Enseignant: Bossoney
SCM - CMS
2 juillet 2024
Durée : 150 minutes

1

Robin des Bois

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 13 questions et 16 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 25 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Enoncé

Question 1 (2 point)
Quelle propriété est valable pour $\mathbb{Z}$, mais plus pour $\mathbb{Q}$?

- [ ] La dénombrabilité.
- [ ] Le bon ordre.
- [x] Aucune des propriétés citées ici.
- [ ] L'ordre total.

Question 2 (2 point)
Quelle propriété distingue un corps d'un anneau commutatif et intègre ?

- [ ] L'existence d'un suprémum pour tout ensemble non vide et borné.
- [x] L'existence d'un inverse pour tout élément non nul.
- [ ] L'existence d'une relation d'ordre totale.
- [ ] La complétude.

Enoncé

Question 3 (2 points) L'affirmation "$n \in \mathbb{N}$ est un nombre premier" est correctement définie par:

- □ $\forall a, b \in \mathbb{N}, \quad ab = n \Rightarrow (a = 1 \text{ et } b = n) \text{ ou } (a = n \text{ et } b = 1)$.
- ■ $\forall a, b \in \mathbb{N}, \quad ab = n \Rightarrow \text{soit } a = 1, \ \text{ soit } \ b = 1$.
- □ $\forall a, b \in \mathbb{N}, \quad ab = n \Rightarrow a = 1, \ \text{ ou } \ b = 1$.
- □ $\forall k \in \mathbb{N}$, si k divise n, alors $k = 1$ ou $k = n$.

Question 4 (2 points) Soit une application $f : E \to F$. On pose une relation sur $E \times E$ par

$$\forall x, y \in E, \quad x \sim y \iff f(x) = f(y).$$

Alors:

- ■ $\sim$ est une relation d'équivalence.
- □ $\sim$ n'est pas réflexive.
- □ $\sim$ n'est pas symétrique.
- □ $\sim$ n'est pas transitive.

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 5: *Cette question est notée sur 4 points.*

.5 .5 .5 .5

0 1 2 3 4

Réponses courtes! Ecrivez seulement la réponse finale dans l'espace prévu.

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deux suites à valeurs rationnelles.

(a) (1 point) Quelle est la définition d'une suite de Cauchy?

(b) (1 point) Sur les suites de Cauchy, quelle est la définition de la relation d'équivalence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim'' (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

(c) (1 point) Comment construit-on la classe $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]_{\sim''}$ si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy?

(d) (1 point) Est-ce que l'application $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]_{\sim''} \mapsto x_0 \in \mathbb{Q}$ est bien définie sur les classes d'équivalences?

Solution

(a) (1 point) Quelle est la définition d'une suite de Cauchy?

$$\boxed{\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } n, m \geq N \Rightarrow |x_n - x_m| < \epsilon.}$$

(b) (1 point) Sur les suites de Cauchy, quelle est la définition de la relation d'équivalence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim'' (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

$$\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim'' (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_n (x_n - y_n) = 0.}$$

(c) (1 point) Comment construit-on la classe $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]_{\sim''}$ si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy?

$$\boxed{[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]_{\sim''} = \{(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \,:\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim'' (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\}}.$$

(d) (1 point) Est-ce que l'application $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]_{\sim''} \mapsto x_0 \in \mathbb{Q}$ est bien définie sur les classes d'équivalences?

Non. Cette application dépend de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prise dans la classe d'équivalence.

Question 6: *Cette question est notée sur 3 points.*

.5 .5 .5
0 1 2 3

Réponses courtes! Ecrivez seulement la réponse finale dans l'espace prévu.

Soit la suite de fractions donnée par

$$x_n = 2 + \left.\cfrac{3}{4 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{3}{\ddots \, \cfrac{3}{4}}}}\right\} n \text{ fractions.}$$

(a) (1 point) Pour $n \geq 0$, exprimer x_{n+1} en fonction de x_n.

(b) (1 point) Trouver $c \in \mathbb{Q}$, avec $0 < c < 1$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $|x_{n+1} - x_n| \leq c|x_n - x_{n-1}|$.

(c) (1 point) Que doit valoir $\lim_n x_n$?

Solution

(a) (1 point) Pour $n \geq 0$, exprimer x_{n+1} en fonction de x_n.

$$\boxed{\begin{aligned} x_{n+1} - 2 &= \frac{3}{2+x_n}, \\ x_{n+1} &= 2 + \frac{3}{2+x_n}. \end{aligned}}$$

(b) (1 point)Trouver $c \in \mathbb{Q}$, avec $0 < c < 1$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $|x_{n+1} - x_n| \leq c|x_n - x_{n-1}|$.

$$\boxed{\begin{aligned} &x_{n+1} - x_n = \frac{3}{2+x_n} - \frac{3}{2+x_{n-1}}, \\ &|x_{n+1} - x_n| = 3|\frac{1}{2+x_n} - \frac{1}{2+x_{n-1}}| = 3|\frac{x_n - x_{n-1}}{(2+x_n)(2+x_{n-1})}|, \\ &2 < x_n < \frac{7}{2} \quad \Rightarrow \quad |x_{n+1} - x_n| < 3|x_{n-1} - x_n|\frac{3}{16}. \end{aligned}}$$

(c) (1 point) Que doit valoir $\lim_n x_n$?

$$\boxed{\sqrt{7}}.$$

Question 7: *Cette question est notée sur 5 points.*

$\square_{.5}$ $\square_{.5}$ $\square_{.5}$ $\square_{.5}$ $\square_{.5}$

$\blacksquare_0$ $\square_1$ $\square_2$ $\square_3$ $\square_4$ $\square_5$

Soit la fonction

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) = \frac{x^3}{1+x^3}.$$

(a) Calculer le polynôme de Taylor $P^n_{f,0}(x)$ pour tout $n \geq 0$.

(b) Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \geq 0$.

(c) Calculer le terme de correction $f(x) - P^n_{f,0}(x)$ pour tout $n \geq 0$.

Solution

(a) Compute the Taylor polynomial $P^n_{f,0}(x)$ for any $n \geq 0$.

1[st] solution: One may express $f(x)$ as

$$f(x) = \underbrace{\frac{1+x^3}{1+x^3} - \frac{1}{1+x^3} = 1 - \frac{1}{1+x^3}}_{0.5\,pnt}.$$

Note, that $\frac{1}{1+x^3}$ is just the limit expression of a geometric series with $-x^3$ as its commun ratio. One then uses the addition rule for the Taylor polynomials:

$$P^n_{1,0}(x) = 1, \quad \underbrace{P^n_{\frac{1}{1+x^3},0}(x) = \sum_{0\leq 3k\leq n} (-1)^k x^{3k}}_{1\,pnt},$$

$$P^n_{f,0}(x) = P^n_{1,0}(x) - P^n_{\frac{1}{1+x^3},0}(x) = \underbrace{\sum_{3\leq 3k\leq n} (-1)^{k+1} x^{3k}}_{0,5\,pnt}.$$

2[nd] solution: One may express $f(x)$ as

$$f(x) = x^3 \times \frac{1}{1+x^3}.$$

Note, that $\frac{1}{1+x^3}$ is just the limit expression of a geometric series with $-x^3$ as its commun ratio. One then uses the multiplication rule for the Taylor polynomials:

$$P^n_{x^3,0}(x) = x^3(\text{if } n \geq 3 \text{ and } 0 \text{ otherwise}), \quad \underbrace{P^n_{\frac{1}{1+x^3},0}(x) = \sum_{0\leq 3k\leq n} (-1)^k x^{3k}}_{1\,pnt},$$

$$P^n_{f,0}(x) = \underbrace{[P^n_{x^3,0}(x) \times P^n_{\frac{1}{1+x^3},0}(x)]_n}_{0,5\,pnt} = \underbrace{\sum_{3\leq 3k\leq n} (-1)^{k+1} x^{3k}}_{0,5\,pnt}.$$

(b) Compute $f^{(n)}(0)$ for any $n \geq 0$.

Since by definition,

$$\underbrace{P^n_{f,0}(x) = \sum_{0\leq k\leq n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{0,5\,pnt},$$

one has by identification, that

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^{k+1}(3k)! & \text{if } 0 < n = 3k, \\ \underbrace{0}_{0,5\,pnt} & \underbrace{\text{otherwise}}_{0,5\,pnt}. \end{cases}.$$

(c) Compute the correction term $f(x) - P^n_{f,0}(x)$ for all $n \geq 0$.

1st solution: Since $f(x) = 1 - \frac{1}{1+x^3}$ and the second term is just the limit expression of a geometric series, one may write

$$f(x) = 1 - \frac{1}{1+x^3} = \underbrace{\underbrace{1 - \frac{1-(-x^3)^{n+1}}{1+x^3}}_{P^{3n}_{f,0}(x)} - \frac{(-x^3)^{n+1}}{1+x^3}}_{0{,}5+0{,}5\,pnt}.$$

The correction term to $P^{3n}_{f,0}(x)$ is therefore

$$r^{3n}_{f,0}(x) = r^{3n+1}_{f,0}(x) = r^{3n+2}_{f,0}(x) = \underbrace{\frac{(-)^n x^{3n+3}}{1+x^3}}_{0{,}5\,pnt}.$$

2nd solution: If we write $f(x) = x^3 \times \frac{1}{1+x^3}$, one recognises the geometric series $\frac{1}{1+x^3}$, and one therefore has

$$f(x) = x^3 \frac{1}{1+x^3} = \underbrace{x^3}_{P^n_{x^3,0}(x)} \left(\underbrace{\underbrace{\frac{1-(-x^3)^{n+1}}{1+x^3}}_{P^{3n}_{\frac{1}{1+x^3},0}(x)} + \frac{(-x^3)^{n+1}}{1+x^3}}_{0{,}5+0{,}5\,pnt} \right).$$

Using the product rule for Taylor polynomials, one gets

$$\begin{aligned} f(x) &= [x^3 \times \frac{1-(-x^3)^{n+1}}{1+x^3}]_{3n} + \underbrace{x^3 \times \frac{1-(-x^3)^{n+1}}{1+x^3} - [x^3 \times \frac{1-(-x^3)^{n+1}}{1+x^3}]_{3n} + x^3 \times \frac{(-x^3)^{n+1}}{1+x^3}}_{r^{3n}_{f,0}(x)} \\ &= P^{3n}_{f,0}(x) + x^3 \left((-1)^n x^{3n} + \frac{(-x^3)^{n+1}}{1+x^3} \right) = P^{3n}_{f,0}(x) + \frac{(-1)^n x^{3n+3}}{1+x^3}, \end{aligned}$$

from where one concludes, that

$$\underbrace{r^{3n}_{f,0}(x) = \frac{(-1)^n x^{3n+3}}{1+x^3}}_{0{,}5\,pnt}.$$

Question 8: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5
■0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Soit l'EDOL2

$$y'' + 2xy' + (x^2+1)y = x^2+1.$$

(a) Factoriser l'EDOL2 ci-dessus.

(b) Trouver l'ensemble solutions à l'EDOL2 ci-dessus.

(c) Trouver la solution qui vérifie les conditions initiales $x_0 = 0$, $y_0 = 1 = y_0'$.

Solution

(a) On cherche donc deux fonctions f et g, telles que

$$y'' + 2xy' + (x^2+1)y = (\frac{d}{dx} + f)(\frac{d}{dx} + g)y.$$

En développant l'expression à droite on doit avoir

$$\begin{cases} f + g = 2x, \\ fg + g' = x^2 + 1. \end{cases}$$

On voit que $f = g = x$ convient. Ainsi:

$$\begin{aligned} y'' + 2xy' + (x^2+1)y &= (\frac{d}{dx} + x)(\frac{d}{dx} + x)y \\ = e^{-x^2/2}\frac{d}{dx}e^{x^2/2}e^{-x^2/2}\frac{d}{dx}e^{x^2/2}y &= e^{-x^2/2}\frac{d^2}{dx^2}e^{x^2/2}y. \end{aligned}$$

L'EDOL2 devient alors

$$e^{-x^2/2}\frac{d^2}{dx^2}e^{x^2/2}y = x^2+1.$$

(b) On résout cette EDOL2 factorisée en inversant les opérations de multiplication et de dérivation successivement:

$$\begin{aligned} & e^{-x^2/2}\frac{d^2}{dx^2}e^{x^2/2}y = x^2+1 \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{d^2}{dx^2}e^{x^2/2}y = (x^2+1)e^{x^2/2} \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{d}{dx}e^{x^2/2}y = xe^{x^2/2} + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ \Leftrightarrow\quad & e^{x^2/2}y = e^{x^2/2} + \lambda x + \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \\ \Leftrightarrow\quad & y = 1 + (x\lambda + \mu)e^{-x^2/2}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(c) Pour fixer les constantes d'intégration on doit résoudre

$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 1 + \mu e^{-0} = 1, \\ \lambda e^{-0} = 1 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \mu = 0, \\ \lambda = 1 \end{cases}.$$

La solution recherchée est donc

$$y = 1 + xe^{-x^2/2}.$$

Enseignant: Bossoney
SCM - CMS
2 juillet 2024
Durée : 150 minutes

2

Marianne

SCIPER : **888888**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 13 questions et 16 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 25 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer
Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer
NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer
Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Enoncé

Question 1 (2 point)
Quelle propriété est valable pour $\mathbb{Z}$, mais plus pour $\mathbb{Q}$?

- [ ] Le bon ordre.
- [ ] La dénombrabilité.
- [ ] L'ordre total.
- [x] Aucune des propriétés citées ici.

Question 2 (2 point)
Quelle propriété distingue un corps d'un anneau commutatif et intègre ?

- [ ] L'existence d'une relation d'ordre totale.
- [ ] La complétude.
- [x] L'existence d'un inverse pour tout élément non nul.
- [ ] L'existence d'un suprémum pour tout ensemble non vide et borné.

Enoncé

Question 3 (2 points) Soit une application $f : E \to F$. On pose une relation sur $E \times E$ par

$$\forall x, y \in E, \quad x \sim y \iff f(x) = f(y).$$

Alors:

- [ ] $\sim$ n'est pas réflexive.
- [ ] $\sim$ n'est pas symétrique.
- [x] $\sim$ est une relation d'équivalence.
- [ ] $\sim$ n'est pas transitive.

Question 4 (2 points) L'affirmation "$n \in \mathbb{N}$ est un nombre premier" est correctement définie par:

- [x] $\forall a, b \in \mathbb{N}, \quad ab = n \Rightarrow$ soit $a = 1$, soit $b = 1$.
- [ ] $\forall a, b \in \mathbb{N}, \quad ab = n \Rightarrow (a = 1$ et $b = n)$ ou $(a = n$ et $b = 1)$.
- [ ] $\forall a, b \in \mathbb{N}, \quad ab = n \Rightarrow a = 1,$ ou $b = 1$.
- [ ] $\forall k \in \mathbb{N},$ si k divise $n,$ alors $k = 1$ ou $k = n$.

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 5: *Cette question est notée sur 4 points.*

.5 .5 .5 .5

0 1 2 3 4

Réponses courtes! Ecrivez seulement la réponse finale dans l'espace prévu.

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deux suites à valeurs rationnelles.

(a) (1 point) Quelle est la définition d'une suite de Cauchy?

(b) (1 point) Sur les suites de Cauchy, quelle est la définition de la relation d'équivalence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim'' (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

(c) (1 point) Comment construit-on la classe $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]_{\sim''}$ si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy?

(d) (1 point) Est-ce que l'application $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]_{\sim''} \mapsto x_0 \in \mathbb{Q}$ est bien définie sur les classes d'équivalences?

Solution

(a) (1 point) Quelle est la définition d'une suite de Cauchy?

$$\boxed{\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \ \text{tel que } \ n, m \geq N \Rightarrow |x_n - x_m| < \epsilon.}$$

(b) (1 point) Sur les suites de Cauchy, quelle est la définition de la relation d'équivalence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim'' (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

$$\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim'' (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_n (x_n - y_n) = 0.}$$

(c) (1 point) Comment construit-on la classe $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]_{\sim''}$ si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy?

$$\boxed{[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]_{\sim''} = \{(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \, : \, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim'' (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\}}.$$

(d) (1 point) Est-ce que l'application $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]_{\sim''} \mapsto x_0 \in \mathbb{Q}$ est bien définie sur les classes d'équivalences?

$\boxed{\text{Non. Cette application dépend de la suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ prise dans la classe d'équivalence.}}$

Question 6: *Cette question est notée sur 3 points.*

.5 .5 .5
0 1 2 3

Réponses courtes! Ecrivez seulement la réponse finale dans l'espace prévu.

Soit la suite de fractions donnée par

$$x_n = 2 + \left.\cfrac{3}{4 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{3}{\ddots\, \cfrac{3}{4}}}}\right\} n \text{ fractions.}$$

(a) (1 point) Pour $n \geq 0$, exprimer x_{n+1} en fonction de x_n.

(b) (1 point) Trouver $c \in \mathbb{Q}$, avec $0 < c < 1$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $|x_{n+1} - x_n| \leq c|x_n - x_{n-1}|$.

(c) (1 point) Que doit valoir $\lim_n x_n$?

Solution

(a) (1 point) Pour $n \geq 0$, exprimer x_{n+1} en fonction de x_n.

$$\boxed{\begin{aligned} x_{n+1} - 2 &= \frac{3}{2+x_n}, \\ x_{n+1} &= 2 + \frac{3}{2+x_n}. \end{aligned}}$$

(b) (1 point)Trouver $c \in \mathbb{Q}$, avec $0 < c < 1$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $|x_{n+1} - x_n| \leq c|x_n - x_{n-1}|$.

$$\boxed{\begin{aligned} & x_{n+1} - x_n = \frac{3}{2+x_n} - \frac{3}{2+x_{n-1}}, \\ & |x_{n+1} - x_n| = 3|\frac{1}{2+x_n} - \frac{1}{2+x_{n-1}}| = 3|\frac{x_n - x_{n-1}}{(2+x_n)(2+x_{n-1})}|, \\ & 2 < x_n < \frac{7}{2} \quad \Rightarrow \quad |x_{n+1} - x_n| < 3|x_{n-1} - x_n|\frac{3}{16}. \end{aligned}}$$

(c) (1 point) Que doit valoir $\lim_n x_n$?

$$\boxed{\sqrt{7}}.$$

Question 7: *Cette question est notée sur 5 points.*

.5 .5 .5 .5 .5
0 1 2 3 4 5

Soit la fonction

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) = \frac{x^3}{1+x^3}.$$

(a) Calculer le polynôme de Taylor $P^n_{f,0}(x)$ pour tout $n \geq 0$.

(b) Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \geq 0$.

(c) Calculer le terme de correction $f(x) - P^n_{f,0}(x)$ pour tout $n \geq 0$.

Solution

(a) Compute the Taylor polynomial $P^n_{f,0}(x)$ for any $n \geq 0$.

1^st solution: One may express $f(x)$ as

$$f(x) = \underbrace{\frac{1+x^3}{1+x^3} - \frac{1}{1+x^3} = 1 - \frac{1}{1+x^3}}_{0.5\,pnt}.$$

Note, that $\frac{1}{1+x^3}$ is just the limit expression of a geometric series with $-x^3$ as its commun ratio. One then uses the addition rule for the Taylor polynomials:

$$P^n_{1,0}(x) = 1, \quad \underbrace{P^n_{\frac{1}{1+x^3},0}(x) = \sum_{0 \leq 3k \leq n} (-1)^k x^{3k}}_{1\,pnt},$$

$$P^n_{f,0}(x) = P^n_{1,0}(x) - P^n_{\frac{1}{1+x^3},0}(x) = \underbrace{\sum_{3 \leq 3k \leq n} (-1)^{k+1} x^{3k}}_{0{,}5\,pnt}.$$

2^nd solution: One may express $f(x)$ as

$$f(x) = x^3 \times \frac{1}{1+x^3}.$$

Note, that $\frac{1}{1+x^3}$ is just the limit expression of a geometric series with $-x^3$ as its commun ratio. One then uses the multiplication rule for the Taylor polynomials:

$$P^n_{x^3,0}(x) = x^3 (\text{if } n \geq 3 \text{ and } 0 \text{ otherwise}), \quad \underbrace{P^n_{\frac{1}{1+x^3},0}(x) = \sum_{0 \leq 3k \leq n} (-1)^k x^{3k}}_{1\,pnt},$$

$$P^n_{f,0}(x) = \underbrace{[P^n_{x^3,0}(x) \times P^n_{\frac{1}{1+x^3},0}(x)]_n}_{0{,}5\,pnt} = \underbrace{\sum_{3 \leq 3k \leq n} (-1)^{k+1} x^{3k}}_{0{,}5\,pnt}.$$

(b) Compute $f^{(n)}(0)$ for any $n \geq 0$.

Since by definition,

$$\underbrace{P^n_{f,0}(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{0{,}5\,pnt},$$

one has by identification, that

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^{k+1}(3k)! & \text{if } 0 < n = 3k, \\ \underbrace{0}_{0{,}5\,pnt} & \underbrace{\text{otherwise}}_{0{,}5\,pnt}. \end{cases}.$$

(c) Compute the correction term $f(x) - P^n_{f,0}(x)$ for all $n \geq 0$.

1st solution: Since $f(x) = 1 - \frac{1}{1+x^3}$ and the second term is just the limit expression of a geometric series, one may write

$$f(x) = 1 - \frac{1}{1+x^3} = \underbrace{\underbrace{1 - \frac{1-(-x^3)^{n+1}}{1+x^3}}_{P^{3n}_{f,0}(x)} - \frac{(-x^3)^{n+1}}{1+x^3}}_{0{,}5+0{,}5\,pnt}.$$

The correction term to $P^{3n}_{f,0}(x)$ is therefore

$$r^{3n}_{f,0}(x) = r^{3n+1}_{f,0}(x) = r^{3n+2}_{f,0}(x) = \underbrace{\frac{(-)^n x^{3n+3}}{1+x^3}}_{0{,}5\,pnt}.$$

2nd solution: If we write $f(x) = x^3 \times \frac{1}{1+x^3}$, one recognises the geometric series $\frac{1}{1+x^3}$, and one therefore has

$$f(x) = x^3 \frac{1}{1+x^3} = \underbrace{x^3}_{P^n_{x^3,0}(x)} \left(\underbrace{\underbrace{\frac{1-(-x^3)^{n+1}}{1+x^3}}_{P^{3n}_{\frac{1}{1+x^3},0}(x)} + \frac{(-x^3)^{n+1}}{1+x^3}}_{0{,}5+0{,}5\,pnt} \right).$$

Using the product rule for Taylor polynomials, one gets

$$f(x) = [x^3 \times \frac{1-(-x^3)^{n+1}}{1+x^3}]_{3n} + \underbrace{x^3 \times \frac{1-(-x^3)^{n+1}}{1+x^3} - [x^3 \times \frac{1-(-x^3)^{n+1}}{1+x^3}]_{3n} + x^3 \times \frac{(-x^3)^{n+1}}{1+x^3}}_{r^{3n}_{f,0}(x)}$$

$$= P^{3n}_{f,0}(x) + x^3 \left((-1)^n x^{3n} + \frac{(-x^3)^{n+1}}{1+x^3} \right) = P^{3n}_{f,0}(x) + \frac{(-1)^n x^{3n+3}}{1+x^3},$$

from where one concludes, that

$$\underbrace{r^{3n}_{f,0}(x) = \frac{(-1)^n x^{3n+3}}{1+x^3}}_{0{,}5\,pnt}.$$

Question 8: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5
■0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Soit l'EDOL2
$$y'' + 2xy' + (x^2+1)y = x^2 + 1.$$

(a) Factoriser l'EDOL2 ci-dessus.

(b) Trouver l'ensemble solutions à l'EDOL2 ci-dessus.

(c) Trouver la solution qui vérifie les conditions initiales $x_0 = 0$, $y_0 = 1 = y_0'$.

Solution

(a) On cherche donc deux fonctions f et g, telles que
$$y'' + 2xy' + (x^2+1)y = (\frac{d}{dx} + f)(\frac{d}{dx} + g)y.$$
En développant l'expression à droite on doit avoir
$$\begin{cases} f + g = 2x, \\ fg + g' = x^2 + 1. \end{cases}$$
On voit que $f = g = x$ convient. Ainsi:
$$y'' + 2xy' + (x^2+1)y = (\frac{d}{dx} + x)(\frac{d}{dx} + x)y$$
$$= e^{-x^2/2}\frac{d}{dx}e^{x^2/2}e^{-x^2/2}\frac{d}{dx}e^{x^2/2}y = e^{-x^2/2}\frac{d^2}{dx^2}e^{x^2/2}y.$$
L'EDOL2 devient alors
$$e^{-x^2/2}\frac{d^2}{dx^2}e^{x^2/2}y = x^2 + 1.$$

(b) On résout cette EDOL2 factorisée en inversant les opérations de multiplication et de dérivation successivement:
$$\begin{aligned} & e^{-x^2/2}\frac{d^2}{dx^2}e^{x^2/2}y = x^2 + 1 \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{d^2}{dx^2}e^{x^2/2}y = (x^2+1)e^{x^2/2} \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{d}{dx}e^{x^2/2}y = xe^{x^2/2} + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ \Leftrightarrow\quad & e^{x^2/2}y = e^{x^2/2} + \lambda x + \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \\ \Leftrightarrow\quad & y = 1 + (x\lambda + \mu)e^{-x^2/2}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(c) Pour fixer les constantes d'intégration on doit résoudre
$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 1 + \mu e^{-0} = 1, \\ \lambda e^{-0} = 1 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \mu = 0, \\ \lambda = 1 \end{cases}.$$
La solution recherchée est donc
$$y = 1 + xe^{-x^2/2}.$$