**Enseignants: Bossoney**
**SCM - MàN - CMS**
**5 Juillet 2022**
**Durée : 120 minutes**

1

# Dalton Joe

SCIPER : **999999**

**Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 8 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.**

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer
Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer
NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer
Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

## Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

**Question 1** (2 points)
Laquelle de ces affirmations suivantes est vraie?

- ☐ Toute suite de Cauchy converge vers son supremum.
- ☐ Toute suite de Cauchy converge vers un irrationnel.
- ☐ Une suite qui converge peut ne pas être de Cauchy
- ■ Toute suite de Cauchy est bornée.

**Question 2** (2 points)
Soit $P = M\,D + R$, la division Euclidienne (ou division avec reste) du polynôme $P$ par $D$. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est correcte?

- ☐ $R$ est irréductible.
- ■ $\deg(P) = \deg(M) + \deg(D)$.
- ☐ $M$ est irréductible.
- ☐ $\deg(P) = \deg(M)\deg(D) + \deg(R)$,

**Question 3** (2 points)
Parmi les propriétés suivantes, laquelle permet d'affirmer qu'une coupure de Dedekind $(A, B)$ représente un nombre rationnel?

- ■ $B$ possède un minimum.
- ☐ $A$ possède un maximum
- ☐ $A$ n'a pas de maximum.
- ☐ $A \cap B$ possède un unique élément.

## Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

**Question 4:** *Cette question est notée sur 5 points.*

.5 .5 .5 .5 .5

0 1 2 3 4 5

(a) Calculer $\mathrm{dl}^n_{\ln,x_0}(x)$ pour $x_0 = 2$.

(b) Monter que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{dl}^n_{\ln,2}(x) = \ln(x)$ pour tout $x \in ]2,4[$.

(c) Livrer une série numérique pour $\ln(3)$.

### Solution

(a) On a que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{d^n}{dx^n}\ln(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n}$. 1 pnt
Ainsi,

$$\mathrm{dl}^n_{\ln,2}(x) = \ln(2) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k2^k}(x-2)^k. \quad 1 \text{ pnt}$$

(b) Le terme de correction pour le développement limité en $x \in ]2,4[$ est

$$r^n_{\ln,2}(x) = \frac{(-1)^{k+1}}{(n+1)\xi^{n+1}}(x-2)^{n+1}, \ \frac{1}{2} \text{ pnt} \quad \xi \in ]2,x[. \quad \frac{1}{2} \text{ pnt}$$

Clairement, $|r^n_{\ln,2}(x)| \leq \frac{1}{n+1}\frac{(4-2)^{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{1}{n+1}$ $\frac{1}{2}$ pnt
si $x \in ]2,4[$ et $\xi \in ]2,x[$. $\frac{1}{2}$ pnt
Par conséquent, $\forall x \in ]2,4[$, $\lim_{n\infty} r^n_{\ln,2}(x) = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \mathrm{dl}^n_{\ln,2}(x) = \ln(x)$.

(Solution alternative:
On peut aussi remarquer que

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt = \int_1^x \frac{1}{2-(2-t)}dt = \frac{1}{2}\int_1^x \frac{1}{1-\frac{2-t}{2}}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^x \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{(2-t)^k}{2^k} + \frac{((2-t)/2)^{n+1}}{1-\frac{2-t}{2}}\Big)dt = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\int_1^x \frac{(2-t)^k}{2^k}dt + \int_1^x \frac{(2-t)^{n+1}}{2^{n+1}t}dt \quad \frac{1}{2} \text{ pnt}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{(2-t)^{k+1}}{(k+1)2^k}\Big|_1^x + \int_1^x \frac{(2-t)^{n+1}}{2^{n+1}t}dt = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\frac{(t-2)^k}{k2^k}\Big|_1^x + \int_1^x \frac{(2-t)^{n+1}}{2^{n+1}t}dt$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k2^k} + \sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k2^k}(x-2)^k + \int_1^x \frac{(2-t)^{n+1}}{2^{n+1}t}dt. \quad \frac{1}{2} \text{ pnt}$$

On a donc

$$|\ln(x) - \mathrm{dl}^{n+1}_{\ln,2}(x)| = \Big|\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k2^k} - \ln(2) + \int_1^x \frac{(2-t)^{n+1}}{2^{n+1}t}dt\Big|$$

$$\leq \Big|\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k2^k} - \ln(2)\Big| + \Big|\int_1^x \frac{(2-t)^{n+1}}{2^{n+1}t}dt\Big|. \quad \frac{1}{2} \text{ pnt}$$

Or, on sait déjà par l'indication, que $\lim_{n\to\infty} |\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k2^k} - \ln(2)| = 0$. Pour l'intégrale, on remarque que

$$|\int_1^x \frac{(2-t)^{n+1}}{2^{n+1}t}dt| \leq \int_1^x |\frac{(2-t)^{n+1}}{2^{n+1}t}|dt \leq \frac{1}{\min\{1,x\}2^{n+1}(n+2)}\big(|x-2|^{n+2}+1\big), \qquad \frac{1}{2} \text{ pnt}$$

valeur qui tend vers 0 si $x \in ]0,4[$.$\Big)$

(c) Appliquant les deux derniers points à $x = 3$ nous donne

$$\ln(3) = \ln(2) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k2^k} \qquad 1 \text{ pnt} \Big( = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \big(\frac{2^k+1}{2^k}\big).\Big)$$

**Question 5:** *Cette question est notée sur 4 points.*

☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5
■0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

On définit une relation $\sim$ entre deux nombres réels $x, y \in \mathbb{R}$ comme suit:

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q}.$$

(a) Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

(b) Quelle est la classe d'équivalence $[0]$?

**Solution**

(a) $\sim$ est réflexive: en effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$ $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$, d'où $x \sim x$. 1 pnt
$\sim$ est symétrique: en effet, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Q}$, $\Leftrightarrow y \sim x$. 1 pnt
$\sim$ est transitive: en effet, pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \sim y$ et $y \sim z \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ et $y - z \in \mathbb{Q} \Rightarrow x - z \in \mathbb{Q}$, $\Leftrightarrow x \sim z$. 1 pnt

(b) La classe d'équivalence de 0 est formée de tous les nombres $x \in \mathbb{R}$, tels que $x \sim 0$, i.e. $x - 0 \in \mathbb{Q}$. $\frac{1}{2}$ pnt
Donc, $[0] = \mathbb{Q}$. $\frac{1}{2}$ pnt

**Question 6:** *Cette question est notée sur 5 points.*

☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5
■ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Soient $P; Q, R \in \mathbb{K}[X]$. On considère l'ensemble

$$J := \{AP + BQ \;:\; A, B \in \mathbb{K}[X]\}.$$

(a) Montrer que $J$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

(b) Quelle condition doit vérifier $R$ pour que l'équation $AP+BQ = R$ possède une solution $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$?

**Solution**

(a) $J \neq \emptyset$, car $0 \in J$. 1 pnt
Si $R, S \in J$, il existe par définition $A, B, C, D \in \mathbb{K}[X]$, tels que $R = AP + BQ$ et $S = CP + DQ$. $\frac{1}{2}$ pnt
Mais alors, $R + S = AP + BQ + CP + DQ = (A + C)P + (B + D)Q \in J$. $\frac{1}{2}$ pnt
Si $R \in J$ et $S \in \mathbb{K}[X]$, il existe $A, B \in \mathbb{K}[X]$, tels que $R = AP + BQ$, $\frac{1}{2}$ pnt
et donc $RS = (AP + BQ)S = ASP + BSQ \in J$. $\frac{1}{2}$ pnt

(b) Comme $J$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, on sait que $J = D\mathbb{K}[X]$ $\frac{1}{2}$ pnt
où $D = \mathrm{PGCD}(P, Q)$. $\frac{1}{2}$ pnt
Ainsi, $AP + BQ = R$ possède une solution $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ ssi $R \in D\mathbb{K}[X]$, $\frac{1}{2}$ pnt
ssi $R$ est divisible par le $\mathrm{PGCD}(P, Q)$. $\frac{1}{2}$ pnt

**Enseignants: Bossoney**
**SCM - MàN - CMS**
**5 Juillet 2022**
**Durée : 120 minutes**

1

# Dalton Jack

SCIPER : **999999**

**Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 8 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.**

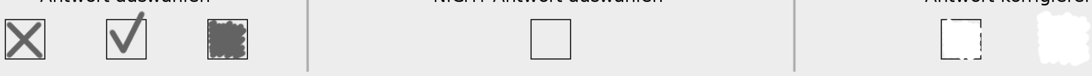
- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

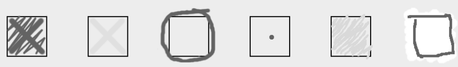
choisir une réponse | select an answer
Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer
NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer
Antwort korrigieren



ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte



## Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

**Question 1** (2 points)
Laquelle de ces affirmations suivantes est vraie?

- [x] Toute suite de Cauchy est bornée.
- [ ] Une suite qui converge peut ne pas être de Cauchy
- [ ] Toute suite de Cauchy converge vers son supremum.
- [ ] Toute suite de Cauchy converge vers un irrationnel.

**Question 2** (2 points)
Soit $P = M\,D + R$, la division Euclidienne (ou division avec reste) du polynôme $P$ par $D$. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est correcte?

- [ ] $R$ est irréductible.
- [ ] $\deg(P) = \deg(M)\deg(D) + \deg(R)$,
- [x] $\deg(P) = \deg(M) + \deg(D)$.
- [ ] $M$ est irréductible.

**Question 3** (2 points)
Parmi les propriétés suivantes, laquelle permet d'affirmer qu'une coupure de Dedekind $(A, B)$ représente un nombre rationnel?

- [ ] $A$ n'a pas de maximum.
- [ ] $A$ possède un maximum
- [ ] $A \cap B$ possède un unique élément.
- [x] $B$ possède un minimum.

## Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

**Question 4:** *Cette question est notée sur 5 points.*

.5 .5 .5 .5 .5

0 1 2 3 4 5

(a) Calculer $\mathrm{dl}^n_{\ln,x_0}(x)$ pour $x_0 = 2$.

(b) Monter que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{dl}^n_{\ln,2}(x) = \ln(x)$ pour tout $x \in ]2,4[$.

(c) Livrer une série numérique pour $\ln(3)$.

**Solution**

(a) On a que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{d^n}{dx^n}\ln(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n}$. 1 pnt
Ainsi,

$$\mathrm{dl}^n_{\ln,2}(x) = \ln(2) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k2^k}(x-2)^k. \quad 1 \text{ pnt}$$

(b) Le terme de correction pour le développement limité en $x \in ]2,4[$ est

$$r^n_{\ln,2}(x) = \frac{(-1)^{k+1}}{(n+1)\xi^{n+1}}(x-2)^{n+1}, \quad \frac{1}{2}\text{ pnt} \quad \xi \in ]2,x[. \quad \frac{1}{2}\text{ pnt}$$

Clairement, $|r^n_{\ln,2}(x)| \leq \frac{1}{n+1}\frac{(4-2)^{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{1}{n+1}$ $\frac{1}{2}$ pnt
si $x \in ]2,4[$ et $\xi \in ]2,x[$. $\frac{1}{2}$ pnt
Par conséquent, $\forall x \in ]2,4[$, $\lim_{n\infty} r^n_{\ln,2}(x) = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \mathrm{dl}^n_{\ln,2}(x) = \ln(x)$.

(Solution alternative:
On peut aussi remarquer que

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt = \int_1^x \frac{1}{2-(2-t)}dt = \frac{1}{2}\int_1^x \frac{1}{1-\frac{2-t}{2}}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^x \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{(2-t)^k}{2^k} + \frac{((2-t)/2)^{n+1}}{1-\frac{2-t}{2}}\Big)dt = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\int_1^x \frac{(2-t)^k}{2^k}dt + \int_1^x \frac{(2-t)^{n+1}}{2^{n+1}t}dt \quad \frac{1}{2}\text{ pnt}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{(2-t)^{k+1}}{(k+1)2^k}\Big|_1^x + \int_1^x \frac{(2-t)^{n+1}}{2^{n+1}t}dt = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\frac{(t-2)^k}{k2^k}\Big|_1^x + \int_1^x \frac{(2-t)^{n+1}}{2^{n+1}t}dt$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k2^k} + \sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k2^k}(x-2)^k + \int_1^x \frac{(2-t)^{n+1}}{2^{n+1}t}dt. \quad \frac{1}{2}\text{ pnt}$$

On a donc

$$|\ln(x) - \mathrm{dl}^{n+1}_{\ln,2}(x)| = |\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k2^k} - \ln(2) + \int_1^x \frac{(2-t)^{n+1}}{2^{n+1}t}dt|$$

$$\leq |\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k2^k} - \ln(2)| + |\int_1^x \frac{(2-t)^{n+1}}{2^{n+1}t}dt|. \quad \frac{1}{2}\text{ pnt}$$

Or, on sait déjà par l'indication, que $\lim_{n\to\infty} |\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k2^k} - \ln(2)| = 0$. Pour l'intégrale, on remarque que

$$|\int_1^x \frac{(2-t)^{n+1}}{2^{n+1}t} dt| \leq \int_1^x |\frac{(2-t)^{n+1}}{2^{n+1}t}| dt \leq \frac{1}{\min\{1,x\}2^{n+1}(n+2)}\big(|x-2|^{n+2}+1\big), \qquad \frac{1}{2} \text{ pnt}$$

valeur qui tend vers 0 si $x \in ]0,4[.\big)$

(c) Appliquant les deux derniers points à $x = 3$ nous donne

$$\ln(3) = \ln(2) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k2^k} \qquad 1 \text{ pnt} \Big( = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \big(\frac{2^k+1}{2^k}\big).\Big)$$

**Question 5:** *Cette question est notée sur 4 points.*

0 .5 1 .5 2 .5 3 .5 4

On définit une relation $\sim$ entre deux nombres réels $x, y \in \mathbb{R}$ comme suit:

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q}.$$

(a) Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

(b) Quelle est la classe d'équivalence $[0]$?

**Solution**

(a) $\sim$ est réflexive: en effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$ $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$, d'où $x \sim x$. 1 pnt
$\sim$ est symétrique: en effet, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Q}$, $\Leftrightarrow y \sim x$. 1 pnt
$\sim$ est transitive: en effet, pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \sim y$ et $y \sim z \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ et $y - z \in \mathbb{Q} \Rightarrow x - z \in \mathbb{Q}$, $\Leftrightarrow x \sim z$. 1 pnt

(b) La classe d'équivalence de 0 est formée de tous les nombres $x \in \mathbb{R}$, tels que $x \sim 0$, i.e. $x - 0 \in \mathbb{Q}$. $\frac{1}{2}$ pnt
Donc, $[0] = \mathbb{Q}$. $\frac{1}{2}$ pnt

**Question 6:** *Cette question est notée sur 5 points.*

.5 .5 .5 .5 .5
0 1 2 3 4 5

Soient $P; Q, R \in \mathbb{K}[X]$. On considère l'ensemble

$$J := \{AP + BQ \; : \; A, B \in \mathbb{K}[X]\}.$$

(a) Montrer que $J$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

(b) Quelle condition doit vérifier $R$ pour que l'équation $AP+BQ = R$ possède une solution $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$?

**Solution**

(a) $J \neq \emptyset$, car $0 \in J$. 1 pnt
Si $R, S \in J$, il existe par définition $A, B, C, D \in \mathbb{K}[X]$, tels que $R = AP + BQ$ et $S = CP + DQ$. $\frac{1}{2}$ pnt
Mais alors, $R + S = AP + BQ + CP + DQ = (A + C)P + (B + D)Q \in J$. $\frac{1}{2}$ pnt
Si $R \in J$ et $S \in \mathbb{K}[X]$, il existe $A, B \in \mathbb{K}[X]$, tels que $R = AP + BQ$, $\frac{1}{2}$ pnt
et donc $RS = (AP + BQ)S = ASP + BSQ \in J$. $\frac{1}{2}$ pnt

(b) Comme $J$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, on sait que $J = D\mathbb{K}[X]$ $\frac{1}{2}$ pnt
où $D = \mathrm{PGCD}(P, Q)$. $\frac{1}{2}$ pnt
Ainsi, $AP + BQ = R$ possède une solution $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ ssi $R \in D\mathbb{K}[X]$, $\frac{1}{2}$ pnt
ssi $R$ est divisible par le $\mathrm{PGCD}(P, Q)$. $\frac{1}{2}$ pnt