

**EPFL****1**

Enseignant: Bossoney

SCM - CMS

2 juillet 2024

Durée : 150 minutes

# Robin des Bois

SCIPER: **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 13 questions et 16 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 25 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera:
  - les points indiqués si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - 0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes   Observe this guidelines   Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse   select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse   NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse   Correct an answer Antwort korrigieren
<input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ce qu'il ne faut PAS faire   what should NOT be done   was man NICHT tun sollte		

**Enoncé****Question 1 (2 point)**

Quelle propriété est valable pour  $\mathbb{Z}$ , mais plus pour  $\mathbb{Q}$ ?

- La dénombrabilité.
- Le bon ordre.
- Aucune des propriétés citées ici.
- L'ordre total.

**Question 2 (2 point)**

Quelle propriété distingue un corps d'un anneau commutatif et intègre ?

- L'existence d'un supréumum pour tout ensemble non vide et borné.
- L'existence d'un inverse pour tout élément non nul.
- L'existence d'une relation d'ordre totale.
- La complétude.

**Enoncé**

**Question 3** (2 points) L'affirmation " $n \in \mathbb{N}$  est un nombre premier" est correctement définie par:

- $\forall a, b \in \mathbb{N}, ab = n \Rightarrow (a = 1 \text{ et } b = n) \text{ ou } (a = n \text{ et } b = 1).$
- $\forall a, b \in \mathbb{N}, ab = n \Rightarrow \text{soit } a = 1, \text{ soit } b = 1.$
- $\forall a, b \in \mathbb{N}, ab = n \Rightarrow a = 1, \text{ ou } b = 1.$
- $\forall k \in \mathbb{N}, \text{ si } k \text{ divise } n, \text{ alors } k = 1 \text{ ou } k = n.$

**Question 4** (2 points) Soit une application  $f : E \rightarrow F$ . On pose une relation sur  $E \times E$  par

$$\forall x, y \in E, x \sim y \iff f(x) = f(y).$$

Alors:

- $\sim$  est une relation d'équivalence.
- $\sim$  n'est pas réflexive.
- $\sim$  n'est pas symétrique.
- $\sim$  n'est pas transitive.



## Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

**Question 5:** *Cette question est notée sur 4 points.*

	<input type="checkbox"/>	,5	<input type="checkbox"/>	,5	<input type="checkbox"/>	,5	<input type="checkbox"/>	,5	
<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 4					

**Réponses courtes!** Ecrivez seulement la réponse finale dans l'espace prévu.

Soient  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , deux suites à valeurs rationnelles.

(a) (1 point) Quelle est la définition d'une suite de Cauchy?

(b) (1 point) Sur les suites de Cauchy, quelle est la définition de la relation d'équivalence  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim'' (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ?

(c) (1 point) Comment construit-on la classe  $[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}]_{\sim''}$  si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy?

(d) (1 point) Est-ce que l'application  $[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}]_{\sim''} \mapsto x_0 \in \mathbb{Q}$  est bien définie sur les classes d'équivalences?



**Question 6:** Cette question est notée sur 3 points.

<input type="text"/>	.5	<input type="text"/>	.5	<input type="text"/>	.5		
<input type="text"/>	0	<input type="text"/>	1	<input type="text"/>	2	<input type="text"/>	3

**Réponses courtes!** Ecrivez seulement la réponse finale dans l'espace prévu.

Soit la suite de fractions donnée par

$$x_n = 2 + \left. \begin{array}{c} 3 \\ 4 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{3}{\ddots \cfrac{3}{4}}} \end{array} \right\} n \text{ fractions.}$$

- (a) (1 point) Pour  $n \geq 0$ , exprimer  $x_{n+1}$  en fonction de  $x_n$ .

- (b) (1 point) Trouver  $c \in \mathbb{Q}$ , avec  $0 < c < 1$ , tel que  $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ,  $|x_{n+1} - x_n| \leq c|x_n - x_{n-1}|$ .

- (c) (1 point) Que doit valoir  $\lim_n x_n$ ?



**Question 7:** Cette question est notée sur 5 points.

<input type="checkbox"/>	.5									
<input type="checkbox"/> 0		<input type="checkbox"/> 1		<input type="checkbox"/> 2		<input type="checkbox"/> 3		<input type="checkbox"/> 4		<input type="checkbox"/> 5

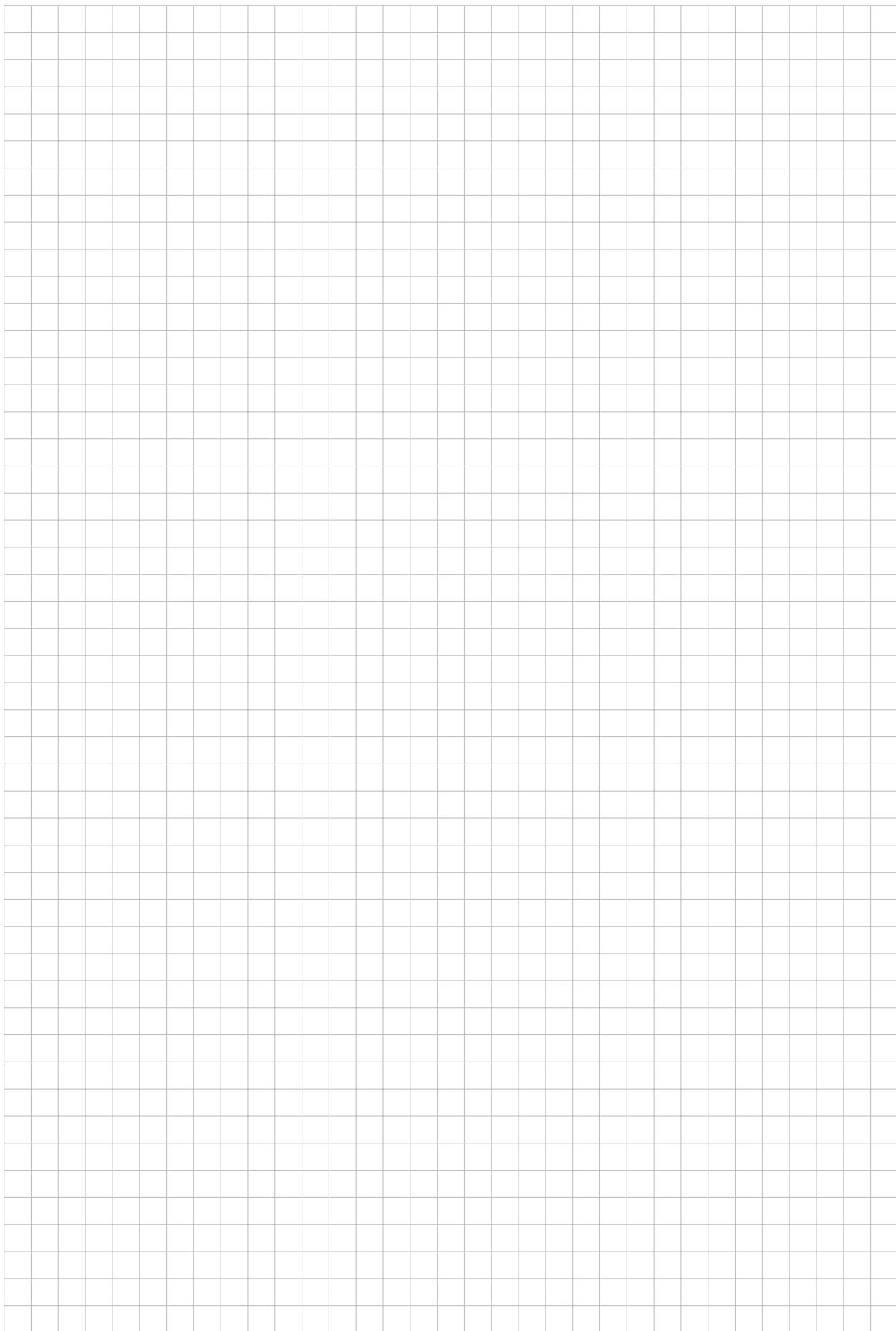
Soit la fonction

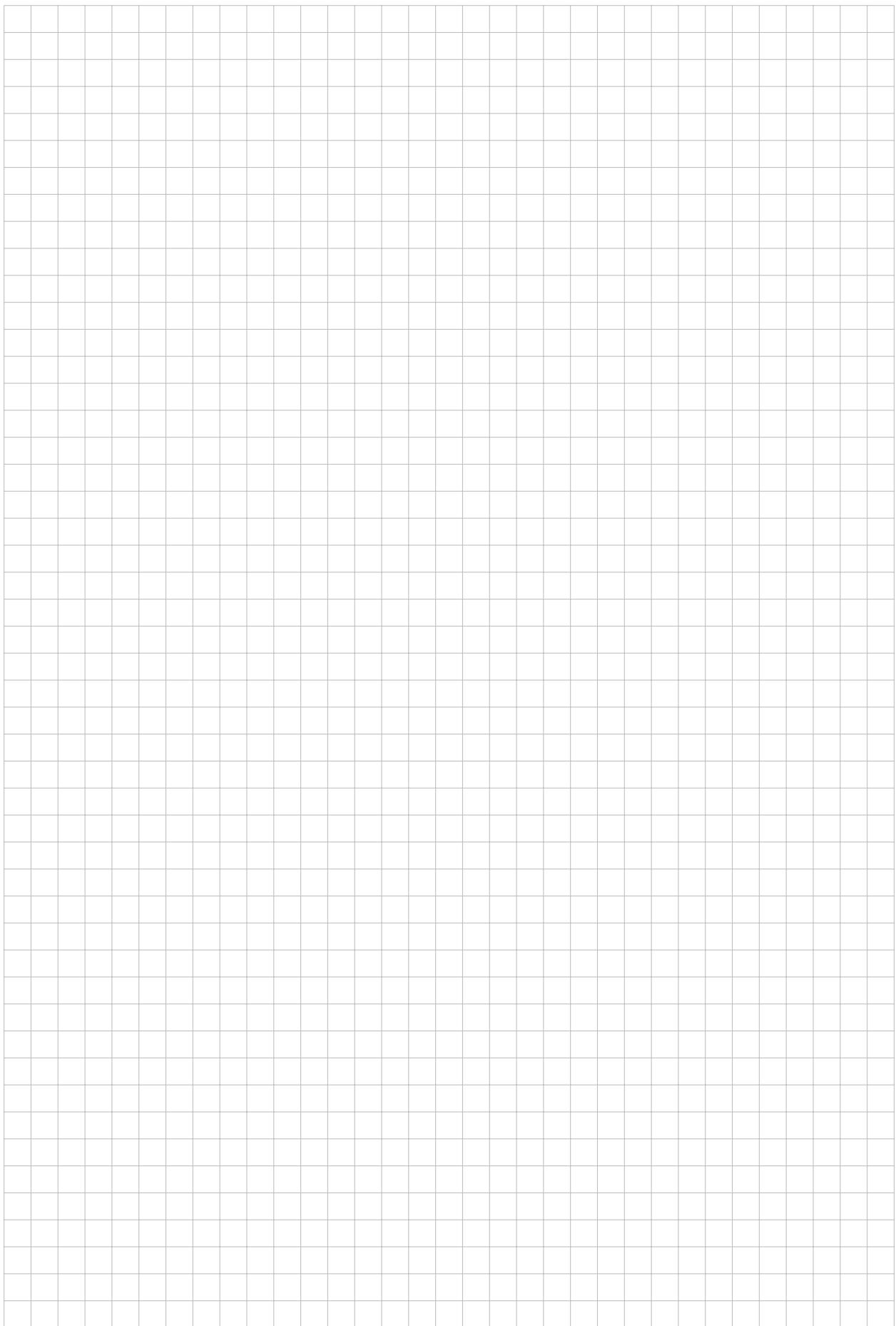
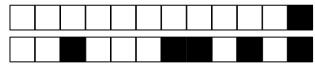
$$\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) = \frac{x^3}{1+x^3}.$$

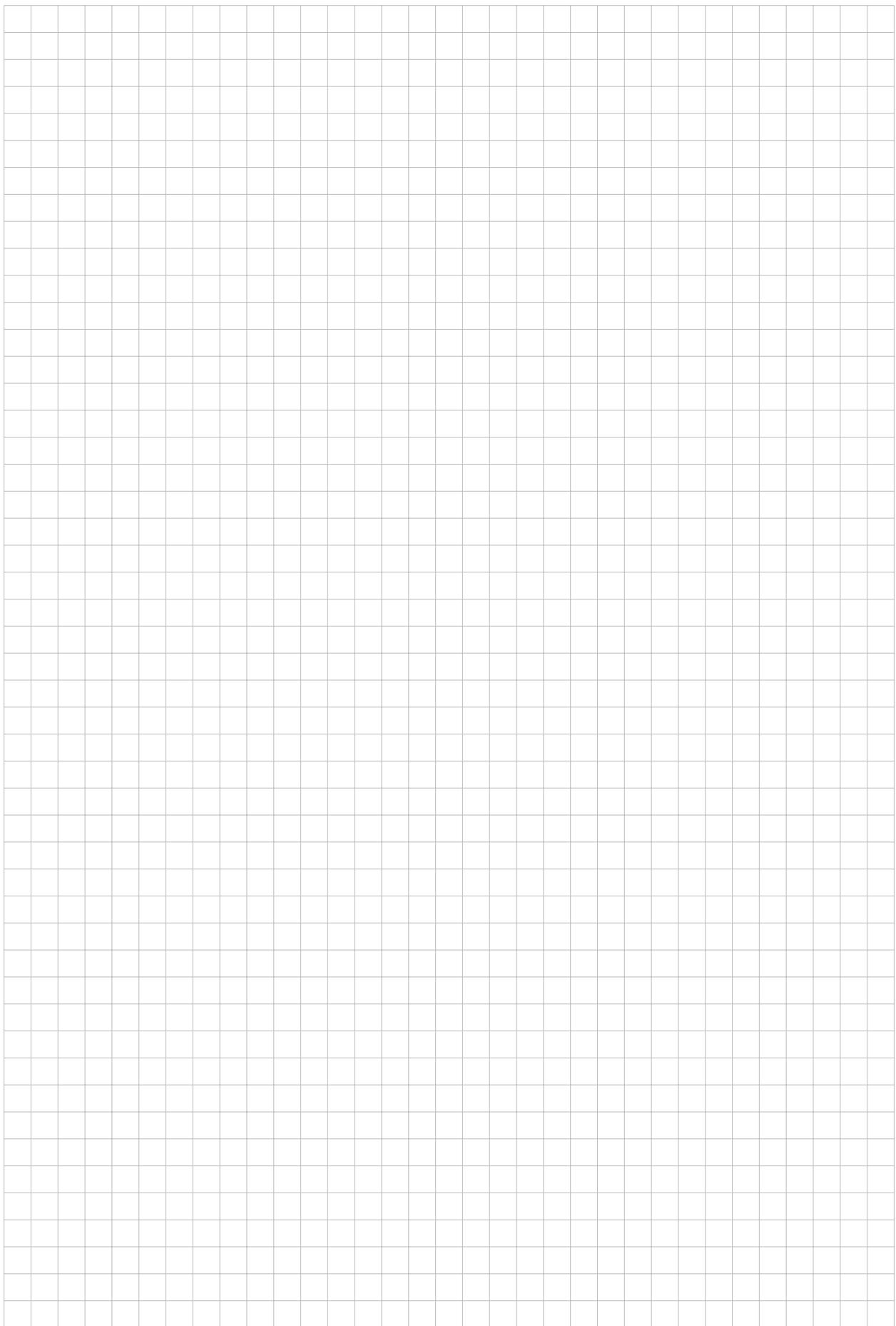
- Calculer le polynôme de Taylor  $P_{f,0}^n(x)$  pour tout  $n \geq 0$ .
- Calculer  $f^{(n)}(0)$  pour tout  $n \geq 0$ .
- Calculer le terme de correction  $f(x) - P_{f,0}^n(x)$  pour tout  $n \geq 0$ .

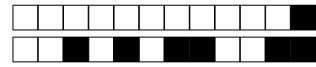


+1/7/54+









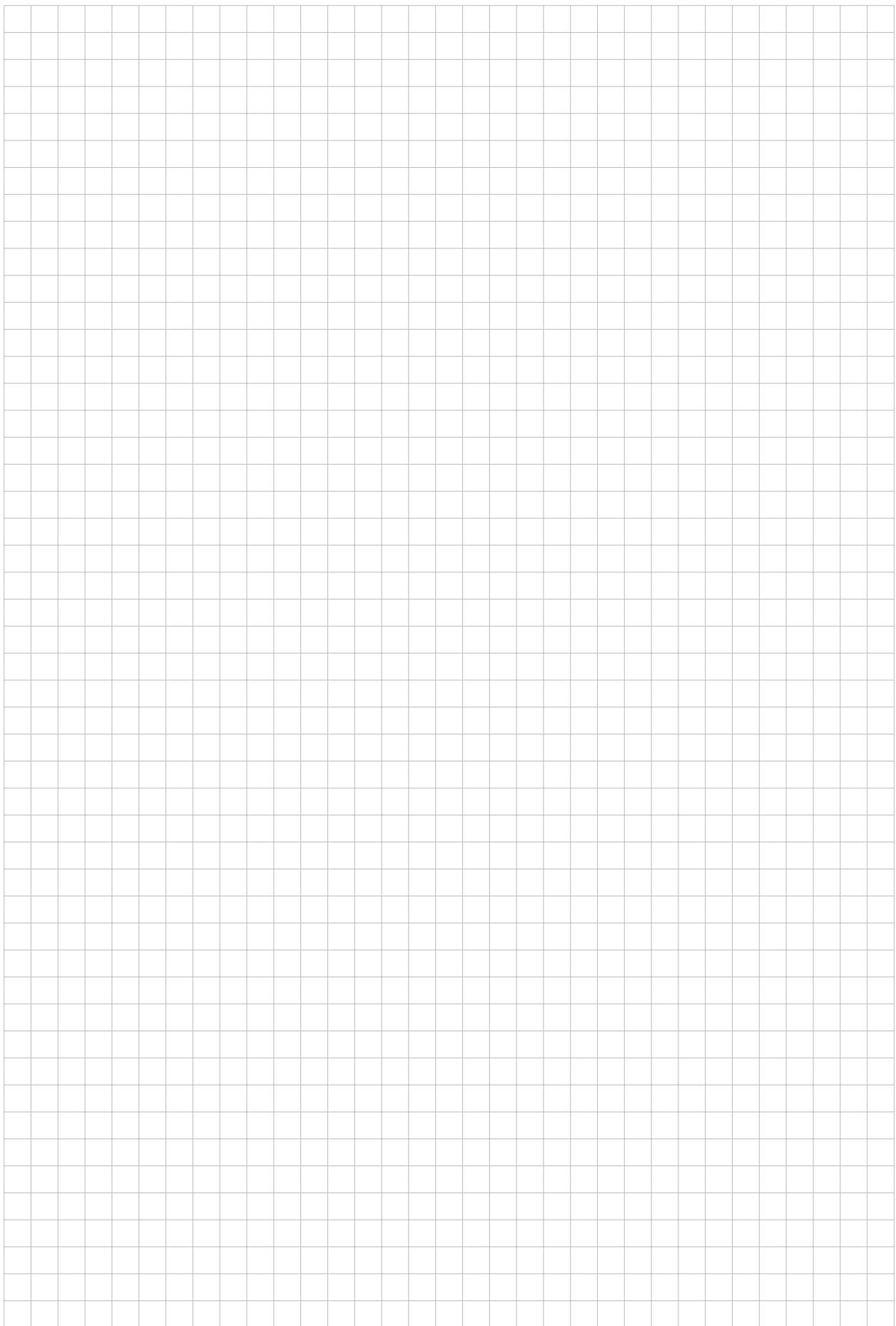
**Question 8:** Cette question est notée sur 5 points.

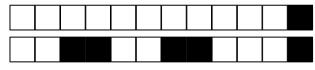
<input type="checkbox"/>	.5									
<input type="checkbox"/> 0		<input type="checkbox"/> 1		<input type="checkbox"/> 2		<input type="checkbox"/> 3		<input type="checkbox"/> 4		<input type="checkbox"/> 5

Soit l'EDOL2

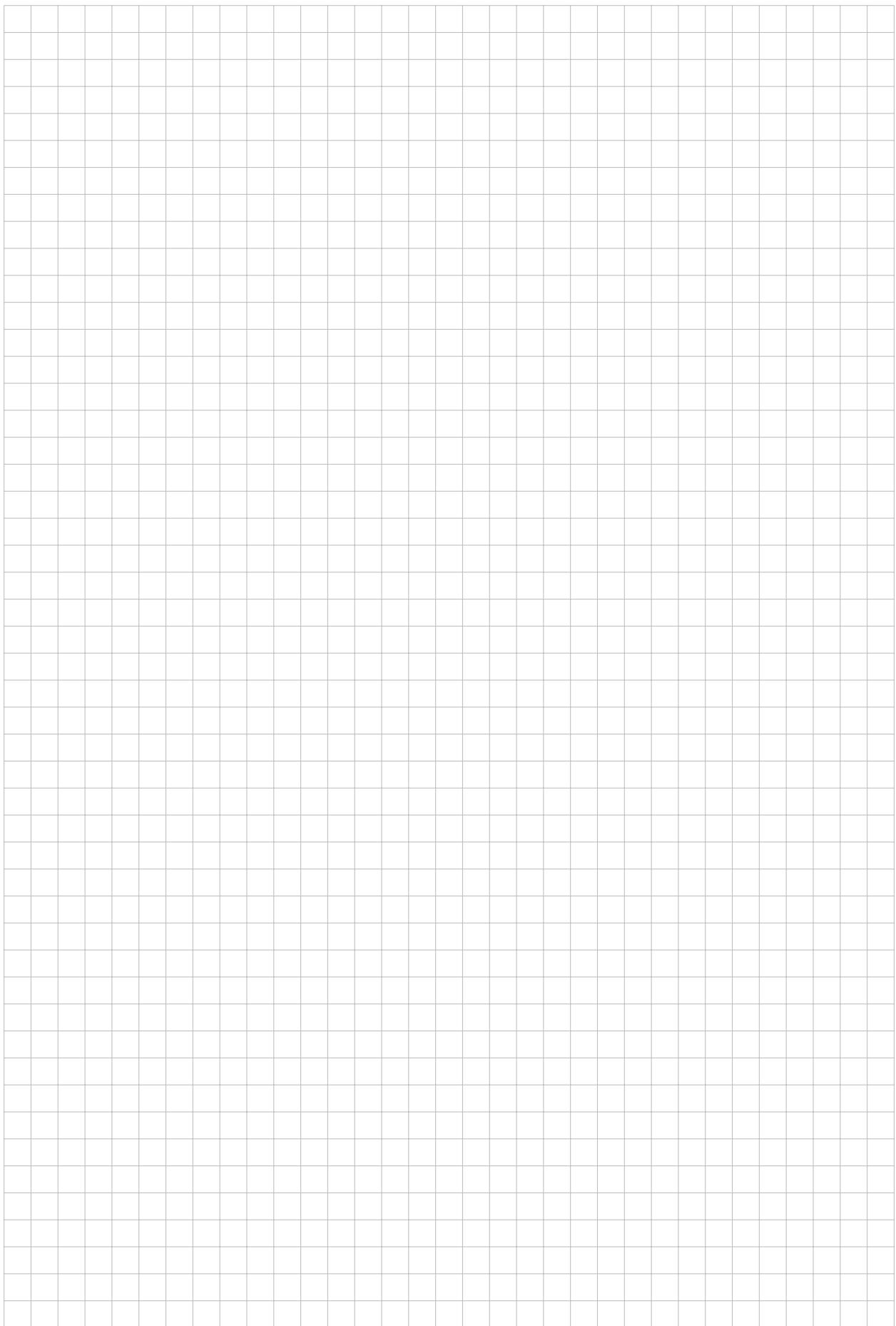
$$y'' + 2xy' + (x^2 + 1)y = x^2 + 1.$$

- Factoriser l'EDOL2 ci-dessus.
- Trouver l'ensemble solutions à l'EDOL2 ci-dessus.
- Trouver la solution qui vérifie les conditions initiales  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1 = y'_0$ .



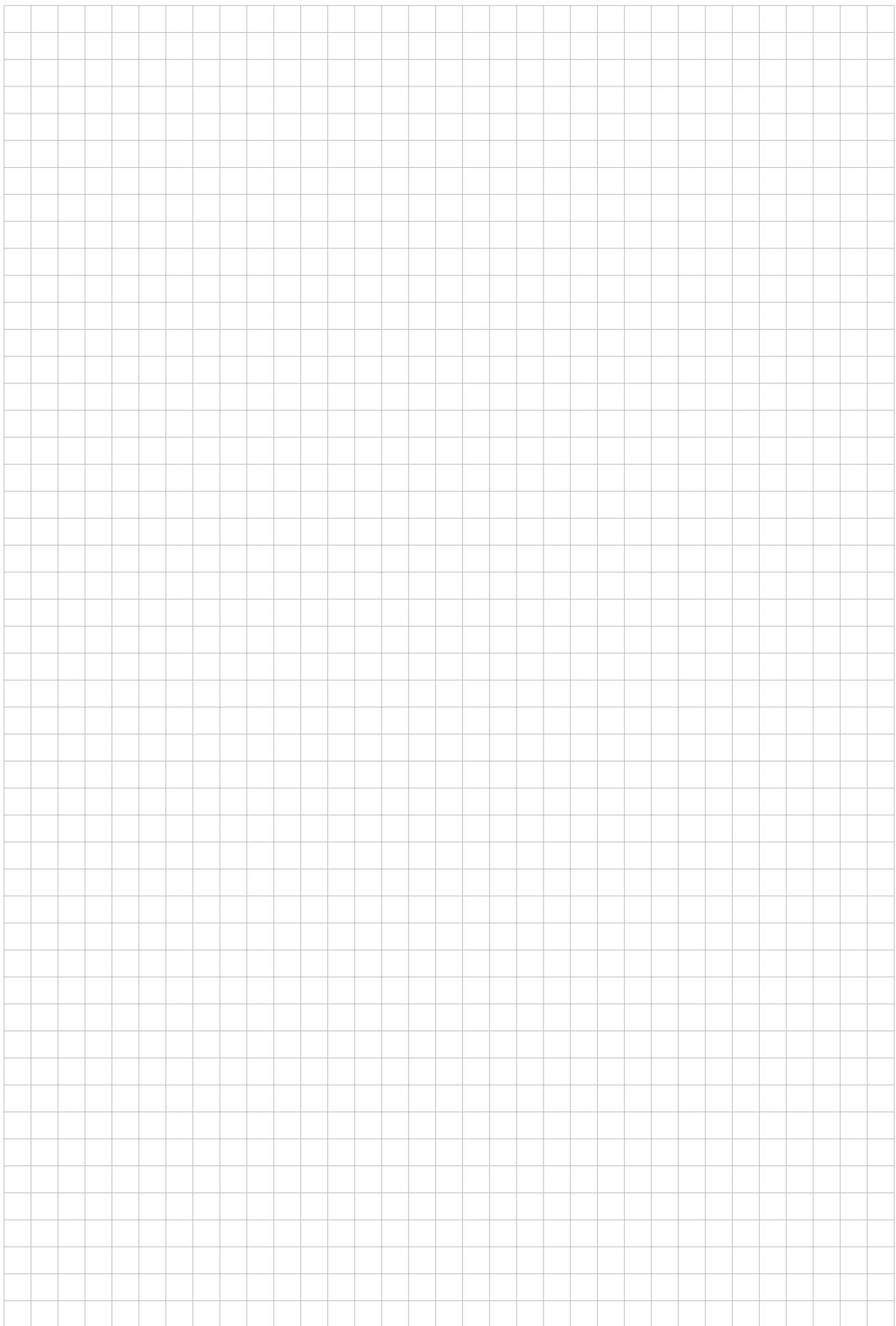


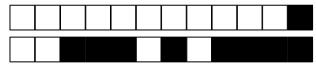
+1/12/49+



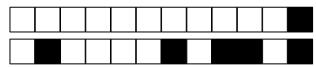


+1/13/48+









**EPFL**

Enseignant: Bossoney

SCM - CMS

2 juillet 2024

Durée : 150 minutes

**2**

# Marianne

SCIPER: **888888**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 13 questions et 16 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 25 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera:
  - les points indiqués si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - 0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes   Observe this guidelines   Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse   select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse   NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse   Correct an answer Antwort korrigieren
<input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
ce qu'il ne faut <b>PAS</b> faire   what should <b>NOT</b> be done   was man <b>NICHT</b> tun sollte		
<input checked="" type="checkbox"/>		

**Enoncé****Question 1** (2 point)

Quelle propriété est valable pour  $\mathbb{Z}$ , mais plus pour  $\mathbb{Q}$ ?

- Le bon ordre.
- La dénombrabilité.
- L'ordre total.
- Aucune des propriétés citées ici.

**Question 2** (2 point)

Quelle propriété distingue un corps d'un anneau commutatif et intègre ?

- L'existence d'une relation d'ordre totale.
- La complétude.
- L'existence d'un inverse pour tout élément non nul.
- L'existence d'un supréumum pour tout ensemble non vide et borné.

**Enoncé**

**Question 3** (2 points) Soit une application  $f : E \rightarrow F$ . On pose une relation sur  $E \times E$  par

$$\forall x, y \in E, \quad x \sim y \iff f(x) = f(y).$$

Alors:

- $\sim$  n'est pas réflexive.
- $\sim$  n'est pas symétrique.
- $\sim$  est une relation d'équivalence.
- $\sim$  n'est pas transitive.

**Question 4** (2 points) L'affirmation " $n \in \mathbb{N}$  est un nombre premier" est correctement définie par:

- $\forall a, b \in \mathbb{N}, \quad ab = n \Rightarrow$  soit  $a = 1$ , soit  $b = 1$ .
- $\forall a, b \in \mathbb{N}, \quad ab = n \Rightarrow (a = 1 \text{ et } b = n) \text{ ou } (a = n \text{ et } b = 1)$ .
- $\forall a, b \in \mathbb{N}, \quad ab = n \Rightarrow a = 1, \text{ ou } b = 1$ .
- $\forall k \in \mathbb{N}, \text{ si } k \text{ divise } n, \text{ alors } k = 1 \text{ ou } k = n$ .



## Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

**Question 5:** *Cette question est notée sur 4 points.*

	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	,5	,5	,5	,5	
<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 4	

**Réponses courtes!** Ecrivez seulement la réponse finale dans l'espace prévu.

Soient  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , deux suites à valeurs rationnelles.

(a) (1 point) Quelle est la définition d'une suite de Cauchy?

(b) (1 point) Sur les suites de Cauchy, quelle est la définition de la relation d'équivalence  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim'' (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ?

(c) (1 point) Comment construit-on la classe  $[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}]_{\sim''}$  si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy?

(d) (1 point) Est-ce que l'application  $[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}]_{\sim''} \mapsto x_0 \in \mathbb{Q}$  est bien définie sur les classes d'équivalences?



**Question 6:** *Cette question est notée sur 3 points.*

<input type="checkbox"/> .5	<input type="checkbox"/> .5	<input type="checkbox"/> .5	
<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 3

Réponses courtes! Ecrivez seulement la réponse finale dans l'espace prévu.

Soit la suite de fractions donnée par

$$x_n = 2 + \left. \begin{array}{c} 3 \\ 4 + \frac{3}{4 + \frac{3}{\ddots \frac{3}{4}}} \end{array} \right\} n \text{ fractions.}$$

- (a) (1 point) Pour  $n \geq 0$ , exprimer  $x_{n+1}$  en fonction de  $x_n$ .

- (b) (1 point) Trouver  $c \in \mathbb{Q}$ , avec  $0 < c < 1$ , tel que  $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ,  $|x_{n+1} - x_n| \leq c|x_n - x_{n-1}|$ .

11. *What is the primary purpose of the following statement?*

- (c) (1 point) Que doit valoir  $\lim_n x_n$ ?



**Question 7:** Cette question est notée sur 5 points.

<input type="checkbox"/>	.5									
<input type="checkbox"/> 0		<input type="checkbox"/> 1		<input type="checkbox"/> 2		<input type="checkbox"/> 3		<input type="checkbox"/> 4		<input type="checkbox"/> 5

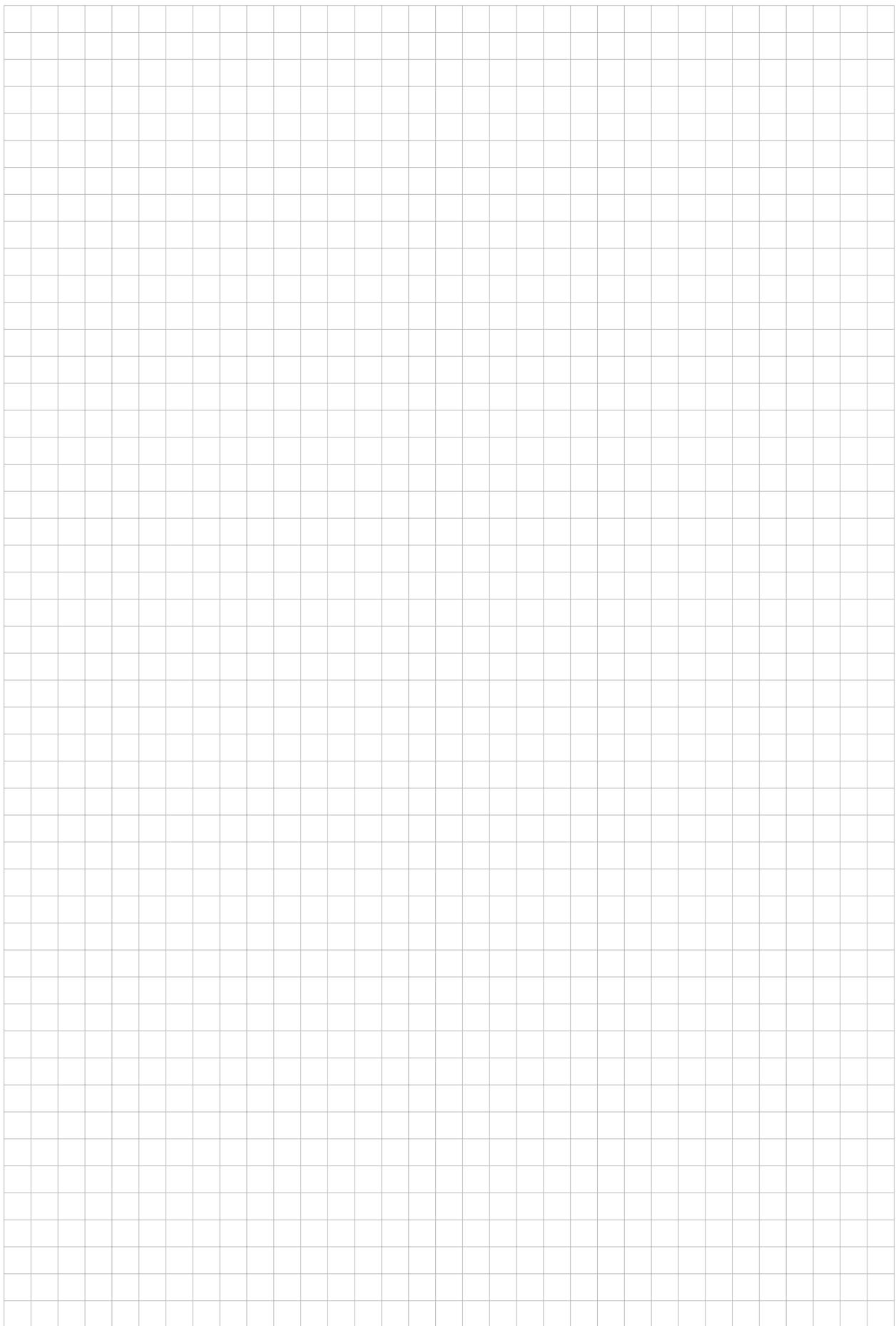
Soit la fonction

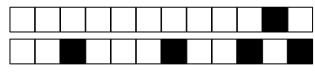
$$\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) = \frac{x^3}{1+x^3}.$$

- Calculer le polynôme de Taylor  $P_{f,0}^n(x)$  pour tout  $n \geq 0$ .
- Calculer  $f^{(n)}(0)$  pour tout  $n \geq 0$ .
- Calculer le terme de correction  $f(x) - P_{f,0}^n(x)$  pour tout  $n \geq 0$ .

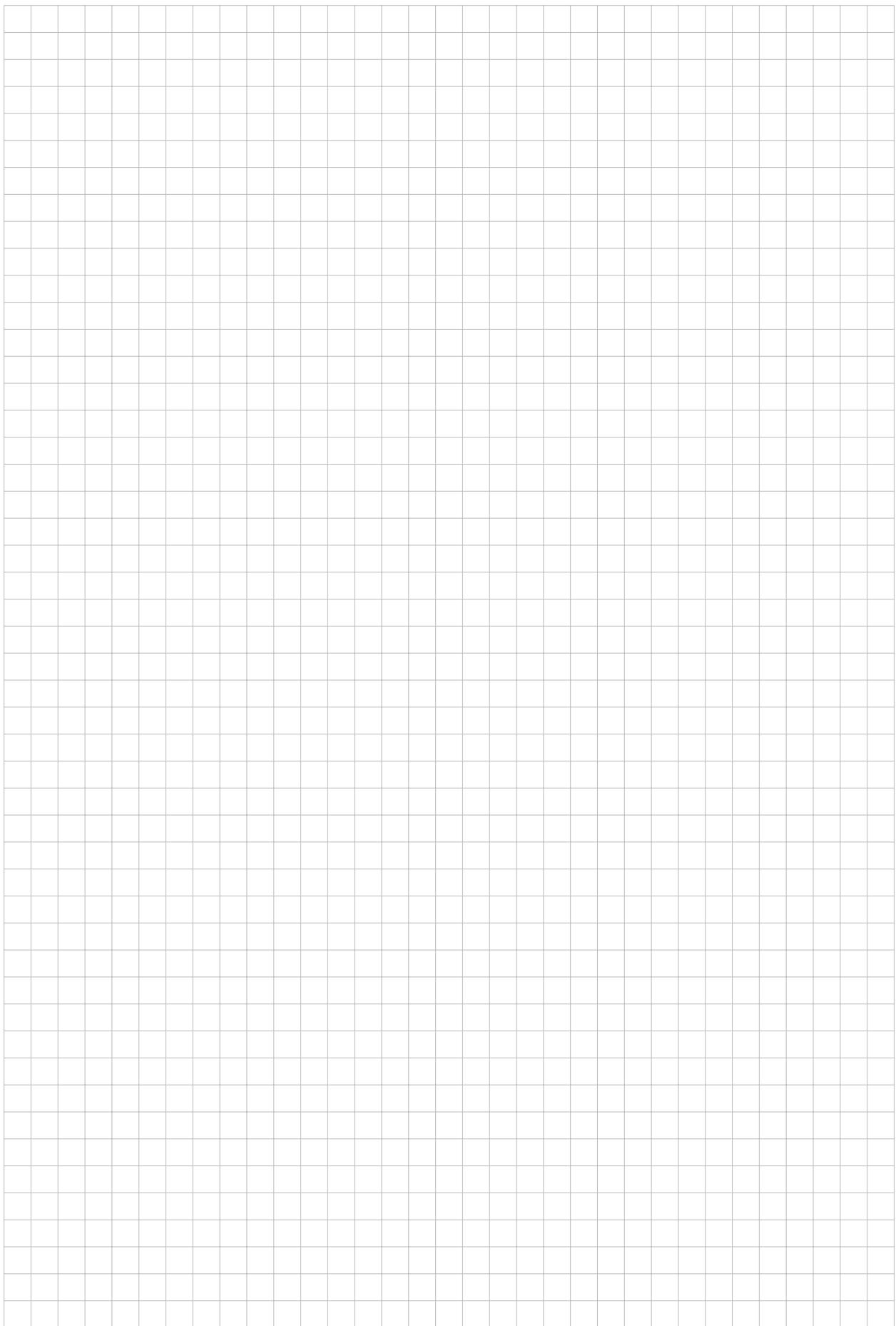


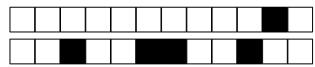
+2/7/38+



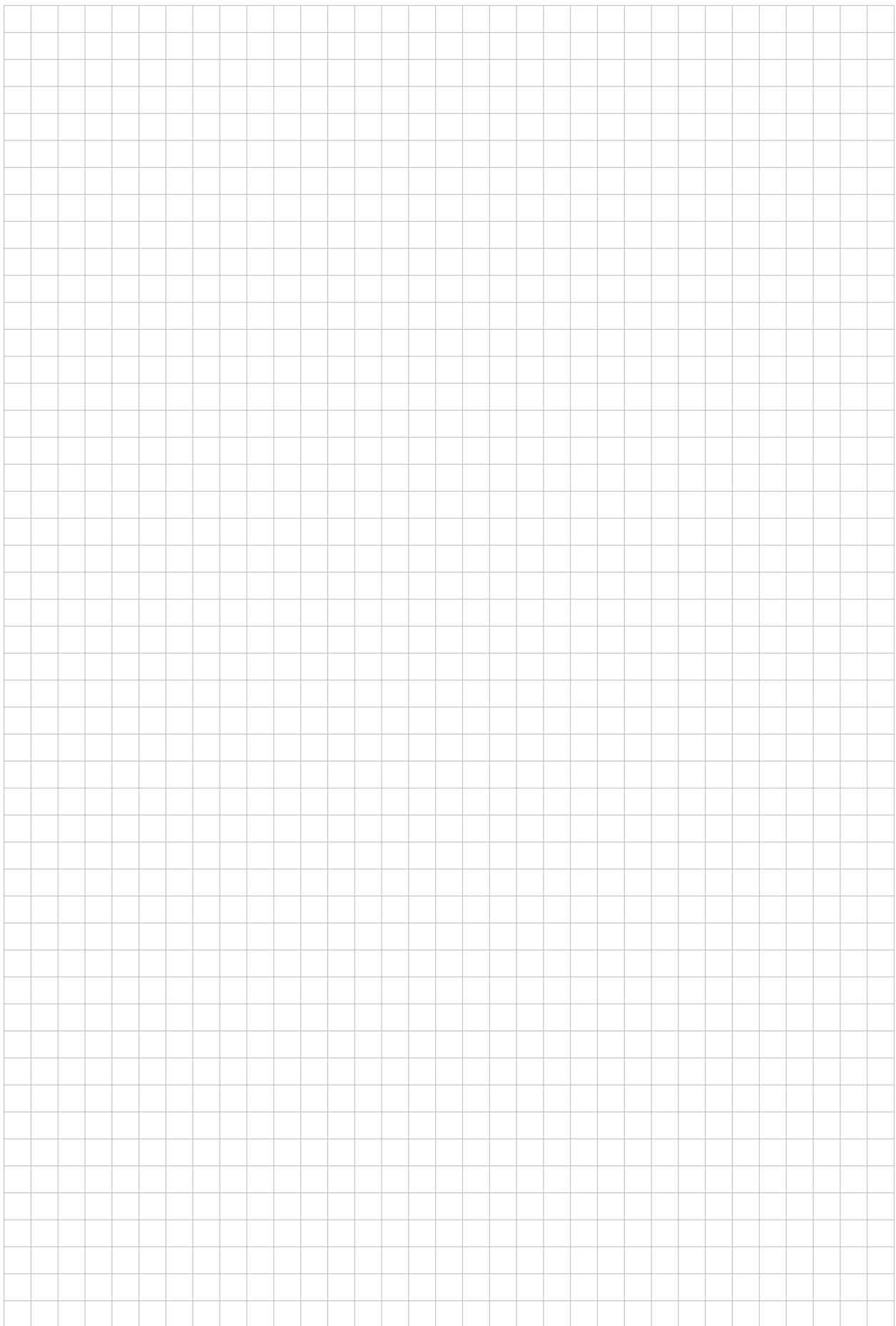


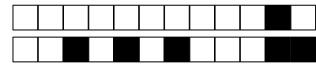
+2/8/37+





+2/9/36+





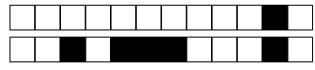
**Question 8:** Cette question est notée sur 5 points.

<input type="checkbox"/>	.5									
<input type="checkbox"/> 0		<input type="checkbox"/> 1		<input type="checkbox"/> 2		<input type="checkbox"/> 3		<input type="checkbox"/> 4		<input type="checkbox"/> 5

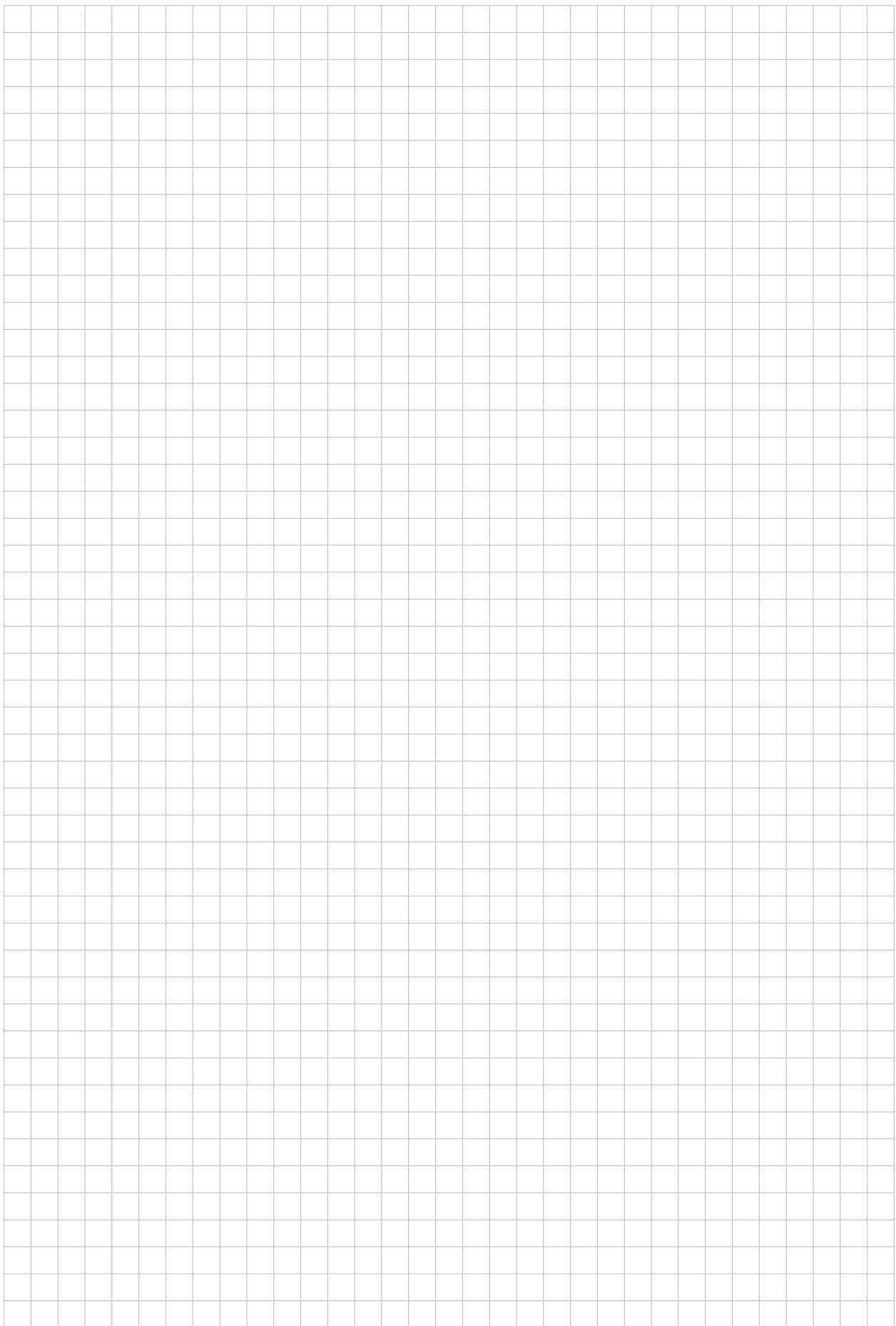
Soit l'EDOL2

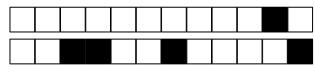
$$y'' + 2xy' + (x^2 + 1)y = x^2 + 1.$$

- Factoriser l'EDOL2 ci-dessus.
- Trouver l'ensemble solutions à l'EDOL2 ci-dessus.
- Trouver la solution qui vérifie les conditions initiales  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1 = y'_0$ .

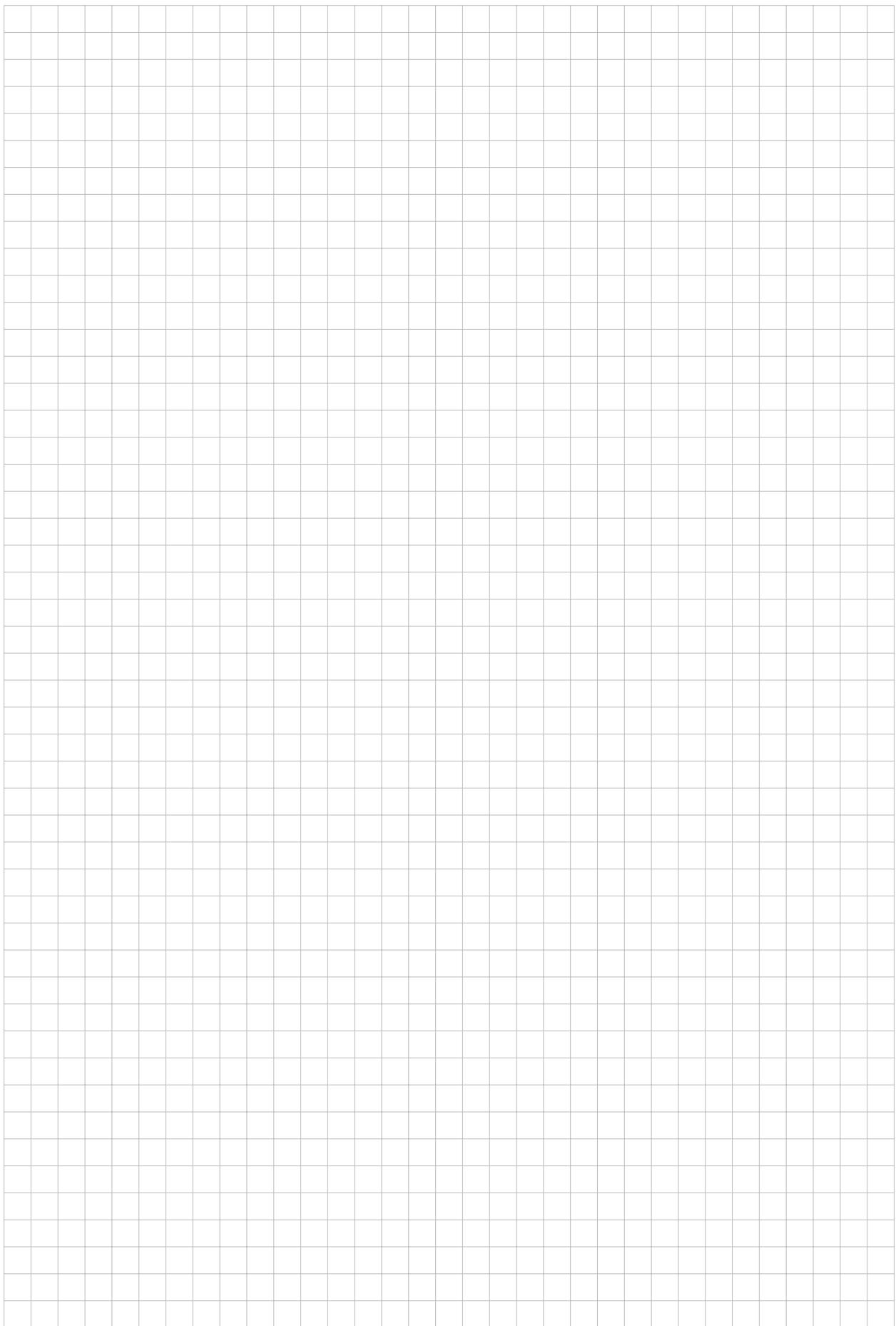


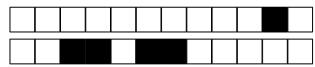
+2/11/34+



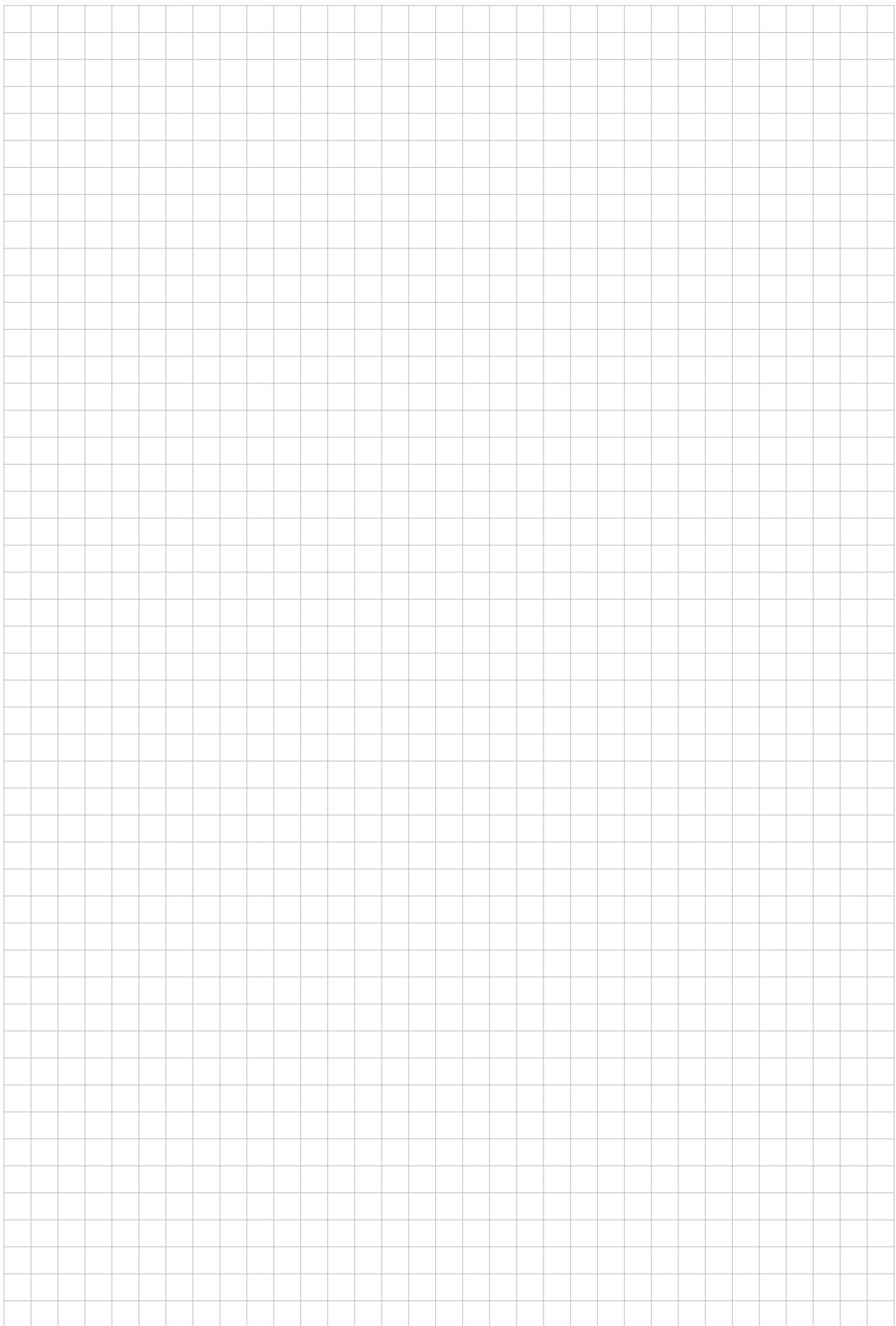


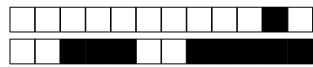
+2/12/33+



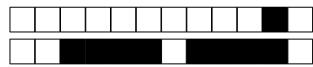


+2/13/32+





+2/14/31+



+2/15/30+

