+1}^{n+m} \binom{n+m}{k} x^{k-n} y^{n+m-k}\right).\end{aligned}$$

Les deux termes sont dans I, puisque ce dernier est un idéal est que $x^n, y^m \in I$. Donc, $(x+y)^{n+m} \in I$ et par conséquent, $x + y \in \sqrt{I}$.
Si $x \in \sqrt{I}$ et $y \in \mathcal{A}$, il doit exister $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n \in I$. Mais alors, $(xy)^n = x^n y^n \in I$ et donc, $xy \in \sqrt{I}$.

(b) Si $y \in \sqrt{I}$, $y^m \in I$ pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$. Donc, g divise y^m. Donc, par le TFAr, tous les facteurs premiers de g sont aussi des facteurs premier de y. Donc, $p_1 p_2, \dots p_k$ divise y^m. Par conséquent, $p_1 p_2, \dots p_k$ divise y.
Si $p_1 p_2, \dots p_k$ divise $y \in \mathcal{A}$, alors $g = p_1^{n_1} p_2^{n_2}, \dots p_k^{n_k}$ divise $y^{\max\{n_1, \dots, n_k\}}$. Ainsi, ce dernier élément est dans $\sqrt{I}$.
En conclusion, $y \in \sqrt{I}$ ssi y se divise par $p_1 p_2, \dots p_k$. Le générateur de $\sqrt{I}$ est donc $p_1 p_2, \dots p_k$.

Question bonus : *Cette question est notée sur 2 points.*

☐ .5 ☐ .5
☐ 0 ☐ 1 ☐ 2

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ un nombre non premier. Montrer que si tout diviseur $1 < d < n$ de n vérifie $2d > n-1$, alors $n = 4$.

(b) Soit $n \geq 5$ un nombre naturel. Montrer que $\frac{(n-1)!}{n} \in \mathbb{N}$ ssi n n'est pas premier.

(c) Déterminer $f^{-1}\{0\}$ et $f^{-1}\{1\}$ pour

$$\mathbb{N}^* \ni n \mapsto f(n) := 1 - \left\lfloor \cos^2\left(\frac{(n-1)!}{n}\pi\right) \right\rfloor - \delta_{n\,4},$$

où $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est la fonction partie entière et $\delta_{n\,4}$ est le symbole de Kronecker.

Solution

(a) si $n > 0$ n'est pas premier il possède au moins deux diviseurs $1 < d_1, d_2 < n$. Si $2d_1, 2d_2 > n-1$, on a alors $4d_1d_2 = 4n > (n-1)^2 = n^2 - 2n + 1$. Donc, $0 > n^2 - 6n + 1$. Les seuls nombres naturels vérifiant cette inégalité sont 1, 2, 3, 4 et 5. Si de plus $n \geq 2$, il ne reste que $n = 4$.

(b) Si $n \geq 5$ n'est pas premier, alors d'après le point précédent, il existe des diviseurs $1 < d_1, d \leq 2 < n$ de n, tels que $2d_1 \leq n-1$.
Si $d_1 < d_2$, alors $d_1, d_2 \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ et $n = d_1d_2$ divise $(n-1)!$.
Si $d_1 = d_2$, alors $d_2 < 2d_1 \leq n$ et $d_2, 2d_1 \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$. A nouveau, $d_1d_2 = n$ divise $(n-1)!$.
Si $n \geq 5$ est premier, alors tous les éléments de $\{1, 2, \dots, n-1\}$ sont premiers avec n. $(n-1)!$ et n sont donc aussi premiers entre eux et n ne divise pas $(n-1)!$

(c) D'après le point précédent, pour $n \geq 5$, $\frac{(n-1)!}{n}\pi$ est un multiple de π ssi n n'est pas premier. Donc, $\cos\left(\frac{(n-1)!}{n}\pi\right) = \pm 1$ ssi n n'est pas premier. Donc $\left\lfloor \cos^2\left(\frac{(n-1)!}{n}\right) \right\rfloor = 1$ ssi n n'est pas premier et égal 0 sinon. Donc, pour $n \geq 5$, $f(n)$ est la fonction indicatrice sur les nombres premiers.
Si $n = 4$, $f(n) = 0$. Si $n = 3$, $f(3) = 1$, si $n = 2$, $f(2) = 1$ et $f(1) = 0$. Donc, f est la fonction indicatrice sur les nombres premier. Donc,

$$f^{-1}\{0\} = \{n \in \mathbb{N}^* \,:\, n \text{ n'est pas premier}\}, \quad f^{-1}\{1\} = \{n \in \mathbb{N}^* \,:\, n \text{ est premier}\}.$$

Enseignant: Bossoney
SCM - MAN
4 Juillet 2023
Durée : 120 minutes

1

Dalton Jack

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- La note maximale est accordée dès 20 points acquis. La dernière question permet l'acquisition de 2 points supplémentaires.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 (2 points)
Si $[(7,3)] \in \mathbb{Z}$, alors:

- ☐ $(5,1) \in [(7,3)]$.
- ☐ $(-3,-7) = [(7,3)]$.
- ☐ $(14,6) \in [(7,3)]$.
- ☐ $(4,0) = [(7,3)]$.

Question 2 (2 points)
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels, croissante et bornée. La coupure de Dedekind représentant sa limite dans $\mathbb{R}$ est

- ☐ $A = \{r \in \mathbb{Q} \,:\, \exists n \in \mathbb{N},\, r \leq a_n\}$, $B = \mathbb{Q} \setminus A$.
- ☐ $A = \{a_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \mathbb{Q} \setminus A$.
- ☐ $B = \{r \in \mathbb{Q} \,:\, \forall n \in \mathbb{N},\, r \geq a_n\}$, $A = \mathbb{Q} \setminus B$.
- ☐ $A = \cap_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}_{<a_n}$, $B = \mathbb{Q} \setminus A$.

Question 3 (2 points)
Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble borné et non vide. Alors:

- ☐ E n'a pas de maximum.
- ☐ comme E est majoré, son maximum est égal à son supremum.
- ☐ l'ensemble des majorants de E possède un maximum.
- ☐ l'ensemble des minorants de E possède un maximum.

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 4: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5
☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Pour $\alpha \in [0,4]$ on définit la fonction f_α par

$$\forall x \in [0,1], \quad f_\alpha(x) = \alpha x(1-x).$$

(a) Montrer que $\forall \alpha \in [0,4]$, $\mathrm{Im}(f) \subset [0,1]$.

(b) Trouver un point fixe x_α non nul pour f_α si $\alpha > 1$.

(c) Pour $1 < \alpha < 3$, trouver un intervalle fermé $I_\alpha \subset [0,1]$, contenant un voisinage de x_α et tel que $f_\alpha\big|_{I_\alpha}$ est contractante.

Solution

(a) Première solution: Puisque f_α est la parabole $y = -\alpha x^2 + \alpha x$, on sait que ses racines se trouvent en $x = 0$ et $x = 1$, et que son maximum égale son sommet: en l'occurence, ce sommet se situe en $(\frac{1}{2}, \frac{\alpha}{4})$. On en conclut que $\mathrm{Im}(f_\alpha) = [0, \frac{\alpha}{4}] \subset [0,1]$ si $0 \leq \alpha \leq 4$.
Deuxième solution: On peut procéder à une petite étude de fonction: $f'_\alpha = \alpha(1-2x)$. La dérivée est donc positive pour $x \leq \frac{1}{2}$ et négative pour $x \geq \frac{1}{2}$. Le maximum de f_α est donc atteint en $x = \frac{1}{2}$ et vaut $\frac{\alpha}{4}$. Les valeurs minimales sont alors sur le bord de l'intervalle $[0,1]$: $0 = f(0) = f(1)$. On conclut que $\mathrm{Im}(f_\alpha) = [0, \frac{\alpha}{4}] \subset [0,1]$ si $0 \leq \alpha \leq 4$.

(b) Pour trouver un point fixe on doit résoudre $\alpha x(1-x) = x \Leftrightarrow \alpha x^2 + (1-\alpha)x = 0$. On trouve alors $x_\alpha = \frac{\alpha-1}{\alpha} \in]0,1]$ si $\alpha > 1$.

(c) Par calcul, on trouve $f'_\alpha(x_\alpha) = -2\alpha x_\alpha + \alpha = 2 - \alpha$. Donc, si $1 < \alpha < 3$, $|f'_\alpha(x_\alpha)| < 1$.
Par ailleurs,

$$|f'_\alpha(x)| < 1 \Leftrightarrow -1 < f'_\alpha(x) < 1 \Leftrightarrow -1 < \alpha - 2\alpha x < 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha-1}{2\alpha} < x < \frac{\alpha+1}{2\alpha}.$$

Ainsi, pour tout intervalle fermé $I_\alpha \subset]\frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha}[$, on aura $\max_{x \in I_\alpha} |f'(x)| < 1$. Donc, par le théorème des accroissements finis, et si $x, y \in I_\alpha$, $|f(x) - f(y)| \leq \max_{x \in I_\alpha} |f'(x)| \, |x - y|$, et f_α sera contractante.
Ainsi, tout intervalle fermé $I_\alpha \subset]\frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha}[$ avec $x_\alpha \in I_\alpha$ conviendra.

Question 5: *Cette question est notée sur 4 points.*

.5 .5 .5 .5
0 1 2 3 4

Pour cet exercice, f désignera les fonctions sin, cos, sinh et cosh. Pour chacune de ces fonctions,

(a) Calculer $\mathrm{dl}^n_{f,0}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

(b) Evaluer $\mathrm{dl}^n_{f,0}(iy)$ pour $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

(c) Sachant que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{dl}^n_{f,0}(x) = f(x)$, calculer $\lim_{n\to\infty} \mathrm{dl}^n_{f,0}(iy)$ pour $y \in \mathbb{R}$.

Solution

(a) Les dérivées des fonctions en question sont

$$\frac{d^n}{dx^n}\sin(x) = \begin{cases} (-1)^{n/2}\sin(x) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ (-1)^{(n-1)/2}\cos(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\cos(x) = \begin{cases} (-1)^{n/2}\cos(x) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ (-1)^{(n+1)/2}\sin(x) & \text{sinon} \end{cases}.$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\sinh(x) = \begin{cases} \sinh(x) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \cosh(x) & \text{sinon} \end{cases}.$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\cosh(x) = \begin{cases} \cosh(x) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \sinh(x) & \text{sinon} \end{cases}.$$

Evaluant ces dérivées en $x = 0$ et utilisant la définition des développements limités, on arrive à

$$\mathrm{dl}^n_{\sin,0}(x) = \sum_{0\le 2k+1\le n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\mathrm{dl}^n_{\cos,0}(x) = \sum_{0\le 2k\le n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

$$\mathrm{dl}^n_{\sinh,0}(x) = \sum_{0\le 2k+1\le n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\mathrm{dl}^n_{\cosh,0}(x) = \sum_{0\le 2k\le n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

(b) Evaluant les développements limités en iy on obtient

$$\mathrm{dl}^n_{\sin,0}(iy) = \sum_{0\le 2k+1\le n} (-1)^k \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} = i\mathrm{dl}^n_{\sinh,0}(y),$$

$$\mathrm{dl}^n_{\cos,0}(iy) = \sum_{0\le 2k\le n} (-1)^k \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} = \mathrm{dl}^n_{\cosh,0}(y),$$

$$\mathrm{dl}^n_{\sinh,0}(iy) = \sum_{0\le 2k+1\le n} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} = i\mathrm{dl}^n_{\sin,0}(y),$$

$$\mathrm{dl}^n_{\cosh,0}(iy) = \sum_{0\le 2k\le n} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} = \mathrm{dl}^n_{\cos,0}(y).$$

(c) Utilisant le fait que toutes ces fonctions sont entières, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{dl}^n_{\sin,0}(iy) = i\sinh(y),$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{dl}^n_{\cos,0}(iy) = \cosh(y),$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{dl}^n_{\sinh,0}(iy) = i\sin(y),$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{dl}^n_{\cosh,0}(iy) = \cos(y).$$

Question 6: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Soit I un idéal d'un anneau commutatif $\mathcal{A}$ (on peut, sans perte de généralité, prendre $\mathbb{Z}$, $\mathbb{K}[X]$ ou $C(\mathbb{R})$ pour l'anneau en question). On définit le **radical** $\sqrt{I}$ de I comme

$$\sqrt{I} := \{x \in \mathcal{A} : \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ t.q. } x^n \in I\}.$$

(a) Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de $\mathcal{A}$.

(b) Si $\mathcal{A} = \mathbb{Z}$ et que $g = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$ est la factorisation en premiers du générateur de I, quel est le générateur de $\sqrt{I}$? Justifier clairement votre réponse.

Solution

(a) $\sqrt{I}$ n'est pas vide, puisque $0 \in \sqrt{I}$.
Si $x, y \in \sqrt{I}$ et si $x^n, y^m \in \sqrt{I}$, on calcule

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+m} &= \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} x^k y^{n+m-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+m}{k} x^k y^{n+m-k} + \sum_{k=n+1}^{n+m} \binom{n+m}{k} x^k y^{n+m-k} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n+m}{k} x^k y^{n-k} \right) y^m + x^n \left(\sum_{k=n+1}^{n+m} \binom{n+m}{k} x^{k-n} y^{n+m-k} \right).
\end{aligned}$$

Les deux termes sont dans I, puisque ce dernier est un idéal est que $x^n, y^m \in I$. Donc, $(x+y)^{n+m} \in I$ et par conséquent, $x + y \in \sqrt{I}$.
Si $x \in \sqrt{I}$ et $y \in \mathcal{A}$, il doit exister $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n \in I$. Mais alors, $(xy)^n = x^n y^n \in I$ et donc, $xy \in \sqrt{I}$.

(b) Si $y \in \sqrt{I}$, $y^m \in I$ pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$. Donc, g divise y^m. Donc, par le TFAr, tous les facteurs premiers de g sont aussi des facteurs premier de y. Donc, $p_1 p_2, \dots p_k$ divise y^m. Par conséquent, $p_1 p_2, \dots p_k$ divise y.
Si $p_1 p_2, \dots p_k$ divise $y \in \mathcal{A}$, alors $g = p_1^{n_1} p_2^{n_2}, \dots p_k^{n_k}$ divise $y^{\max\{n_1,\dots,n_k\}}$. Ainsi, ce dernier élément est dans $\sqrt{I}$.
En conclusion, $y \in \sqrt{I}$ ssi y se divise par $p_1 p_2, \dots p_k$. Le générateur de $\sqrt{I}$ est donc $p_1 p_2, \dots p_k$.

Question bonus : *Cette question est notée sur 2 points.*

☐ .5 ☐ .5
☐ 0 ☐ 1 ☐ 2

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ un nombre non premier. Montrer que si tout diviseur $1 < d < n$ de n vérifie $2d > n-1$, alors $n = 4$.

(b) Soit $n \geq 5$ un nombre naturel. Montrer que $\frac{(n-1)!}{n} \in \mathbb{N}$ ssi n n'est pas premier.

(c) Déterminer $f^{-1}\{0\}$ et $f^{-1}\{1\}$ pour

$$\mathbb{N}^* \ni n \mapsto f(n) := 1 - \left\lfloor \cos^2\left(\frac{(n-1)!}{n}\pi\right)\right\rfloor - \delta_{n\,4},$$

où $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est la fonction partie entière et $\delta_{n\,4}$ est le symbole de Kronecker.

Solution

(a) si $n > 0$ n'est pas premier il possède au moins deux diviseurs $1 < d_1, d_2 < n$. Si $2d_1, 2d_2 > n-1$, on a alors $4d_1d_2 = 4n > (n-1)^2 = n^2 - 2n + 1$. Donc, $0 > n^2 - 6n + 1$. Les seuls nombres naturels vérifiant cette inégalité sont 1, 2, 3, 4 et 5. Si de plus $n \geq 2$, il ne reste que $n = 4$.

(b) Si $n \geq 5$ n'est pas premier, alors d'après le point précédent, il existe des diviseurs $1 < d_1, d \leq 2 < n$ de n, tels que $2d_1 \leq n-1$.
Si $d_1 < d_2$, alors $d_1, d_2 \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$ et $n = d_1 d_2$ divise $(n-1)!$.
Si $d_1 = d_2$, alors $d_2 < 2d_1 \leq n$ et $d_2, 2d_1 \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$. A nouveau, $d_1 d_2 = n$ divise $(n-1)!$.
Si $n \geq 5$ est premier, alors tous les éléments de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ sont premiers avec n. $(n-1)!$ et n sont donc aussi premiers entre eux et n ne divise pas $(n-1)!$

(c) D'après le point précédent, pour $n \geq 5$, $\frac{(n-1)!}{n}\pi$ est un multiple de π ssi n n'est pas premier. Donc, $\cos\left(\frac{(n-1)!}{n}\pi\right) = \pm 1$ ssi n n'est pas premier. Donc $\left\lfloor \cos^2\left(\frac{(n-1)!}{n}\right)\right\rfloor = 1$ ssi n n'est pas premier et égal 0 sinon. Donc, pour $n \geq 5$, $f(n)$ est la fonction indicatrice sur les nombres premiers.
Si $n = 4$, $f(n) = 0$. Si $n = 3$, $f(3) = 1$, si $n = 2$, $f(2) = 1$ et $f(1) = 0$. Donc, f est la fonction indicatrice sur les nombres premier. Donc,

$$f^{-1}\{0\} = \{n \in \mathbb{N}^* \,:\, n \text{ n'est pas premier}\}, \quad f^{-1}\{1\} = \{n \in \mathbb{N}^* \,:\, n \text{ est premier}\}.$$