Enseignants: Bossoney
SCM - MàN - CMS
2022
Durée : 120 minutes

1

Dalton Joe

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 8 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer
Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer
NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer
Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 (2 points)
Si I et J sont deux idéaux de $\mathbb{K}[X]$, alors $I \cap J$

- ☐ est un idéal généré par le PGCD des générateurs de I et J
- ☐ n'est pas un idéal en général.
- ☐ est un idéal généré par le produit des générateurs de I et J
- ■ est un idéal généré par le PPCM des générateurs de I et J

Question 2 (2 points)
$\mathrm{dl}^n_{\sinh,0}(x) =$

- ☐ $\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(k\pi/2)}{k!} x^k$.
- ■ $\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(k\pi/2)^2}{k!} x^k$.
- ☐ $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$.
- ☐ $\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k\pi/2)^2}{k!} x^k$.

Question 3 (2 points)
Le développement limité $\mathrm{dl}^n_{f,0}(x)$ d'une fonction paire f n fois dérivable dans un voisinage de $x_0 = 0$ est

- ■ paire.
- ☐ impaire.
- ☐ ni paire ni impaire en général.
- ☐ impaire si $f(0) = 0$ est paire sinon.

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 4: *Cette question est notée sur 4 points.*

.5 .5 .5 .5
0 1 2 3 4

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} 2^k < 2^{n+1}$.

(b) Soit p_n le $n^{\text{ième}}$ nombre premier. Montrer que $p_n < 2^{(2^n)}$.

Solution

(a) On le vérifie par récurrence: la relation est vraie pour $n = 0$, puisque $\sum_{k=0}^{0} 2^k = 2^0 = 1 < 2^{0+1} = 2$. On suppose la relation vraie pour n. On a alors $\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k + 2^{n+1} < 2^{n+1} + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1}$, ce qui achève la preuve.

(b) On le vérifie par récurrence: la relation est vraie pour $n = 0$, puisque $p_1 = 2 < 4 = 2^{2^1}$.
On suppose la relation vraie pour p_n. Le nombre $N = 1 + \prod_{k=1}^{n} p_k$ n'est manifestement pas divisible par aucun des p_k pour $k = 1, \ldots, n$. Ainsi, $p_{n+1} \leq N$ et $N < 2^{2^1} 2^{2^2} \ldots 2^{2^n} + 1 < 2^{1+2^1+2^2+\ldots+2^n} < 2^{2^{n+1}}$ par le point précédent.

Question 5: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5
■0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

On définit une relation $\sim$ entre deux nombres entiers $a, b \in \mathbb{Z}$ comme suit:

$$a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad a - b \in 2\mathbb{Z}.$$

(a) Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

(b) Combien y a-t-il de classes d'équivalences dans $\mathbb{Z}$ pour cette relation?

Solution

(a) $\sim$ est réflexive: en effet, $a - a = 0 = 2 \times 0 \in 2\mathbb{Z}$.
$\sim$ est symétrique: en effet, $a \sim b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}$ t.q. $a - b = 2n$, $\Leftrightarrow$ $\exists n \in \mathbb{Z}$ t.q. $b - a = -2n$, $\Leftrightarrow$ $b \sim a$.
$\sim$ est transitive: en effet, si $a \sim b$ et $b \sim c$, cela veut dire, qu'il existe $n, m \in \mathbb{Z}$ tels que $a - b = 2n$ et $b - c = 2m$. Mais alors, $a - c = a - b + b - c = 2(n + m)$ et $a \sim c$.

(b) La classe d'équivalence de 0 contient tous les nombres pairs, alors que la classe d'équivalence de 1 possède tous les nombres impairs. Ainsi, [0] et [1] sont les seules classes d'équivalence.

Question 6: *Cette question est notée sur 5 points.*

.5 .5 .5 .5 .5
0 1 2 3 4 5

Soit les deux ensembles suivants:

$$A := \{r \in \mathbb{Q} \,:\, \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.q.} r < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\}, \quad B := \{r \in \mathbb{Q} \,:\, \forall n \in \mathbb{N},\, r \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\}.$$

(a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 3$ (Indication: que vaut $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$?).

(b) Vérifier que (A, B) satisfait les quatre propriétés d'une coupure de Dedekind.

(c) Quel nombre représente cette coupure ?

Solution

(a) On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2} < 3$.

(b) Vérifions qu'il s'agit bien d'une coupure de Dedekind:

$(D1)$: $A \neq \emptyset$, puisque $0 \in A$. $A \neq \mathbb{Q}$, puisque d'après le point précédent, $3 \neq A$. Pour la même raison on a donc $3 \in B \neq \emptyset$ et $0 \notin B \neq \mathbb{Q}$.
$(D2)$: Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $r \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est la négation de $\exists n \in \mathbb{N}$ t.q.$r < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, on a pour tout rationnel r, $r \in A \Leftrightarrow r \notin B$. Ainsi, $B = \mathbb{Q} \setminus A$.
$(D3)$: Clairement, $r \in A$ et $s \in B$ impliquent $r < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < s$ pour un $n \in \mathbb{N}$.
$(D4)$: $r \in A$ implique l'existence d'un $n \in \mathbb{N}$ tel que $r < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Mais notons, que $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \in A$, puisque $\mathbb{Q} \ni \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}$.

(c) Le développement limité de l'exponentielle vu au cours nous donne la relation $\exp(1) = e = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. La suite $(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!})_{n\in\mathbb{N}}$ étant monotone croissante, on a donc que $e = \sup\{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} : n \in \mathbb{N}\}$. Donc,

$$A_e = A_{\sup\{\mathbb{Q}_{<\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}} : n\in\mathbb{N}\}} = A$$

et (A, B) représente donc e.

Question 7: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5
■0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Parmi les sous-ensembles de $\mathbb{K}[X]$ suivants, déterminer lesquels sont des idéaux. Trouver dans ce cas un polynôme D, tel que cet idéal égale $D\mathbb{K}[X]$. Dans tous les cas, justifier pourquoi c'est ou ce n'est pas un idéal.

(a) $J := \{P \in \mathbb{K}[X] \,:\, P(1) = 0 \text{ ou } P(2) = 0\}$.

(b) $K := \{P \in \mathbb{K}[X] \,:\, P(1) = 0 \text{ et } P(2) = 0\}$.

(c) $L := \{P \in \mathbb{K}[X] \,:\, \forall n \in \mathbb{N},\, P(n) = 0\}$.

Solution

(a) J n'est pas un idéal: en effet, $X-1, X-2 \in J$, mais $X-1+X-2 = 2X-3 \notin J$.

(b) K est un idéal puisque si $P(1) = 0 = P(2) = Q(1) = Q(2)$, alors $(P+Q)(1) = 0 = (P+Q)(2)$, et pour tout $R \in \mathbb{K}[X]$, $(PR)(1) = P(1)R(1) = 0 = P(2)R(2) = (PR)(2)$. Le polynôme de degré minimal, normalisé et non nul élément de K est clairement $(X-1)(X-2)$, d'où $K = (X-1)(X-2)\mathbb{K}[X]$.

(c) L est un idéal puisque si $P; Q \in L$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $(P+Q)(n) = P(n) + Q(n) = 0$ et si $R \in \mathbb{K}[X]$, $(PR)(n) = P(n)R(n) = 0$. Il n'y a pas de polynôme non nul ayant une infinité de racines. Donc, $L = \{0\} = 0\mathbb{K}[X]$.

Enseignants: Bossoney
SCM - MàN - CMS
2022
Durée : 120 minutes

1

Dalton Jack

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 8 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 (2 points)
Si I et J sont deux idéaux de $\mathbb{K}[X]$, alors $I \cap J$

- [x] est un idéal généré par le PPCM des générateurs de I et J
- [ ] est un idéal généré par le PGCD des générateurs de I et J
- [ ] est un idéal généré par le produit des générateurs de I et J
- [ ] n'est pas un idéal en général.

Question 2 (2 points)
$\mathrm{dl}^n_{\sinh,0}(x) =$

- [ ] $\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(k\pi/2)}{k!} x^k$.
- [x] $\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(k\pi/2)^2}{k!} x^k$.
- [ ] $\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k\pi/2)^2}{k!} x^k$.
- [ ] $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$.

Question 3 (2 points)
Le développement limité $\mathrm{dl}^n_{f,0}(x)$ d'une fonction paire f n fois dérivable dans un voisinage de $x_0 = 0$ est

- [ ] ni paire ni impaire en général.
- [ ] impaire si $f(0) = 0$ est paire sinon.
- [ ] impaire.
- [x] paire.

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 4: *Cette question est notée sur 4 points.*

☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5

■ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} 2^k < 2^{n+1}$.

(b) Soit p_n le $n^{\text{ième}}$ nombre premier. Montrer que $p_n < 2^{(2^n)}$.

Solution

(a) On le vérifie par récurrence: la relation est vraie pour $n = 0$, puisque $\sum_{k=0}^{0} 2^k = 2^0 = 1 < 2^{0+1} = 2$. On suppose la relation vraie pour n. On a alors $\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k + 2^{n+1} < 2^{n+1} + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1}$, ce qui achève la preuve.

(b) On le vérifie par récurrence: la relation est vraie pour $n = 0$, puisque $p_1 = 2 < 4 = 2^{2^1}$. On suppose la relation vraie pour p_n. Le nombre $N = 1 + \prod_{k=1}^{n} p_k$ n'est manifestement pas divisible par aucun des p_k pour $k = 1, \dots, n$. Ainsi, $p_{n+1} \leq N$ et $N < 2^{2^1} 2^{2^2} \dots 2^{2^n} + 1 < 2^{1+2^1+2^2+\dots+2^n} < 2^{2^{n+1}}$ par le point précédent.

Question 5: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5

■0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

On définit une relation $\sim$ entre deux nombres entiers $a, b \in \mathbb{Z}$ comme suit:

$$a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad a - b \in 2\mathbb{Z}.$$

(a) Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

(b) Combien y a-t-il de classes d'équivalences dans $\mathbb{Z}$ pour cette relation?

Solution

(a) $\sim$ est réflexive: en effet, $a - a = 0 = 2 \times 0 \in 2\mathbb{Z}$.
$\sim$ est symétrique: en effet, $a \sim b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}$ t.q. $a - b = 2n$, $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}$ t.q. $b - a = -2n$, $\Leftrightarrow b \sim a$.
$\sim$ est transitive: en effet, si $a \sim b$ et $b \sim c$, cela veut dire, qu'il existe $n, m \in \mathbb{Z}$ tels que $a - b = 2n$ et $b - c = 2m$. Mais alors, $a - c = a - b + b - c = 2(n + m)$ et $a \sim c$.

(b) La classe d'équivalence de 0 contient tous les nombres pairs, alors que la classe d'équivalence de 1 possède tous les nombres impairs. Ainsi, [0] et [1] sont les seules classes d'équivalence.

Question 6: *Cette question est notée sur 5 points.*

.5 .5 .5 .5 .5
0 1 2 3 4 5

Soit les deux ensembles suivants:

$$A := \{r \in \mathbb{Q} \,:\, \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.q.} r < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\}, \quad B := \{r \in \mathbb{Q} \,:\, \forall n \in \mathbb{N},\, r \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\}.$$

(a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 3$ (Indication: que vaut $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$?).

(b) Vérifier que (A, B) satisfait les quatre propriétés d'une coupure de Dedekind.

(c) Quel nombre représente cette coupure ?

Solution

(a) On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2} < 3$.

(b) Vérifions qu'il s'agit bien d'une coupure de Dedekind:

$(D1)$: $A \neq \emptyset$, puisque $0 \in A$. $A \neq \mathbb{Q}$, puisque d'après le point précédent, $3 \neq A$. Pour la même raison on a donc $3 \in B \neq \emptyset$ et $0 \notin B \neq \mathbb{Q}$.
$(D2)$: Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $r \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est la négation de $\exists n \in \mathbb{N}$ t.q.$r < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, on a pour tout rationnel r, $r \in A \Leftrightarrow r \notin B$. Ainsi, $B = \mathbb{Q} \setminus A$.
$(D3)$: Clairement, $r \in A$ et $s \in B$ impliquent $r < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < s$ pour un $n \in \mathbb{N}$.
$(D4)$: $r \in A$ implique l'existence d'un $n \in \mathbb{N}$ tel que $r < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Mais notons, que $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \in A$, puisque $\mathbb{Q} \ni \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}$.

(c) Le développement limité de l'exponentielle vu au cours nous donne la relation $\exp(1) = e = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. La suite $(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!})_{n\in\mathbb{N}}$ étant monotone croissante, on a donc que $e = \sup\{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} : n \in \mathbb{N}\}$. Donc,

$$A_e = A_{\sup\{\mathbb{Q}_{<\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}} : n \in \mathbb{N}\}} = A$$

et (A, B) représente donc e.

Question 7: *Cette question est notée sur 5 points.*

$\square$ .5 $\square$ .5 $\square$ .5 $\square$ .5 $\square$ .5
$\blacksquare$ 0 $\square$ 1 $\square$ 2 $\square$ 3 $\square$ 4 $\square$ 5

Parmi les sous-ensembles de $\mathbb{K}[X]$ suivants, déterminer lesquels sont des idéaux. Trouver dans ce cas un polynôme D, tel que cet idéal égale $D\mathbb{K}[X]$. Dans tous les cas, justifier pourquoi c'est ou ce n'est pas un idéal.

(a) $J := \{P \in \mathbb{K}[X] \, : \, P(1) = 0 \text{ ou } P(2) = 0\}$.

(b) $K := \{P \in \mathbb{K}[X] \, : \, P(1) = 0 \text{ et } P(2) = 0\}$.

(c) $L := \{P \in \mathbb{K}[X] \, : \, \forall n \in \mathbb{N}, \, P(n) = 0\}$.

Solution

(a) J n'est pas un idéal: en effet, $X-1, X-2 \in J$, mais $X-1+X-2 = 2X-3 \notin J$.

(b) K est un idéal puisque si $P(1) = 0 = P(2) = Q(1) = Q(2)$, alors $(P+Q)(1) = 0 = (P+Q)(2)$, et pour tout $R \in \mathbb{K}[X]$, $(PR)(1) = P(1)R(1) = 0 = P(2)R(2) = (PR)(2)$. Le polynôme de degré minimal, normalisé et non nul élément de K est clairement $(X-1)(X-2)$, d'où $K = (X-1)(X-2)\mathbb{K}[X]$.

(c) L est un idéal puisque si $P; Q \in L$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $(P+Q)(n) = P(n) + Q(n) = 0$ et si $R \in \mathbb{K}[X]$, $(PR)(n) = P(n)R(n) = 0$. Il n'y a pas de polynôme non nul ayant une infinité de racines. Donc, $L = \{0\} = 0\mathbb{K}[X]$.