Série 1

1.1. Ensembles, nombres naturels et nombres premiers

1. (a) Soit l'ensemble $E := \{1, 2, 3\}$. Enumerez tous les ss-ensembles de E. Montrez qu'il y en a 8.

(b) Soit un ensemble E avec n éléments. Montrez que le nombre de ss-ensembles de E est 2^n.

2. Soient E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Soit l'affirmation:

$$\text{Si } A \cap B = A \cap C \text{ et si } A \cup B = A \cup C, \quad \text{alors } B = C.$$

Mettez les phrases suivantes dans un ordre qui démontre cette affirmation:

(a) Comme $x \notin A$, on doit avoir $x \in C$.

(b) On a donc $x \in C$ dans les deux cas.

(c) Par symétrie, il suffit de montrer $B \subset C$.

(d) $x \notin A$. Alors, $x \in A \cup B = A \cup C$.

(e) Soit $x \in B$. On distingue alors deux cas.

(f) $x \in A$. Alors, $x \in A \cap B = A \cap C$ et donc, $x \in C$.

3. Soient E, F, G des ensembles. Montrer que

(a) $E \setminus (F \cap G) = (E \setminus F) \cup (E \setminus G)$.

(b) $E \setminus (F \cup G) = (E \setminus F) \cap (E \setminus G)$.

4. Vrai ou faux?

(a) $\big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\} \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

(b) $\big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\big\} \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))$.

(c) Chaque élément de $\big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\big\}$ en est un sous-ensemble.

(d) Chaque sous-ensemble de $\big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\big\}$ en est un élément.

5. Soit un nombre naturel n. Montrez, que si tous les nombres premiers p avec $p^2 \leq n$ ne divisent pas n, alors n est premier.

6. Soit $p \geq 5$ un nombre premier. Montrez que $p^2 - 1$ est un multiple de 24.
(Indication: écrire $p^2 - 1$ comme $(p-1)(p+1)$. Que peut-on dire alors des trois nombres $p-1, p, p+1$?)

7. Montrez que pour tout $2 \leq n \in \mathbb{N}$, aucun nombre entre $n!+2$ et $n!+n$ n'est premier.

8. Montrez que si $a, n \geq 2$ sont des nombres naturels tels que $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier.
(Indication: que vaut $1 + a + \ldots + a^{n-1}$ multiplié par $(a-1)$?)

Problèmes supplémentaires

(PS1) Montrer qu'il existe un nombre infini de nombres premiers. Considérer pour ce faire l'ensemble des n premiers nombres premiers $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Considérer le nombre $a = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$ et utiliser le théorème fondamental de l'arithmétique pour montrer l'existence d'un nombre premier p_{n+1}.

(PS2) Montrez que si $n \geq 5$ n'est pas premier, alors n divise $(n-1)!$.

Solutions

S1.(a) $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

S2. $(c) - (e) - (f) - (d) - (a) - (b)$.

S4.
- (a) Vrai.
- (b) Vrai.
- (c) Vrai
- (d) Faux.

Questionnaire d'auto-évaluation

1. Suis-je à l'aise avec les symboles $\exists$, $\forall$, $\leq, \ldots$?

2. Est-ce que j'arrive à décrire correctement un ensemble en langage formel?

3. Ai-je saisi les concepts d'ensemble et de sous-ensemble?

4. La différence entre "être élément de" et "être sous-ensemble de" est-il clair pour moi?

5. Ai-je compris la notion d'ensemble puissance?

6. Quand on me demande de montrer une affirmation, est-il clair pour moi ce qu'est une hypothèse, une conclusion, ainsi que les étapes logiques pour y arriver?