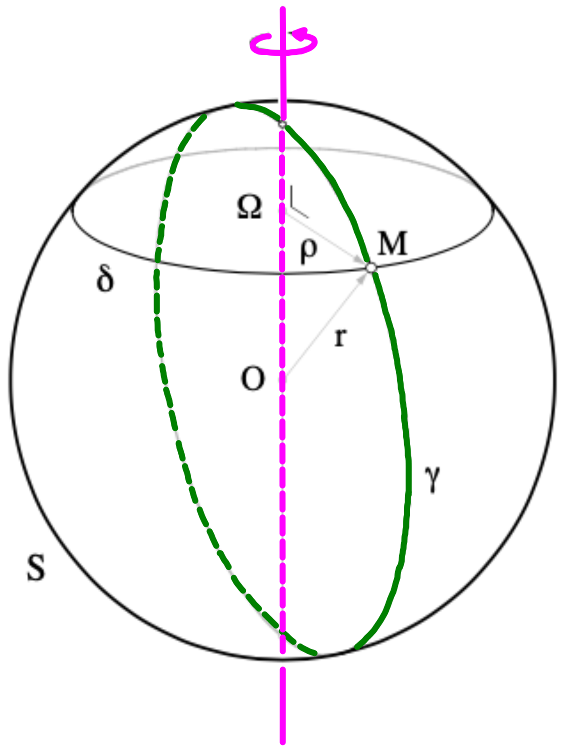
Chapitre 9 : Sphère, cône et cylindre

9.1 Sphère : définitions et propriétés



- sphère S(O;r) $\equiv \Sigma(O,r)$ engendrée par la rotation du cercle γ(O;r) autour d'un de ses diamètres
  γ(O;r) : méridien

- cercle δ(Ω;ρ) engendré par la rotation de M ∈ S
  δ(Ω;ρ) : parallèle

9.2 Sections planes d'une sphère

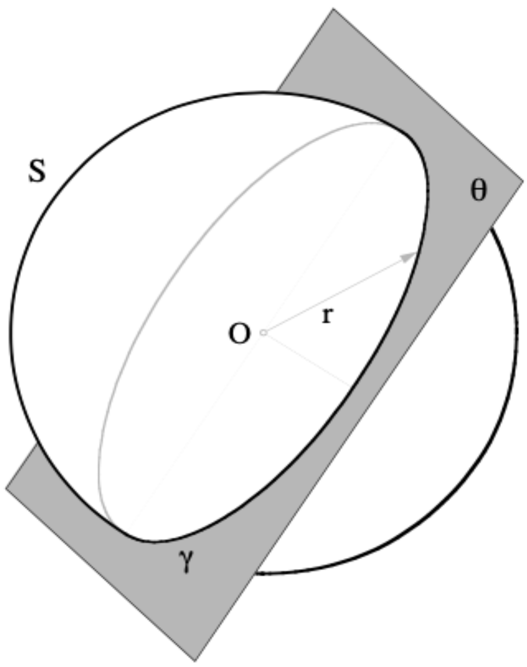
intersections par un plan

Toute section plane d'une sphère S (ou Σ) est un cercle.

En effet, soient θ un plan sécant et n la normale à θ passant par O.
n coupe θ en Ω. Or, la distance de $M \in \Sigma \cap \theta$ à Ω est constante par Pythagore.

Soit $\gamma = \Sigma \cap \theta$,

- si θ passe par O, alors γ est un grand cercle de Σ : γ(O,r).

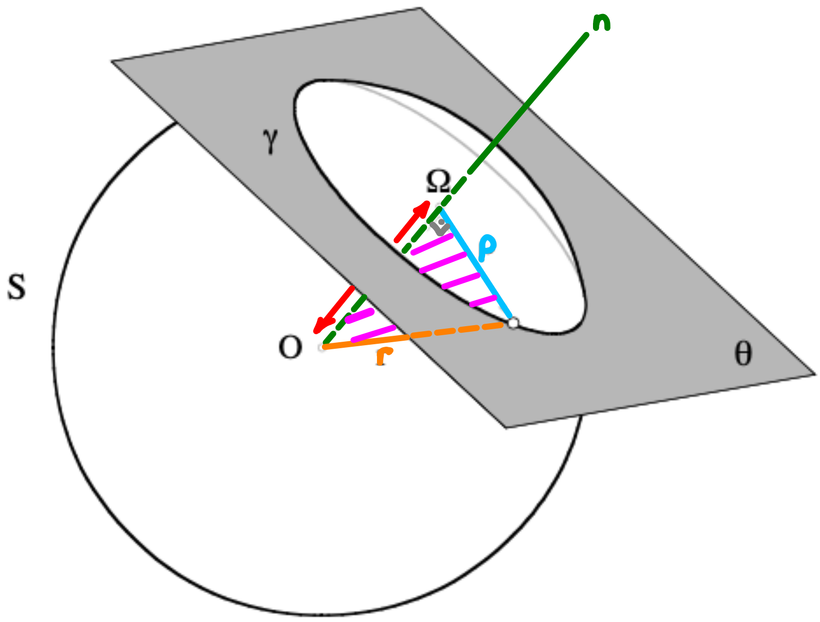


- section plane de la sphère S(O;r) par le plan θ passant par O
- γ(O;r) = S ∩ θ
- γ(O;r) : grand cercle de S

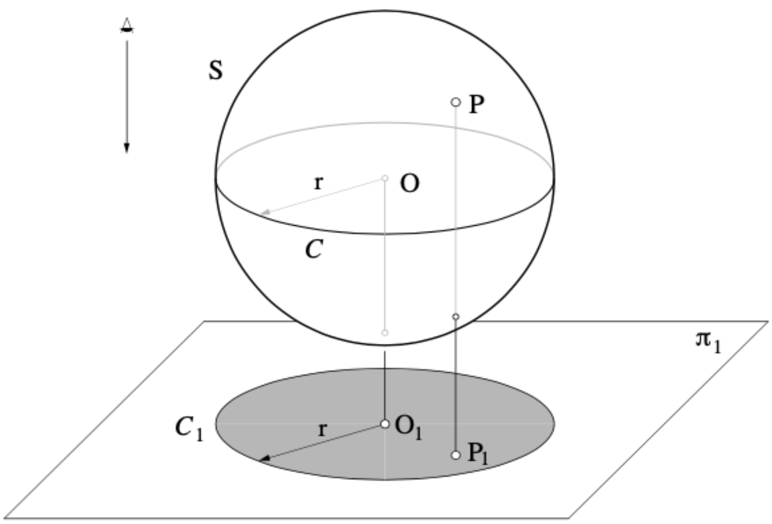
· si θ ne passe pas par O, alors γ est un petit cercle de Σ :

$\gamma(\Omega, \rho)$, avec $\rho^2 = r^2 - (O\Omega)^2$.

- section plane de la sphère S(O;r) par le plan θ ne passant pas par O
- $\gamma(\Omega;\rho) = S \cap \theta$
  $\gamma(\Omega;\rho)$: petit cercle de S
- $O\Omega \perp \theta$
  $O\Omega^2 + \rho^2 = r^2$

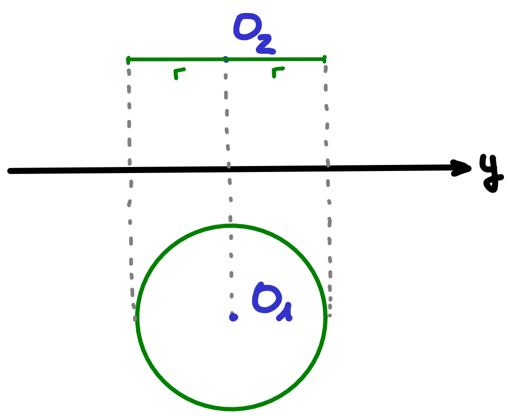


9.3 Projections et contours apparents de la sphère

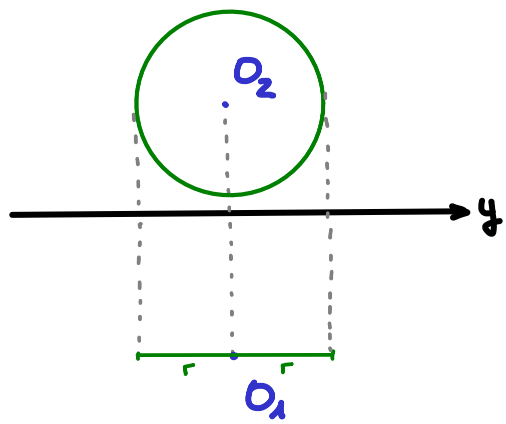


- C, contour apparent de la sphère S(O;r) sur π
- C, grand cercle horizontal de S
- C_1 (O_1;r) limite les 1ères projections des points P de S

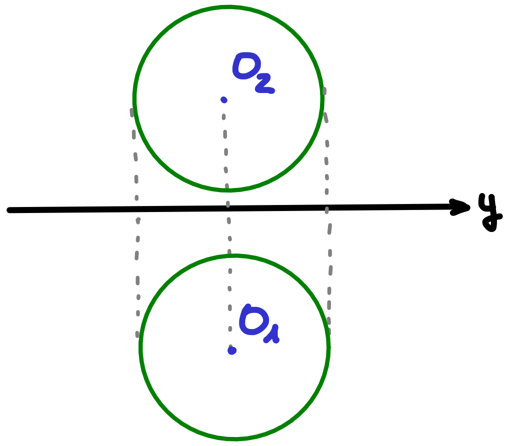
· Contour apparent de Σ sur Π_1 :



· Contour apparent de Σ sur Π_2 :



· Epure de Σ :



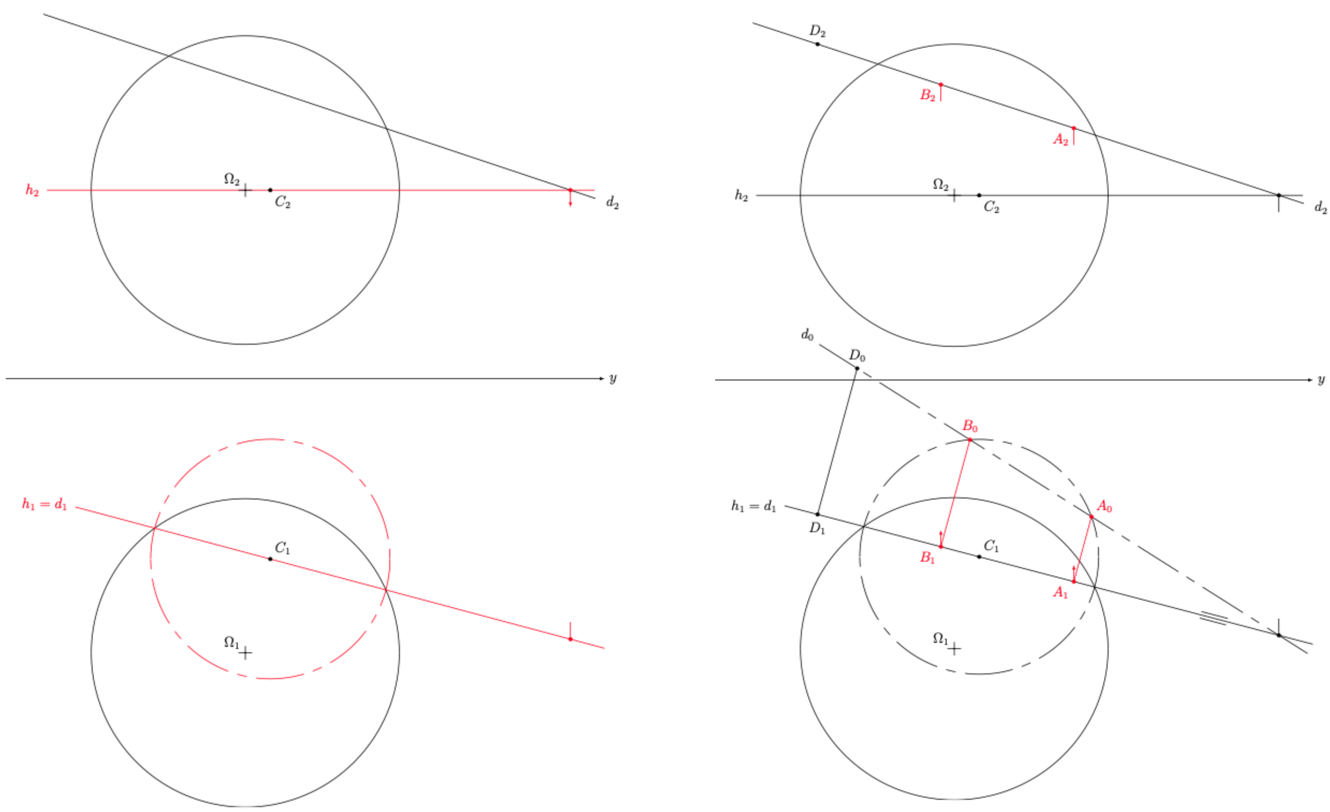
Sur l'épure, on ne représente que la 1ère projection du contour apparent de Σ sur π_1 et la 2ème projection du contour apparent de Σ sur π_2.

Exemple: Exercice 14.1

9.4 Intersection d'une droite et d'une sphère

Soient $\Sigma(\Omega, R)$ une sphère et d une droite qui coupe Σ en A et B.
On construit les points d'intersection A et B à l'aide d'un plan auxiliaire.
Soit α un plan contenant d, il coupe Σ selon un cercle γ. Les pts A et B cherchés sont les pts d'intersection de d et de γ.

1) Si on choisit comme plan α un projetant de d, le cercle γ est un petit cercle de Σ dont le centre et le rayon sont "immédiats".



2) Si on choisit comme plan α le plan défini par d et Ω, le cercle γ est un grand cercle de Σ de centre Ω et de rayon R.

9.5 Cônes et cylindres : définitions

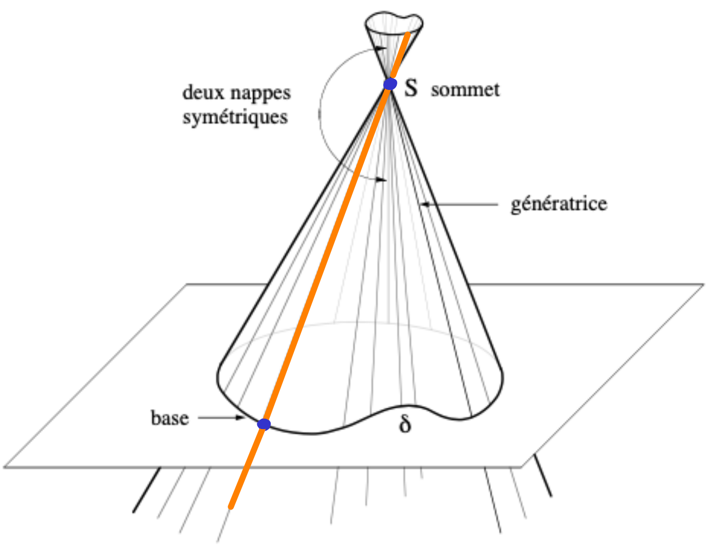
Les cônes et les cylindres sont des surfaces réglées.

∠ une surface réglée est une surface par chaque pt de laquelle passe une droite appelée génératrice, contenue dans la surface.

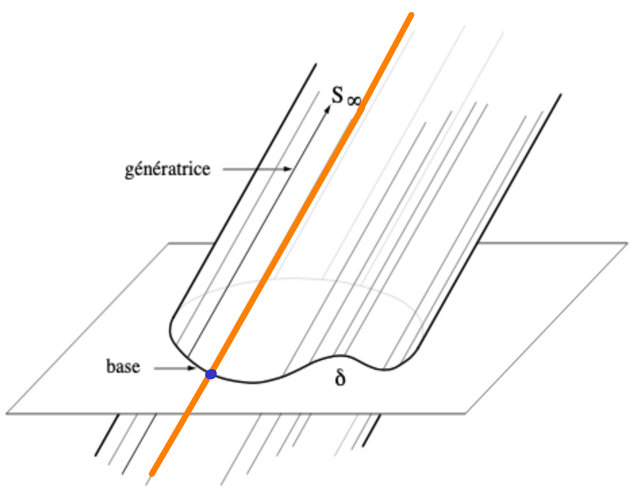
· Un cône est l'ensemble des droites de l'espace passant par un point donné S et s'appuyant sur une courbe fermée plane δ. S est le sommet du cône et δ en est la base.

· Un cylindre est l'ensemble des droites de l'espace parallèles à une direction S_∞ donnée et s'appuyant sur une courbe fermée plane δ : la base.

Les droites qui engendrent un cône ou un cylindre sont appelées génératrices.



- δ courbe fermée plane
- S n'appartient pas au plan de la base

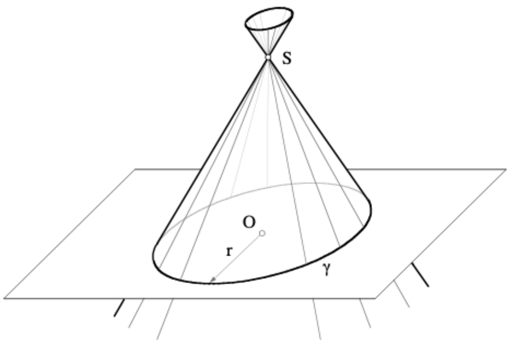


- δ courbe fermée plane
- S_∞ n'est pas parallèle au plan de la base

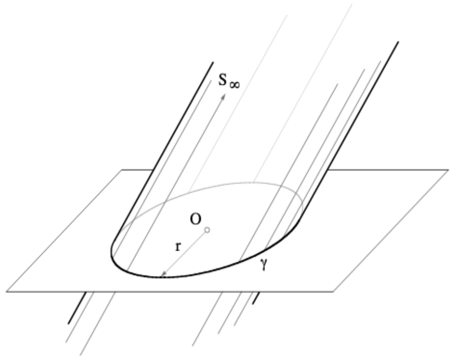
Cas particulier 1

Si la courbe de base est un cercle, le cône ou le cylindre est dit circulaire.

- γ base du cône
- γ cercle de centre O et rayon r

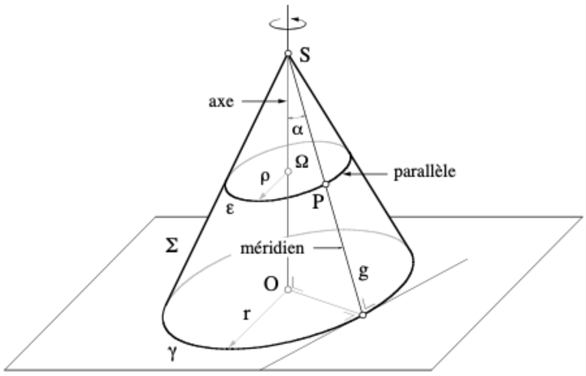


- γ base du cylindre
- γ cercle de centre O et rayon r



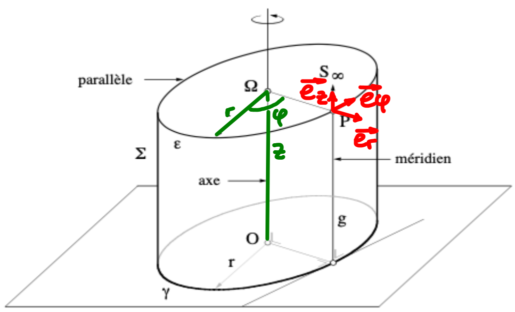
Cas particulier 2

- Soient g et a deux droites sécantes en S. La surface de révolution engendrée par la rotation de g autour de l'axe a est un cône appelé cône de révolution.



- Σ cône circulaire dont le sommet S est sur l'axe de la base γ(O;r)
- Σ engendré par révolution de g autour de (OS) coupant g ; P ∈g décrit alors un cercle ε(Ω;ρ)
- Σ lieu des droites de l'espace passant par S faisant un angle α avec une droite fixe (OS)

- Soient g et a deux droites parallèles. La surface de révolution engendrée par la rotation de g autour de l'axe a est un cylindre appelé cylindre de révolution.



Système de coordonnées cylindriques

- Σ cylindre circulaire dont S_∞ est parallèle à l'axe de la base γ(O;r)
- Σ engendré par révolution de g autour de (OS_∞) // g ; P ∈g décrit alors un cercle ε(Ω;r)
- Σ lieu des points de l'espace à distance r d'une droite fixe (OS_∞)

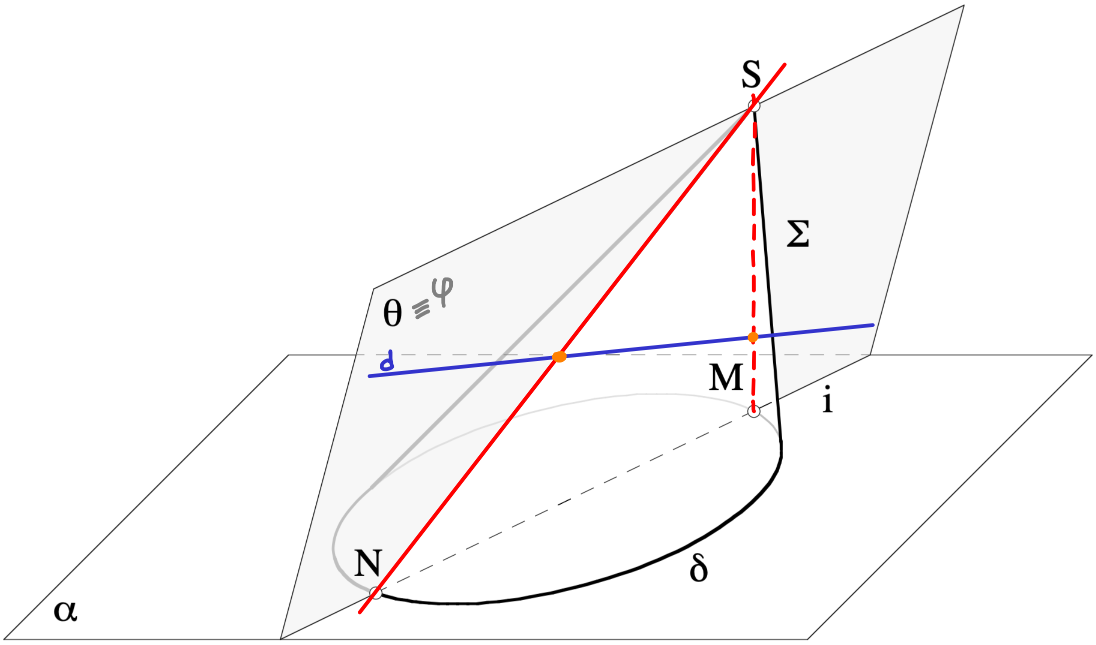
9.6 Sections planes d'un cône circulaire

Soient $\Sigma(S,\delta)$ un cône circulaire de sommet S et ayant pour base un cercle δ dans un plan α, θ un plan quelconque, et $\delta' = \Sigma \cap \theta$.
section plane

9.6.1 Généralités

1) Premier cas

$S \in \theta$: δ' est formé de deux génératrices.



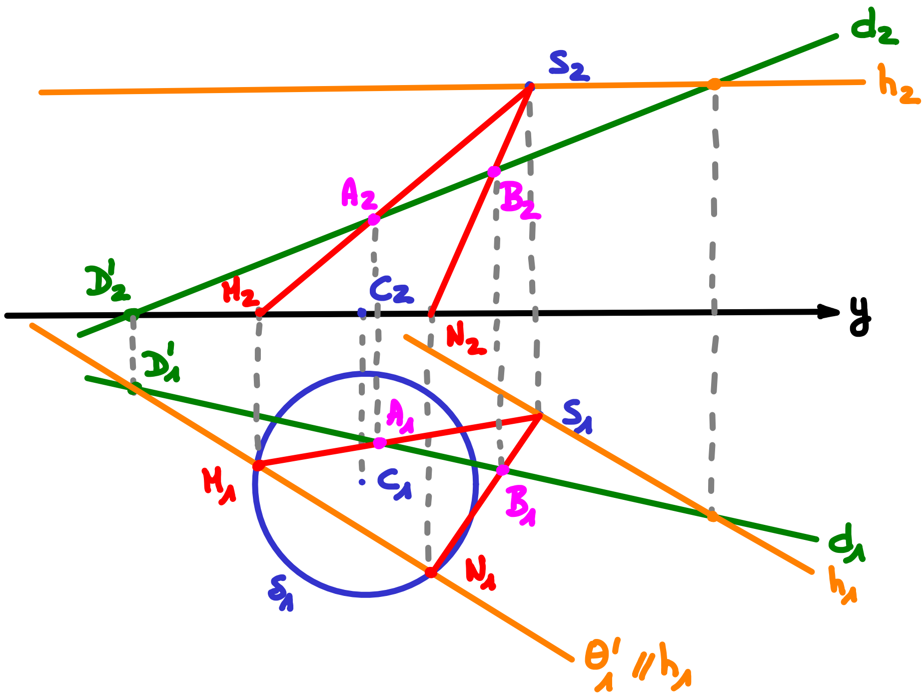
- θ plan de section passant par S
- (SM) ∪ (SN) = = Σ ∩ θ
- i = θ ∩ α
- i ∩ δ ={M,N}

Exemple d'application:

Soient $\Sigma(S,\delta)$, $\delta \in \Pi_1$ et d une droite.
Construire l'intersection de d avec Σ.

↳ Marche à suivre :

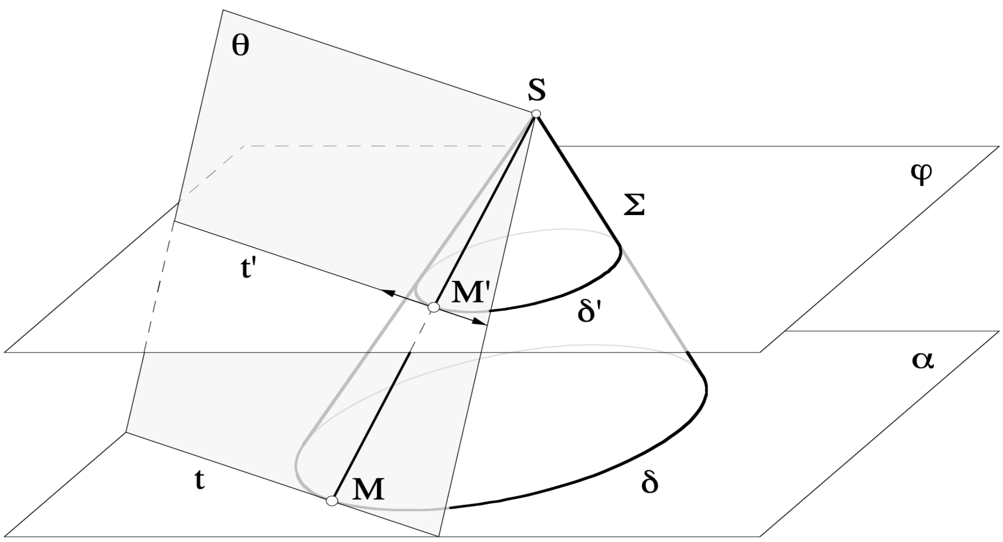
- Soit θ le plan auxiliaire passant par S et contenant d. On construit sa trace θ' dans le plan de base Π_1.
- $\theta' \cap \delta = \{M,N\} \Leftrightarrow \theta \cap \Sigma = \{SM, SN\}$
- d coupe Σ en $\{A\} = d \cap SM$ et $\{B\} = d \cap SN$.



2) Deuxième cas

$\varphi // \alpha$: δ et δ' sont deux cercles homothétiques (homothétie de centre S).

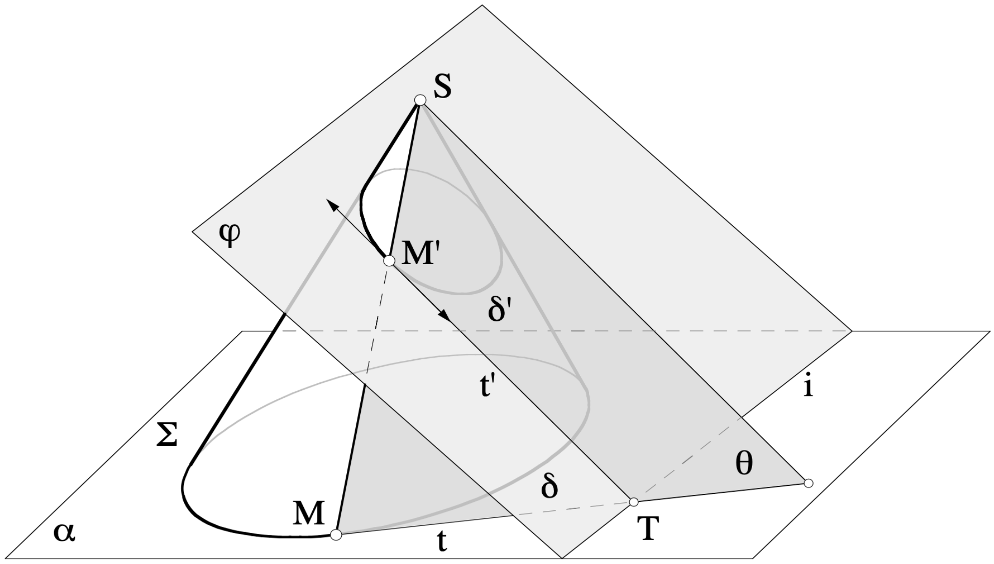
- $\varphi // \alpha$
- $\delta' = \Sigma \cap \varphi$; δ' et δ homothétiques de centre S
- $\{M'\} = SM \cap \varphi$
  $M \in \delta$
- θ plan tangent à Σ le long de SM
- $t' = \theta \cap \varphi$;
  $t // t'$



3) Troisième cas

φ quelconque. La section $\delta' = \Sigma \cap \varphi$ est une conique (théorème de Dandelin).

- $\delta' = \Sigma \cap \varphi$;
- $\{M'\} = SM \cap \varphi$
  $M \in \delta$
- θ plan tangent à Σ le long de SM
- $t' = \theta \cap \varphi$;
  t et t' se coupent en T situé sur $i =$
  $= \alpha \cap \varphi$



Trois situations se présentent :

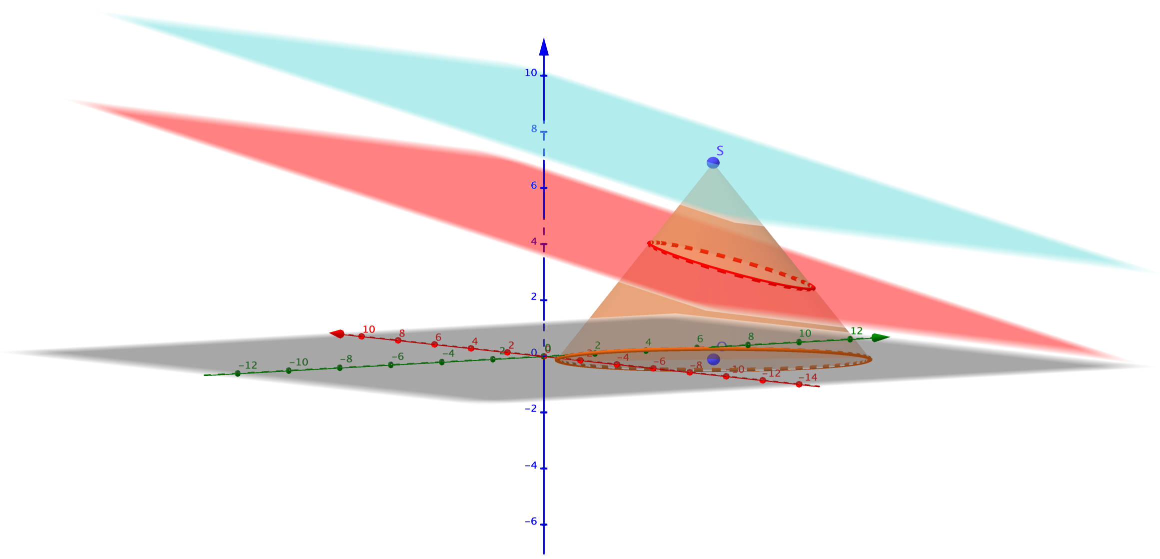
Soit β le plan passant par S et parallèle à φ.

Soit $j = \beta \cap \alpha$. Si j coupe δ en A, alors $SA \in \beta$, donc $SA // \varphi$ et $SA \cap \varphi = (A'_\infty)$.

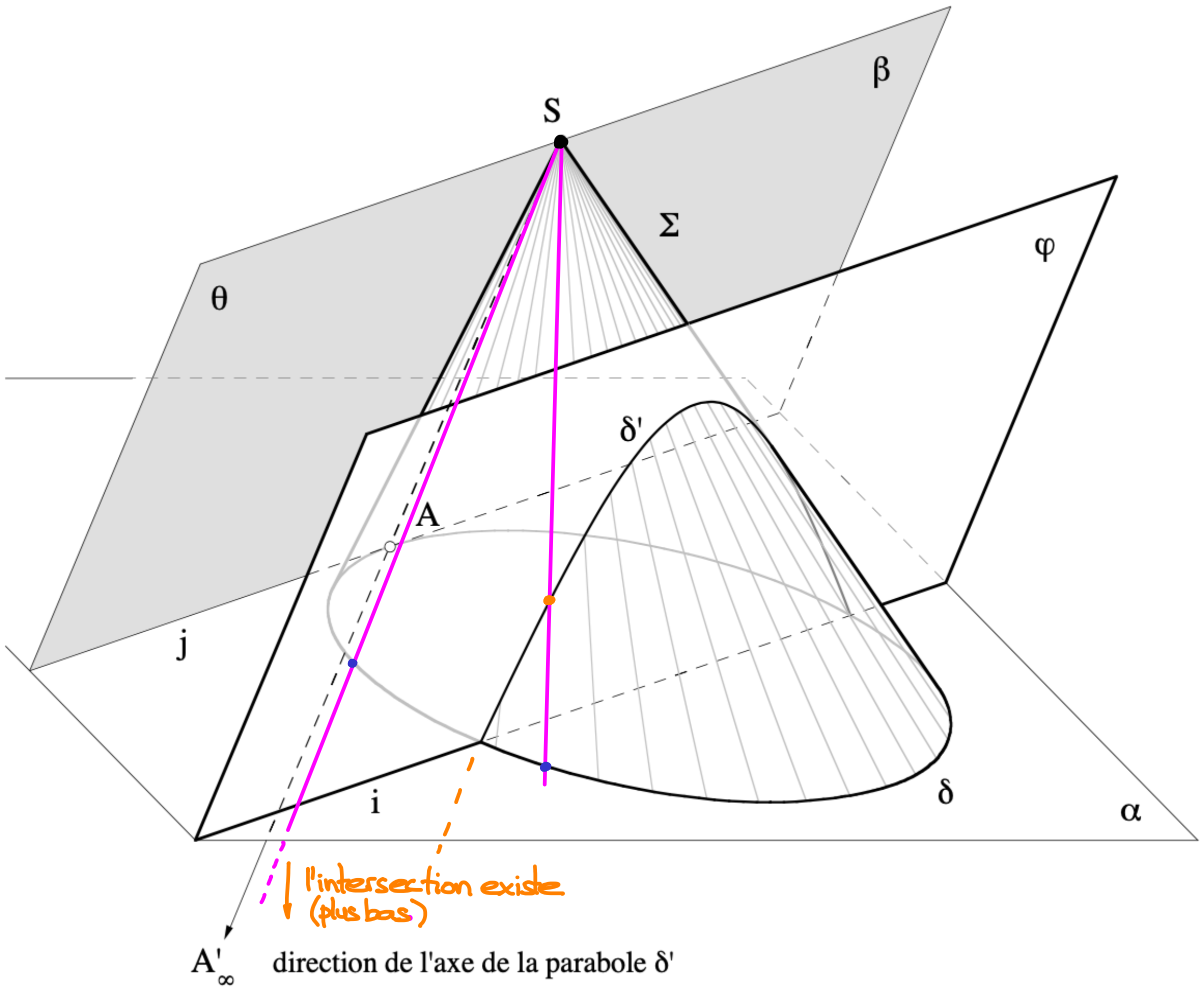
δ' admet un pt à l'infini.

a) j ne coupe pas δ : la conique δ' n'admet pas de pt à l'infini. δ' est une ellipse.

(voir également dessin ci-dessus)



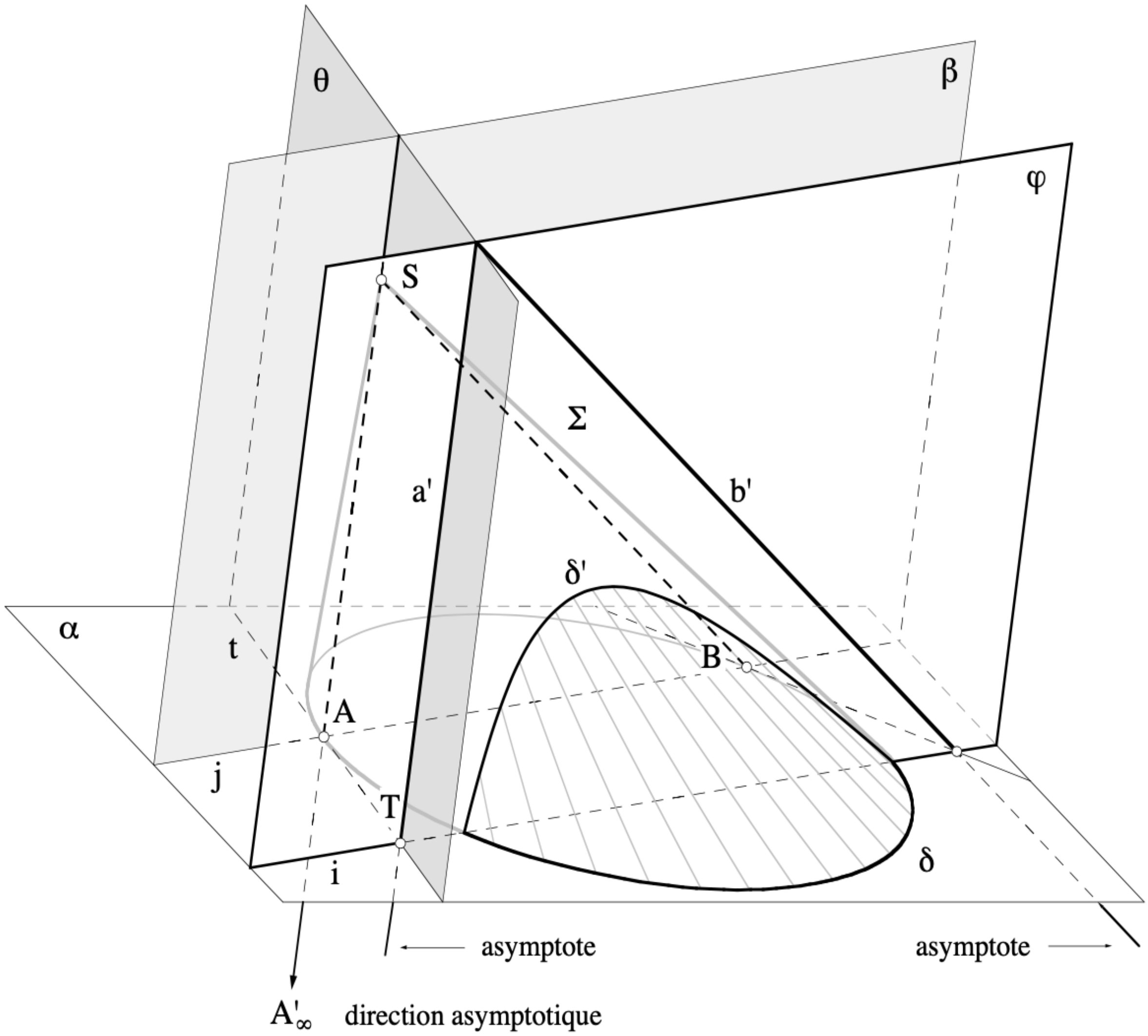
b) j est tangente à δ en A : δ' admet un unique pt à l'infini A'_∞ . δ' est une parabole.
La direction de l'axe de δ' est définie par A'_∞ . Le sommet de δ' est le pt admettant une tangente perpendiculaire à l'axe.



direction de l'axe de la parabole δ'

- $\delta' = \Sigma \cap \varphi$; δ' est une parabole
- β // φ par S ; β coupe α suivant j ; j coupe δ en un seul point A
- $(SA) \cap \varphi = A'_\infty$: direction de l'axe de la parabole
- θ, plan tangent à Σ le long de (SA) ; θ = β
- la tangente en A'_∞ est " la droite de l'infini " $(\beta \cap \varphi)$
- $i = \alpha \cap \varphi$

c) j coupe δ en A et B. δ' admet deux pts à l'infini : A'_∞ et B'_∞. δ' est une hyperbole dont les asymptotes sont les tangentes à δ' en A'_∞ et B'_∞.



- $\delta' = \Sigma \cap \varphi$; δ' est une hyperbole
- β // φ par S ; β coupe α suivant j ; j coupe δ en deux points A et B
- $(SA) \cap \varphi = A'_\infty$: direction asymptotique
- θ , plan tangent à Σ le long de (SA) ; θ défini par (SA) et t ; t , tangente à δ en A
- $a' = \theta \cap \varphi$; a' est tangente en A'_∞ donc asymptote de δ'
- $i = \alpha \cap \varphi$; t, droite de θ coupe i, droite de φ en T ; a' est définie par T et A'_∞

9.7 Sections planes d'un cylindre circulaire

Soient $\Sigma(S_\infty, \mathcal{S})$ un cylindre circulaire de base $\mathcal{S}$ et de centre C, α le plan de la base $\mathcal{S}$, φ un plan de section et $\mathcal{S}'$ la section de Σ par φ.

1) Premier cas

φ est parallèle aux génératrices.

$\mathcal{S}'$ est formée de deux génératrices.

Soit $i = \varphi \cap \alpha$, i coupe $\mathcal{S}$ en M et N, $\mathcal{S}' = \{(S_\infty M), (S_\infty N)\}$

2) Deuxième cas

φ est parallèle à α.

$\mathcal{S}'$ est un cercle de centre C' isométrique à $\mathcal{S}$.

Le centre C' est l'intersection de la droite $\underbrace{(S_\infty, C)}_{\equiv (S_\infty C)}$ avec le plan φ.

3) Troisième cas

φ est quelconque.

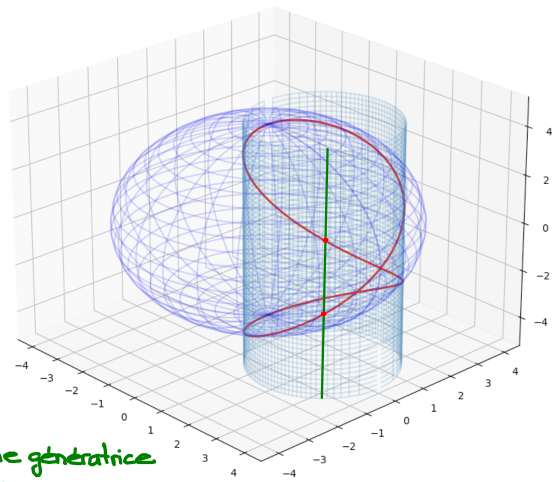
$\mathcal{S}'$ est une ellipse dont on cherche un pt M' et sa tangente t' comme pour le cône.

Le centre C' est l'intersection de $(C S_\infty)$ avec φ.

Deux diamètres $A'B'$ et $D'E'$ de $\mathcal{S}'$ sont conjugués si et seulement si les diamètres correspondants AB et DE du cercle de base $\mathcal{S}$ sont perpendiculaires.

9.8 Intersection entre une sphère et un cylindre

L'intersection d'une sphère de rayon R et d'un cylindre de révolution de diamètre R dont une des génératrices passe par le centre de la sphère est une courbe fermée appelée courbe de Viviani.



Intersections entre une génératrice du cylindre et la sphère

Cette courbe permet de découper des "fenêtres" sur la sphère de manière à rendre possible la quadrature de la surface restante.