

## Chapitre 3 : Quelques notions d'axonométrie

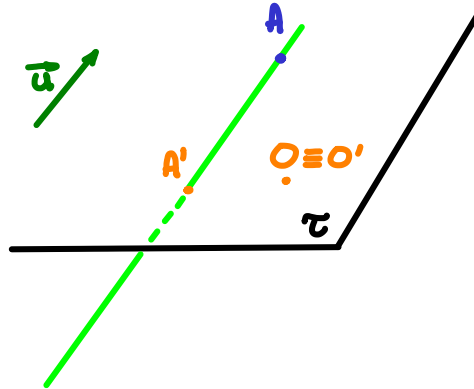
### 3.1 Axonométrie générale

#### Définition

Une axonométrie est une **projection de l'espace** sur un plan  $(\tau)$  **parallèlement** à une **direction donnée**  $(\vec{u})$ .

#### 3.1.1 Représentation du point et repère-image

Soient  $A$  un point de l'espace et  $A'$  sa projection sur  $\tau$  parallèlement à  $\vec{u}$  ( $A'$  est l'image axonométrique de  $A$ ).



Pour repérer le point  $A$  de l'espace, on introduit un **repère orthonormé**  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . On suppose que le plan  $\tau$  passe par  $O$  (l'axonométrie est **invariante par translation**  $\parallel \vec{u}$  de  $\tau$ ).

Soit  $p$  la **projection** sur  $\tau$  parallèlement à  $\vec{u}$ , notons  $\vec{e}_1' = p(\vec{e}_1)$ ,  $\vec{e}_2' = p(\vec{e}_2)$  et  $\vec{e}_3' = p(\vec{e}_3)$ . Le système  $(O, \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$  est appelé **repère-image**.

#### Remarque

Le repère-image  $(O, \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$  n'est pas un repère de  $\tau$  : les  $\vec{e}_i'$  sont **linéairement dépendants**.

Soit  $A(x, y, z)$  relativement à  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ .

$$\vec{OA} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3,$$

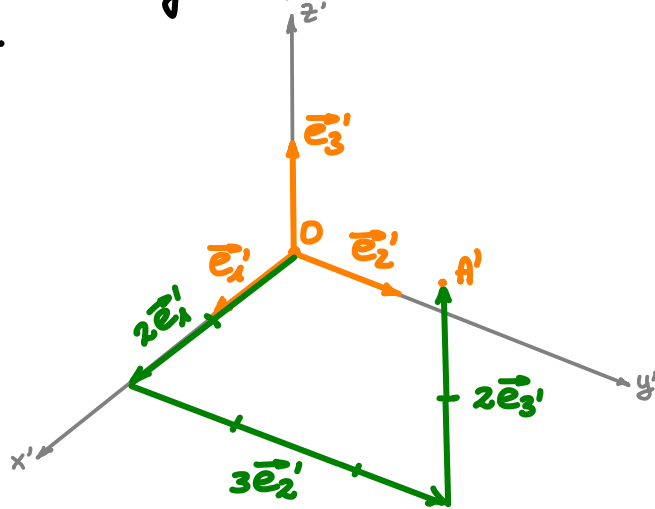
$$\begin{aligned}\vec{OA}' &= p(\vec{OA}) = p(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) = xp(\vec{e}_1) + yp(\vec{e}_2) + zp(\vec{e}_3) \\ &= x\vec{e}_1' + y\vec{e}_2' + z\vec{e}_3',\end{aligned}$$

car  $p$  est une **application linéaire** (la projection parallèle conserve le rapport de section (Thalès)).

Donc, si on suppose connu le repère-image, cette relation vectorielle permet de construire  $A'$  dans le plan  $\tau$ .

### Exemple

Etant donné le repère-image  $(O, \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$ , construire l'image axonométrique du point  $A(2, 3, 2)$ .



### 3.1.2 Noyau de l'axonométrie

Le **noyau de la projection** est la droite passant par  $O$  et dirigée par  $\vec{u}$ .

(tous les points sont envoyés sur l'origine)

Son image par  $p$  est l'origine  $O$ .

De façon plus générale,

- toute droite parallèle au noyau se projette selon un point,
- tout plan parallèle au noyau se projette sur  $\pi$  selon une droite.

$\vec{u}$  vecteur de la projection

Soit  $\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3$  relativement à la base orthonormée  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ .

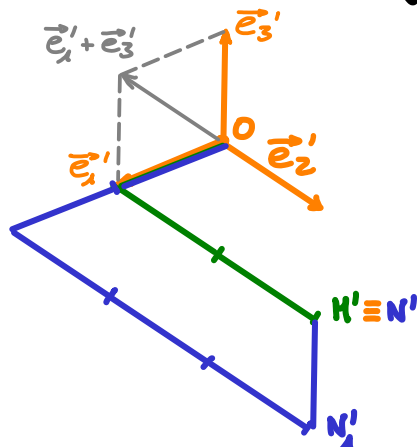
Or,  $p(\vec{u}) = \vec{0}$ , donc

$$\begin{aligned} p(u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3) = \vec{0} &\Leftrightarrow u_1 p(\vec{e}_1) + u_2 p(\vec{e}_2) + u_3 p(\vec{e}_3) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow u_1 \vec{e}_1' + u_2 \vec{e}_2' + u_3 \vec{e}_3' = \vec{0} \end{aligned}$$

Cette relation vectorielle définit la **dépendance linéaire** des vecteurs du repère-image. Réciproquement, la **combinaison linéaire nulle** définie sur les vecteurs du repère-image permet de retrouver la direction du noyau de l'axonométrie.

### Exemple

Etant donné le repère-image  $(O, \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$  dont les vecteurs sont liés par la relation  $\vec{e}_1' + \vec{e}_2' + \vec{e}_3' = \vec{0}$ , représenter l'image des points  $H(1, 2, 0)$  et  $N(2, 3, 1)$ .



$\vec{e}_3'$  et  $\vec{e}_1'$  donnés, on obtient  $\vec{e}_2' = -(\vec{e}_1' + \vec{e}_3')$

On constate que les images axonométriques  $H'$  et  $N'$  sont confondues. Par conséquent, le vecteur  $\overrightarrow{HN}$  est parallèle au noyau.

### Vérification

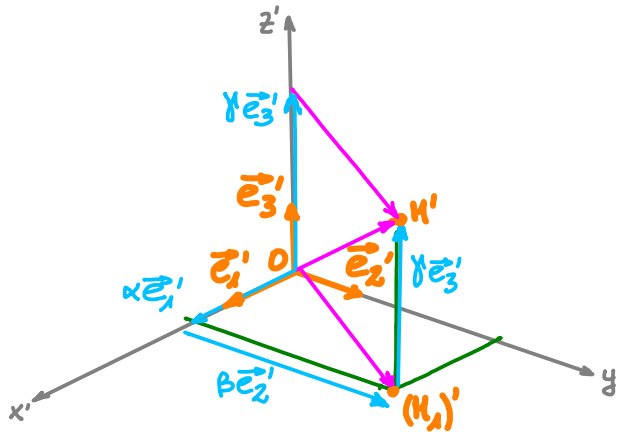
$$\overrightarrow{HN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ et } \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ car } \vec{e}_1' + \vec{e}_2' + \vec{e}_3' = \vec{0}.$$

### Remarque

Cet exemple illustre le fait que l'image axonométrique  $H'$  d'un point  $H$  ne suffit pas à caractériser le point  $H$  de l'espace (l'axonométrie est une application linéaire non injective). Sur l'épure, on doit associer à  $H'$  l'image axonométrique d'un autre point lié à  $H$ , en général  $H_1$ , sa projection sur  $\pi_1$  (ou  $H_2$ , ou  $H_3$ ). Sur l'épure, le point  $H$  est ainsi défini par le couple  $(H', (H_i)')$ .

### Exemple

Déterminer les coordonnées du point  $H$  :  $H(\alpha, \beta, \gamma)$ .



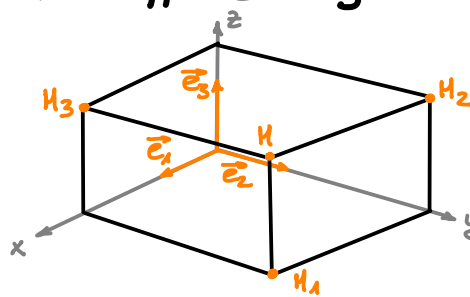
### Remarque

Jusqu'à présent, on a défini l'axonométrie en se donnant le repère-image  $(O, \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$  de façon arbitraire. Est-ce légitime ? La réponse est donnée par le théorème de Pohlke (1855) :

Tout système  $(O, \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$  qui engendre un plan  $\tau$  est la projection parallèle sur  $\tau$  d'un repère orthonormé  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  à une homothétie près.

### Convention

Par la suite, pour alléger les notations, on supprime les symboles "prime" pour noter les images axonométriques.



### Remarque

Si on travaille sans coordonnées, on ne représente pas les vecteurs-images  $\vec{e}_i$  ; on ne représente que l'image des axes  $Ox, Oy$  et  $Oz$ .

## 3.2 Axonométrie cavalière

### 3.2.1 Définition

Une **axonométrie cavalière** est une projection oblique de l'espace sur  $\Pi_2$  ( $\vec{u} \nparallel \Pi_2$ ).

### Propriétés

- Toute figure située dans un plan parallèle à  $\Pi_2$  se projette en vraie grandeur sur  $\Pi_2$ .
- Les axes  $(Oy)$  et  $(Oz)$  apparaissent en vraie grandeur.
- L'axe  $(Ox)$  apparaît en "fausse grandeur".

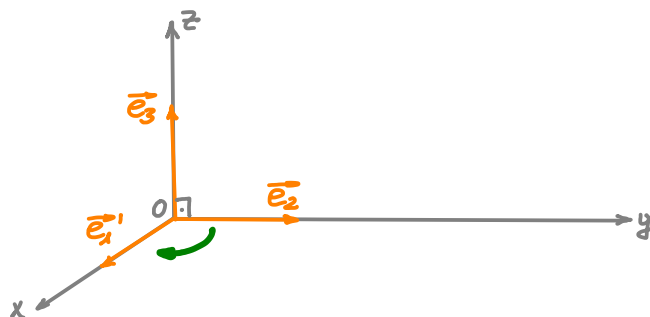
Soit  $\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3$  un vecteur directeur du noyau de l'axonométrie cavalière.

Par projection, on obtient :

$$\vec{0} = u_1 \vec{e}_1' + u_2 \vec{e}_2' + u_3 \vec{e}_3' \Leftrightarrow \vec{e}_1' = -\frac{u_2}{u_1} \vec{e}_2' - \frac{u_3}{u_1} \vec{e}_3' \quad (u_1 \neq 0 \text{ car } \vec{u} \nparallel \Pi_2).$$

Or,  $\vec{e}_2' = \vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3' = \vec{e}_3$ .

Donc,  $\vec{e}_1' = -\frac{u_2}{u_1} \vec{e}_2 - \frac{u_3}{u_1} \vec{e}_3$



De façon générale, on définit une axonométrie cavalière ...

... par la donnée du repère-image ;

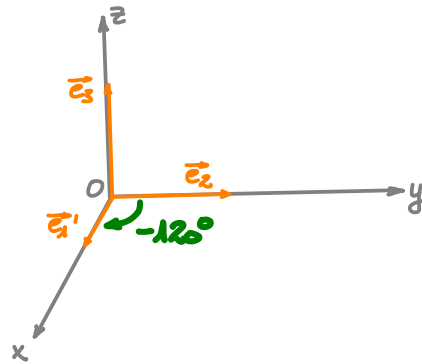
... ou par la donnée de  $\vec{u}$  ;

... ou par les deux grandeurs suivantes : i)  $\alpha = \angle(\vec{e}_2', \vec{e}_1') = \angle(\vec{e}_2, \vec{e}_1')$   
(angle orienté)

ii)  $k = \|\vec{e}_1'\|$

### Exemple

Construire le repère-image de l'axonométrie définie par  $\alpha = -120^\circ$  et  $k = 1/2$ .



$$\begin{aligned}\|\vec{e}_1'\| &= \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \|\vec{e}_2\| = \frac{1}{2} \|\vec{e}_3\|\end{aligned}$$

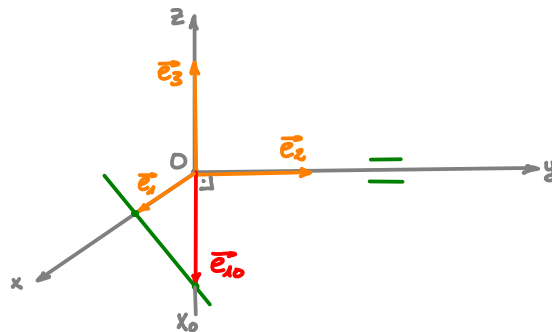
### 3.2.2 Vraie grandeur d'un segment

a) Le segment AB est situé dans le sol:  $A=A_1, B=B_1$ .

On amène le plan  $\pi_1$  en vraie grandeur en le "rabattant" sur  $\pi_2$ .

La charnière de ce rabattement est l'axe Oy.

Le vecteur  $\vec{e}_1$  devient le vecteur  $\vec{e}_{10}$ . Il apparaît en vraie grandeur,  $\|\vec{e}_{10}\| = 1$ , et perpendiculaire à  $\vec{e}_2$ .



L'axe (Ox) devient l'axe (Ox<sub>0</sub>).

Le point  $A_1$  est dans  $\pi_1$ . Après rabattement de  $\pi_1$  sur  $\pi_2$ , il vient en  $A_{10}$ .

On construit  $A_{10}$  à partir de  $A_1$  de la façon suivante :

- Soit  $d_1$  la droite passant par  $A_1$  parallèle à (Ox).
- Le point d'intersection de  $d_1$  avec la charnière (Oy) est un point invariant.
- La droite  $d_1$  parallèle à (Ox) se transforme en une droite  $d_{10}$  parallèle à (Ox<sub>0</sub>).
- Le point  $A_{10}$  appartient à  $d_{10}$  et les points  $A_1$  et  $A_{10}$  sont alignés sur la direction  $\vec{e}_{10} - \vec{e}_1$ .

On construit  $B_{10}$  à partir de  $B_1$  de façon analogue. Le segment  $(A_{10}B_{10})$  représente la vraie grandeur de  $(A_1B_1)$ .

Cette transformation du plan qui transforme  $A_1$  en  $A_{10}$  est une affinité d'axe (Oy) et de direction  $\vec{e}_{10} - \vec{e}_1$ .

→ Exemple 3.2.1

b) Cas général: A et B sont quelconques.

- On rabat  $\pi_1$  sur  $\pi_2$ , et on construit par affinité  $A_{10}$  et  $B_{10}$  comme précédemment.
- On rabat le premier projetant de AB sur  $\pi_1$  rabattu (ou sur un plan horizontal).

————→ Exemple 3.2.2