Cours du mercredi 26 février 2025

Cours de Géométrie Descriptive

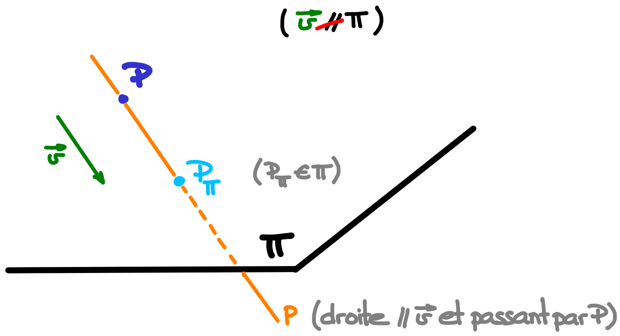
(MaN, semestre de printemps 2025)

But:
- Représentation bi-dimensionnelle de situations spatiales.
- Descriptions et résolutions sur la feuille de papier (en 2D) de problèmes géométriques de l'espace (en 3D).

Chapitre 1: Projection parallèle, projections de Monge

1.1 Projection parallèle oblique

1.1.1 Définition (projection d'un point P)



La projection du point P de l'espace sur le plan π parallèlement à la direction $\vec{v}$ est le point P_π, intersection de la droite $p = (P, \vec{v})$ avec le plan π.

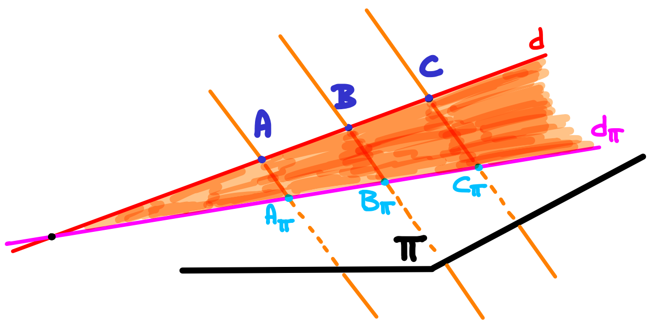
La droite p est appelée la projetante du point P.

1.1.2 Propriétés géométriques de l'espace conservées par projection parallèle

i) Conservation de l'alignement

Soient A, B, C trois points de l'espace et A_π, B_π, C_π leur projection sur le plan π.

Si A, B, C sont alignés, alors A_π, B_π, C_π sont alignés.



Attention: La réciproque est fausse !

ii) Conservation du rapport de section

· Définition du rapport de section

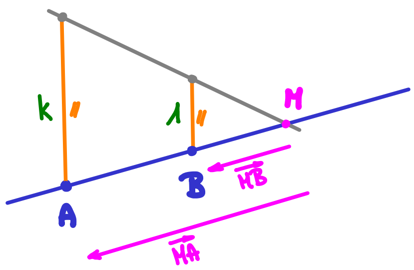
Soient A, B, M trois points alignés, le rapport de section de M par rapport à A et B, noté (AB, M), est le nombre réel k défini par l'équivalence suivante :

$$\boxed{(AB, M) = k \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}}$$

· Construction du point M défini par $(AB, M) = k$ à l'aide du théorème de Thalès.

On distingue deux cas :

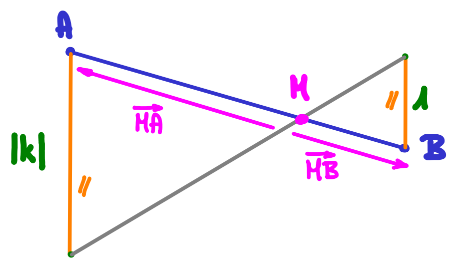
a) $k > 0$ (M : à l'extérieur de AB) ($\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ de même sens)



Connus : A, B, k

$\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$, avec $k > 0$

b) $k < 0$ (M : entre A et B) ($\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ de sens opposé)



Connus : A, B, k

$\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$, avec $k < 0$

· Le rapport de section est conservé par projection parallèle.

Soient A, B, C trois points alignés définissant le rapport de section $(AB, C) = k$, alors les trois points alignés A_π, B_π, C_π définissent le même rapport de section :

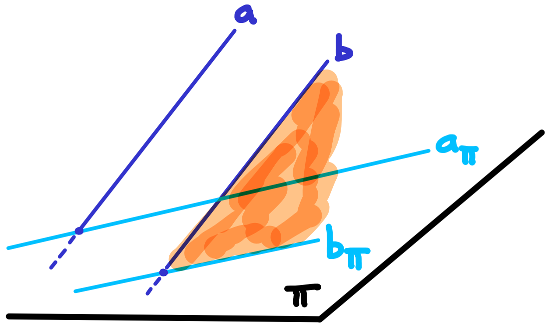
$$\boxed{(AB, C) = k \Rightarrow (A_\pi B_\pi, C_\pi) = k}$$

En particulier,

$$\boxed{I \text{ point milieu de } A, B \Rightarrow I_\pi \text{ point milieu de } A_\pi, B_\pi}$$

iii) Conservation du parallélisme

Deux droites parallèles a et b ont pour projection deux droites a_π et b_π qui sont parallèles.



Attention : La réciproque est fausse !

Soient a et b deux droites de l'espace, si leur projection a_π et b_π sont parallèles, on ne peut pas en conclure que a et b sont parallèles.

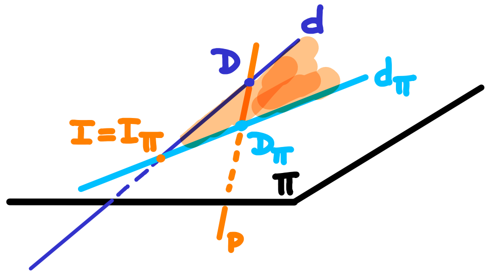
1.1.3 Projection d'une droite

Soit d une droite de l'espace, sa projection sur le plan π, notée d_π, est l'ensemble des projections de ses points. C'est une droite (conservation de l'alignement).

On peut distinguer deux cas :

- Droite d coupant π :

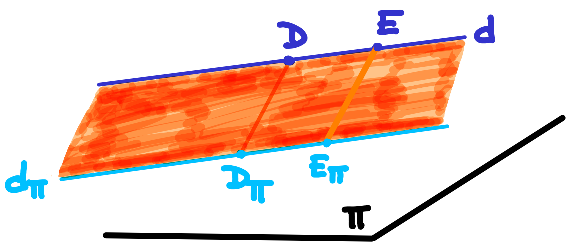
Soient $\{I\} = d \cap \pi$ et D un point de d $(D \neq I)$, alors $d_\pi = d_\pi(I, D_\pi)$.



Le point I est invariant par projection.

- Droite d parallèle à π :

La droite projetée d_π est parallèle à d.

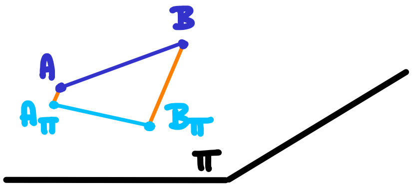


L'ensemble des projetantes des points de d définit un plan δ appelé plan projetant de d :

$$\boxed{\delta = \delta(d, d_\pi)}$$

1.1.4 Grandeurs de l'espace, généralement non conservées par projection parallèle

- Les distances sont non conservées.



$AB \neq A_\pi B_\pi$

- La mesure des angles est non conservée.

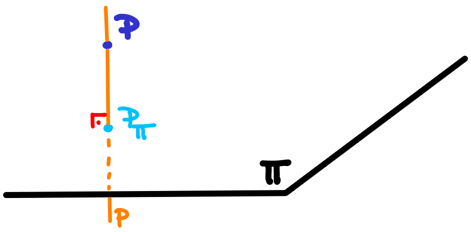
  En particulier, l'orthogonalité n'est pas conservée.

- Les aires ne sont pas conservées.

1.2 Projection orthogonale

1.2.1 Définition

La projection orthogonale est un cas particulier de projection parallèle : la direction de projection est perpendiculaire au plan π :



1.2.2 Propriétés

Les propriétés de la projection parallèle restent valables :

→ conservation … •… de l'alignement,

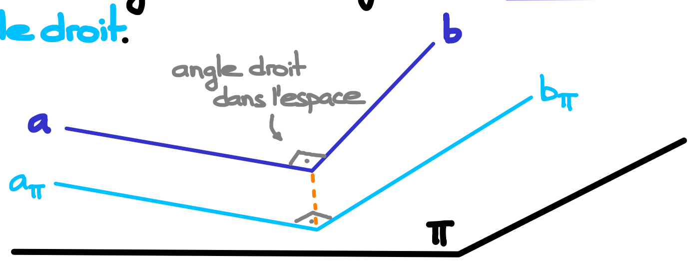
•… du rapport de section,

•… du parallélisme.

Une nouvelle propriété, spécifique à la projection orthogonale, apparaît :

Théorème de conservation de l'angle droit

La projection orthogonale d'un angle droit dont l'un des côtés est parallèle au plan π est un angle droit.



La réciproque est vraie : si la projection d'un angle de l'espace dont l'un des côtés est parallèle à π est un angle droit, alors l'angle de l'espace est droit.

1.3 Méthode de Monge

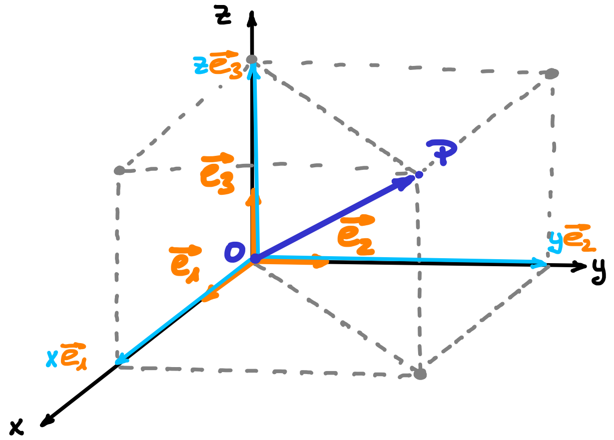
1.3.1 Repère et coordonnées d'un point P de l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$\begin{cases} O : \text{origine} \\ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 : \text{ 3 vecteurs unitaires } (\|\vec{e}_i\| = 1,\ i = 1,2,3) \text{ et orthogonaux deux à deux.} \end{cases}$$

Tout point P de l'espace est défini par ses coordonnées x, y, z vérifiant la relation vectorielle

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3}$$

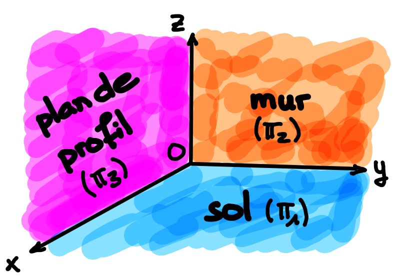


x est appelée l'abscisse de P
y est appelée l'ordonnée de P
z est appelée la cote de P

L'axe $(O, \vec{e}_1)$ est appelé l'axe des abscisses. On le note Ox.
L'axe $(O, \vec{e}_2)$ est appelé l'axe des ordonnées. On le note Oy.
L'axe $(O, \vec{e}_3)$ est appelé l'axe des cotes. On le note Oz.

Le système d'axes $Oxyz$ définit trois plans notés π_1, π_2 et π_3, appelés respectivement 1er, 2ème et 3ème plan de projection :

- $\pi_1 = (xOy)$ est appelé le sol
- $\pi_2 = (yOz)$ est appelé le mur
- $\pi_3 = (xOz)$ est appelé le plan de profil



1.3.2 Méthode de Monge, épure d'un point P

→ voir le document "Methode_de_Monge.pdf" sur Moodle

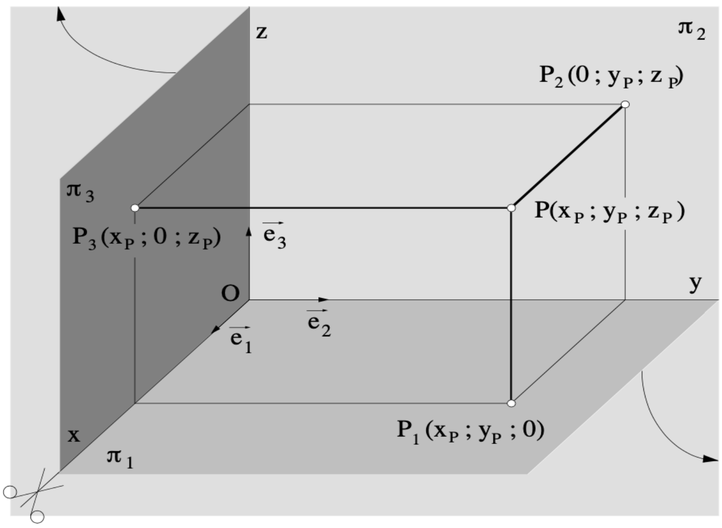
i) On projette orthogonalement le point P sur les trois plans de projection :

- la projection orthogonale de P sur π_1 (parallèlement à $\vec{e}_3$) se note P_1.
- la projection orthogonale de P sur π_2 (parallèlement à $\vec{e}_1$) se note P_2.
- la projection orthogonale de P sur π_3 (parallèlement à $\vec{e}_2$) se note P_3.

ii) On coupe le trièdre $Oxyz$ selon l'axe Ox (dédoublement de l'axe des abscisses)

iii) On rabat le plan π_1 sur π_2.
La charnière est l'axe Oy appelée ligne de terre.

iv) On rabat le plan π_3 sur π_2. La charnière est l'axe Oz.



$|x| = \text{distance}(P, \pi_2)$

$|y| = \text{distance}(P, \pi_3)$

$|z| = \text{distance}(P, \pi_1)$

v) Le résultat ainsi obtenu est l'épure du point P.
Les trois plans π_1, π_2, π_3 sont confondus et coïncident avec la feuille de papier.

Propriété fondamentale de la méthode de Monge

Si P est un point de l'espace, alors, sur l'épure, P_1 et P_2 sont sur une même perpendiculaire à la ligne de terre (cette perpendiculaire est appelée ligne de rappel) et, réciproquement, si sur l'épure, P_1 et P_2 sont sur une même ligne de rappel (perpendiculaire à Oy), alors P_1 et P_2 sont les 1ère et 2ème projections d'un point P de l'espace.

On a une propriété analogue relativement à …
- … P_2, P_3 et Oz ;
- … P_1, P_3 et Ox dédoublé.

→ voir Exemple 1.3.1