Série 13

3.3. Equations différentielles ordinaires et linéaires de second degré.

1. Trouvez la forme générale des solution des équations différentielles linéaires suivantes:

(a) $y'' - 4y' + 3y = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) $y'' - 2y' + y = xe^x$, $x \in \mathbb{R}$.

(c) $y'' - 4y' + 5y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

2. On considère une masse m attachée à un ressort avec constante de rappel k. On place un système de coordonnées de tel manière que $x = 0$ corresponde à la position de repos du ressort.

(a) Résolvez l'équation du mouvement $m\ddot{x} = F^{\text{ext}} = -kx$ pour les conditions initiales $x(0) = 0$ et $v(0) = 1$.

(b) On introduit maintenant une force de frottement $F^{\text{frot}} = -c\dot{x}$. Trouvez l'équation de mouvement pour la masse attachée au ressort et soumise à cette force de frottement et avec les mêmes conditions initiales que sous a). Résolvez-la. Que constatez-vous?

(c) L'énergie mécanique se définit comme $E^{\text{mec}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$. Comment se comporte cette énergie sous a) et b) en fonction du temps?

3. trouver les solutions à l'EDOL1 couplée:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2, \\ y_2' = 4y_1 + y_2 \end{cases},$$

satisfaisant $y_1(1) = 1$ et $y_2(1) = 0$.

4. Vrai ou faux (donner un contre-exemple si possible)?

(a) $f \mapsto \frac{d^2}{dx^2} f = f''$ est une application linéaire de $C^2(\mathbb{R})$ vers $C(\mathbb{R})$.

(b) $f \mapsto (\frac{d}{dx} f)^2 = (f')^2$ est une application linéaire de $C^1(\mathbb{R})$ vers $C(\mathbb{R})$.

(c) Une fois factorisée, une EDOL2 peut toujours s'écrire sous la forme $A(x)\frac{d}{dx}B(x)\frac{d}{dx}C(x)y = h(x)$ avec $ABC = 1$.

(d) L'ensemble solution d'une EDOL2 homogène, en tant que sous-espace de $C^2(\mathbb{R})$, doit être un espace vectoriel de dimension infinie.

5. Résoudre l'EDOL2 à coefficients non constants

$$xy'' + 2y' - xy = 0.$$

On procédera comme suit: écrire $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, donc comme un développement limité. Substituer ce développement dans l'équation différentielle. Identifier une relation de récurrence entre les coefficients a_{n+2} et a_n.

6. Factoriser L'EDOL3

$$y''' - 3y'' + 4y = \exp(-x)$$

et trouver la famille des solutions. Combien de conditions initiales faut-il pour avoir une solution unique?

Problèmes supplémentaires

(PS1) Résoudre

$$y'' - e^x y' + (\frac{1}{2}\sinh(2x) - \cosh(x))y = 0$$

en suivant la procédure:

(a) Factoriser l'équation $(\frac{d}{dx} - f(x))(\frac{d}{dx} - g(x))y = 0$.

(b) trouver les solutions à chaque facteur.

(c) Résoudre finalement l'équation originale.
(Indication: la fonction $\mathrm{Ei}(x)$ est une primitive de $\frac{e^x}{x}$.)

Solutions

S1. (a) $S = \{\lambda e^{3x} + \mu e^{x} \ : \ \mu, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

(b) $S = \{\left(\frac{x^3}{6} + \lambda x + \mu\right) e^{x} \ : \ \mu, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

(c) $S = \{(\frac{22}{125} + \frac{8x}{25} + \frac{x^2}{5}) + \lambda e^{2x}\sin(x) + \mu e^{2x}\cos(x) \ : \ \mu, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

S2. (a) $x(t) = \sqrt{\frac{m}{k}}\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t)$.

(b) (i) $\underline{c^2 - 4mk > 0}$: $x(t) = \frac{2m}{\sqrt{c^2-4mk}}e^{-\frac{c}{2m}t}\sinh(\frac{\sqrt{c^2-4mk}}{2m}t)$.

(ii) $\underline{c^2 - 4mk = 0}$: $x(t) = te^{-\frac{c}{2m}t}$.

(iii) $\underline{c^2 - 4mk < 0}$: $x(t) = \frac{2m}{\sqrt{4mk-c^2}}e^{-\frac{c}{2m}t}\sin(\frac{\sqrt{4mk-c^2}}{2m}t)$.

(c) L'énergie mécanique est conservée sous (a), dissipée sous (b).

S3. $y_1 = \frac{1}{2}\left(e^{3(x-1)} + e^{1-x}\right), \quad y_2 = \left(e^{3(x-1)} - e^{1-x}\right)$.

S4. (a) Vrai, (b) Faux. (c) Vrai. (d) Faux.

S5. $S = \{\frac{\lambda}{x}\sinh(x) \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

S6. $(\frac{d}{dx}+1)(\frac{d}{dx}-2)(\frac{d}{dx}-2)y = \exp(-x)$,
$S = \{\frac{1}{9}(x + \frac{2}{3} + \lambda)e^{-x} + \mu x e^{2x} + \nu e^{2x} \ : \ \lambda, \mu, \nu \ \in \mathbb{R}\}$,
il faut trois conditions sur y pour une solution unique définie sur $\mathbb{R}$.

PS1. $S = \{e^{\cosh(x)}\left(\mu + \lambda \mathrm{Ei}(-e^{-x})\right) \ : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Questionnaire d'auto-évaluation

1. Suis-je à la l'aise avec l'application $f \mapsto \frac{d}{dx}f$, vue comme une application linéaire?

2. Ai-je saisi la méhode de factorisation d'une EDOL2c.c.?

3. Suis-je en mesure de trouver les solutions à une EDOL2 factorisée?

4. Ai-je encore des difficultés liées aux techniques de l'intégration?

5. Est-ce que "l'échelonage" de l'application linéaire $\frac{d}{dx}$ a un encore un sens?

6. Est-ce que la notion de valeur propre de l'application linéaire $\frac{d}{dx}$ a un encore un sens?