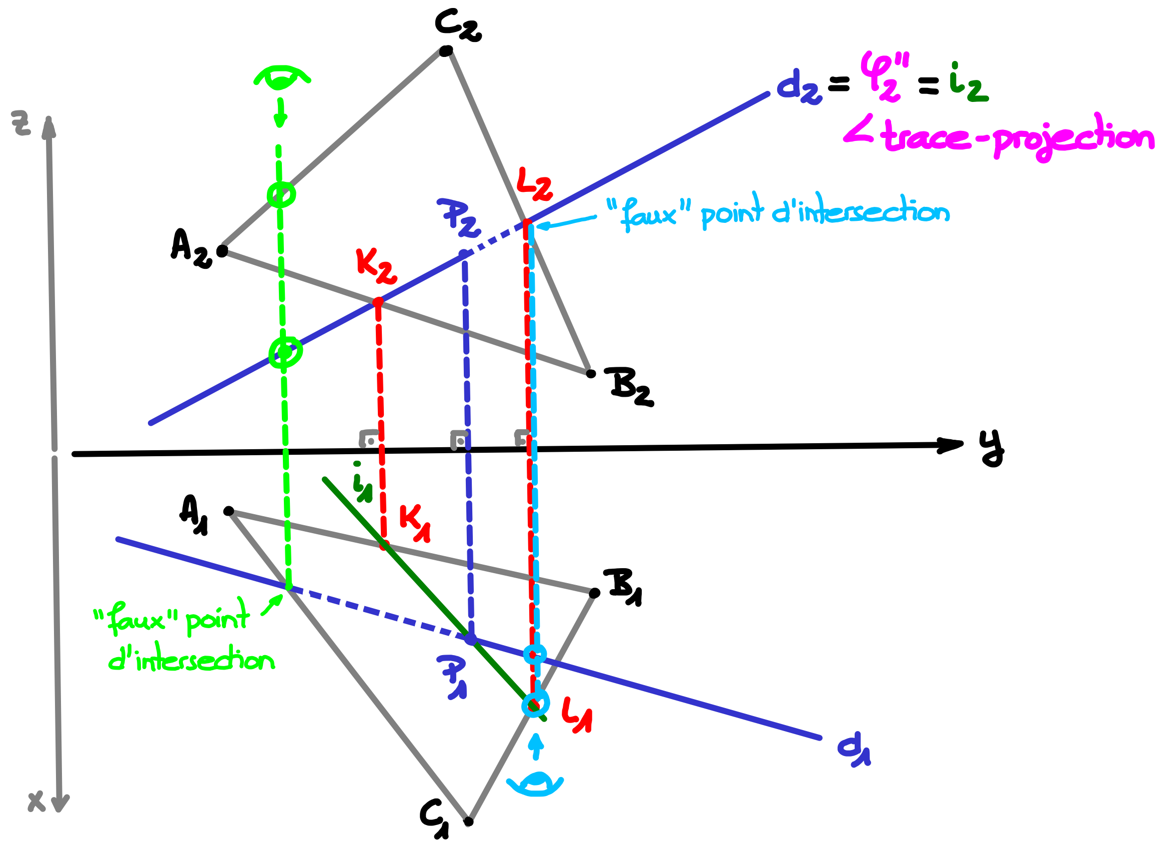
6.1.3 Exemple : intersection d'une droite et d'une plaque triangulaire opaque



On utilise le 2ème projetant φ de la droite d comme plan auxiliaire.
La droite d'intersection i du plan φ avec le plan $\alpha = (A,B,C)$ passe par les points K et L, $\{K\} = \varphi \cap (AB)$, $\{L\} = \varphi \cap (BC)$, directement accessibles sur l'épure en 2ème projection sur la trace-projection de φ. On en déduit $\{P\} = d \cap \alpha = d \cap i$.

Remarques :

1) Visibilité

- Pour déterminer la visibilité de l'ensemble "droite-plaque" en 1ère projection, on s'intéresse à un faux point d'intersection de 1ère projection.
  Par exemple, celui de d et de AC. Le point de AC a une plus grande cote que celui de d, donc AC est visible en 1ère projection, alors que d est partiellement caché.
- De même, en 2ème projection, on compare les abscisses d'un faux point d'intersection de 2ème projection.
  Par exemple, celui de d et de BC.

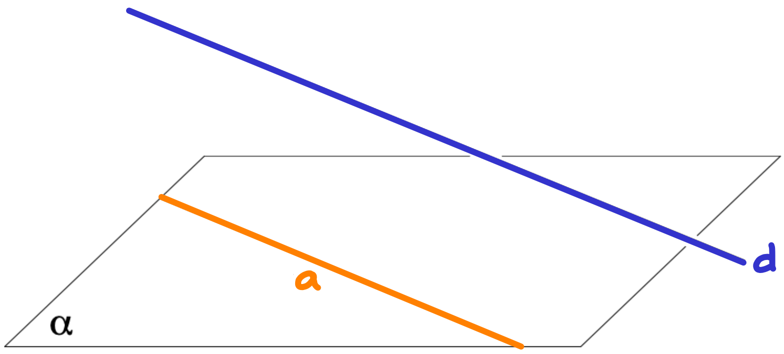
2) Faces vues en projection

L'orientation des sommets en 1ère, respectivement 2ème, projection permet de savoir quelle face de la plaque est vue en 1ère, respectivement 2ème, projection.

6.2 Droite parallèle à un plan

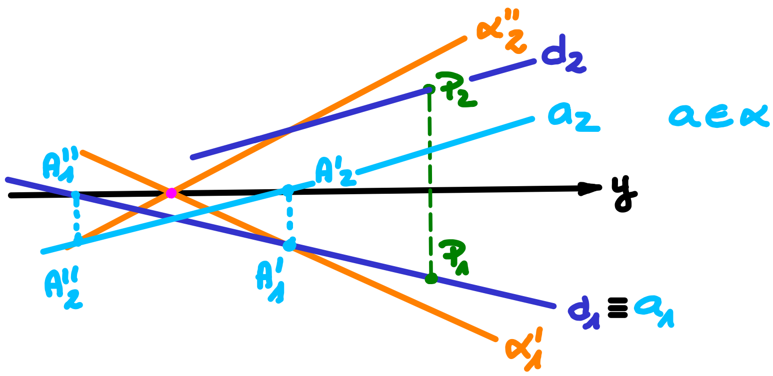
Définition:

Une droite d est <u>parallèle à un plan α</u> ($d \notin \alpha$) s'il existe une droite $a \in \alpha$ telle que a soit parallèle à d.

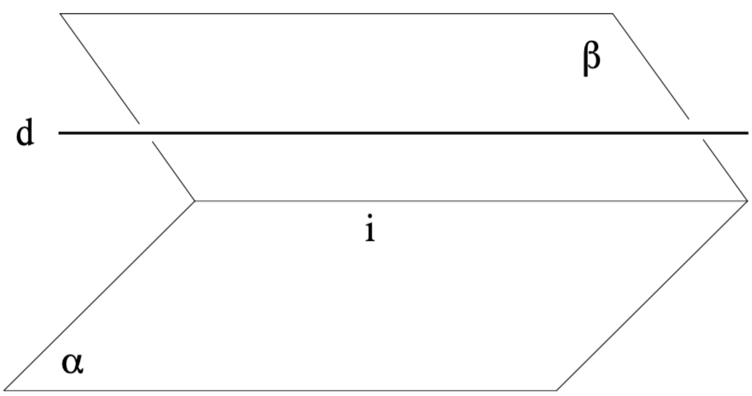


- $d \,//\, \alpha \Leftrightarrow$
  $d \cap \alpha = \varnothing$ ou
- $d \,//\, \alpha \Leftrightarrow$
  $\exists\, a \subset \alpha ,\ a \,//\, d$

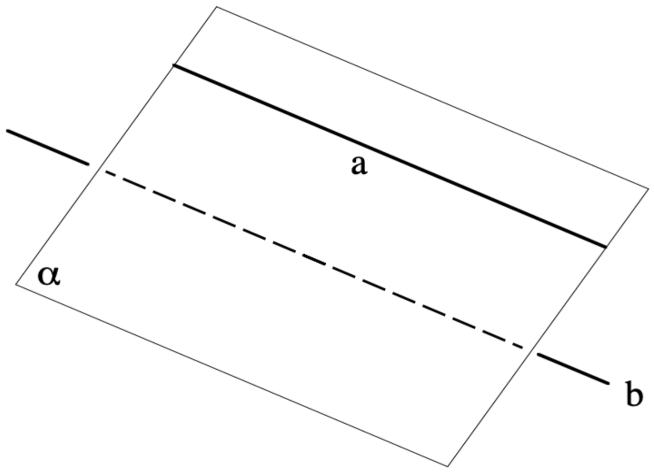
Exemple: données: α, P, d_1 ($P_1 \in d_1$)
Construire d_2 sachant que $d \parallel \alpha$ et $P \in d$.



Remarques:

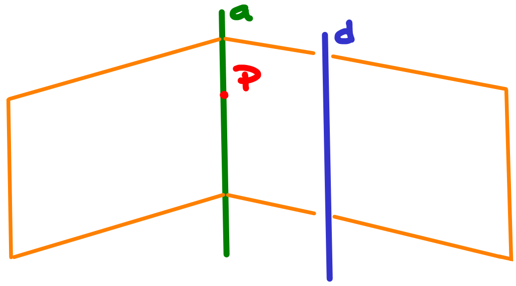


- toute droite d parallèle à 2 plans sécants α et β est parallèle à leur intersection i et réciproquement.

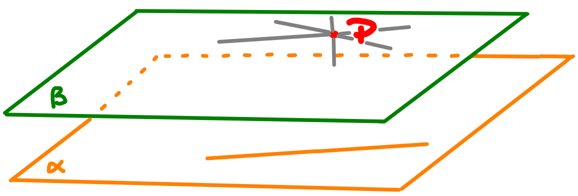


- étant données 2 droites parallèles a et b, tout plan α contenant l'une des 2 droites contient l'autre ou lui est parallèle.

- Soient P un point et d une droite. Il existe une infinité de plans passant par P et parallèles à d. Ce sont tous les plans qui contiennent la droite a passant par P et parallèle à d.



- Soient P un point et α un plan. Il existe une infinité de droites passant par P et parallèles à α. Elles forment un plan : le plan β parallèle à α passant par P.



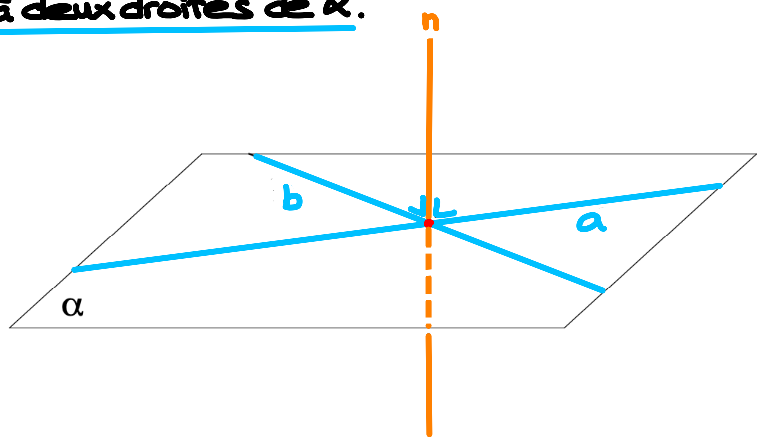
6.3 Droites et plans perpendiculaires

1) Rappels (de géométrie dans l'espace)

- deux droites sont orthogonales ssi leurs directions sont orthogonales.
- deux droites sont perpendiculaires ssi elles sont orthogonales et sécantes.

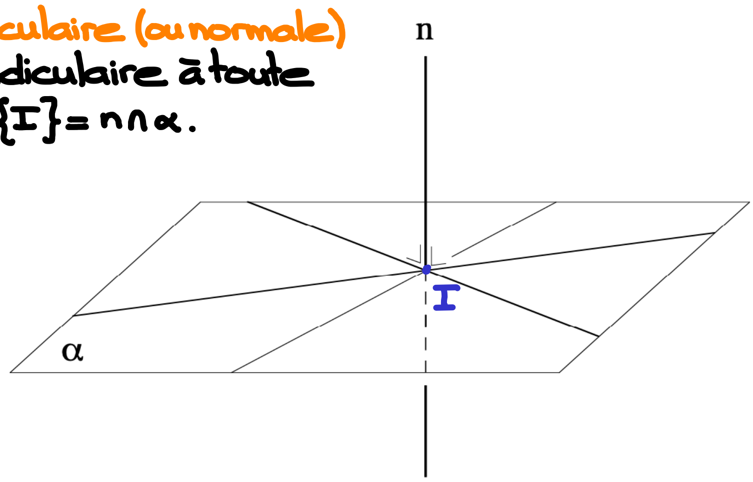
Définition

Une droite n est perpendiculaire à un plan α ($\equiv$ normale à un plan α) ssi n est perpendiculaire à deux droites de α.



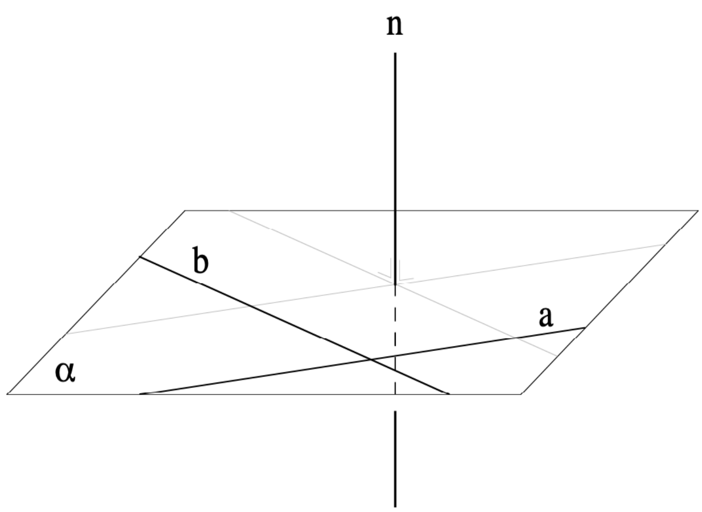
Corollaire 1

Si une droite n est perpendiculaire (ou normale) à un plan α, elle est perpendiculaire à toute droite de α qui passe par $\{I\} = n \cap \alpha$.



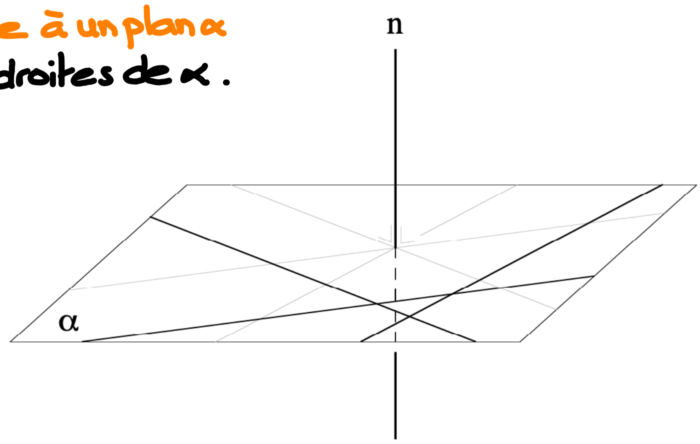
Corollaire 2

Une droite n orthogonale à deux droites sécantes est perpendiculaire au plan défini par ces deux droites, et réciproquement.



Corollaire 3

Une droite n perpendiculaire à un plan α est orthogonale à toutes les droites de α.



2) En Monge

Soit n une droite perpendiculaire à un plan α, la droite n est orthogonale à toutes les droites de α. Mais cette orthogonalité n'est en général pas conservée en projection.

Le théorème de conservation de l'angle droit nous dit que l'orthogonalité n'est conservée qu'avec les droites principales de α.

n'importe quelle horizontale de α

Plus précisément,
$$\begin{cases} n_1 \perp h_1 & (h : \text{horizontale de } \alpha) \\ n_2 \perp f_2 & (f : \text{frontale de } \alpha) \\ n_3 \perp p_3 & (p : \text{droite de profil de } \alpha) \end{cases}$$

Ou de façon plus particulière,

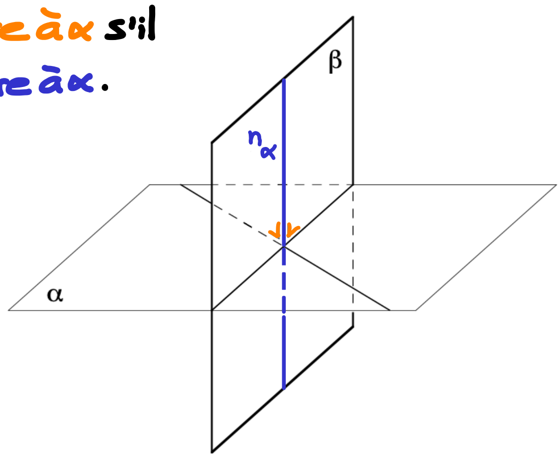
$n_1 \perp \alpha_1'$, $n_2 \perp \alpha_2''$, $n_3 \perp \alpha_3'''$.

⟶ Exemple 6.3.1

6.4 Plans perpendiculaires

Définition

Soit α un plan donné.
Un plan β est perpendiculaire à α s'il contient une perpendiculaire à α.



Remarques

1) Soient α donné et P un point de l'espace.
Il existe une infinité de plans passant par P et perpendiculaires à α. Ce sont tous les plans contenant la normale à α passant par P.

2) Soient α donné et d une droite de l'espace ($d \not\perp \alpha$).
Il existe un unique plan β contenant d et perpendiculaire à α. C'est le plan défini par d et une normale à α coupant d.

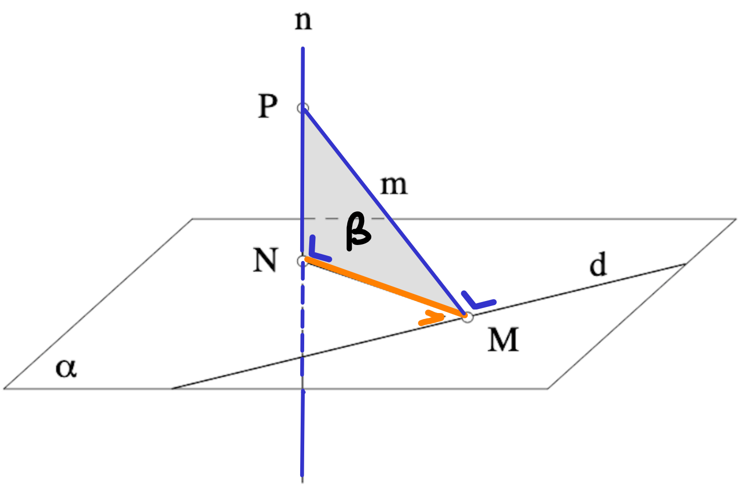
⟶ Exemple 6.4.1

Théorème des trois perpendiculaires

Soient α un plan, d une droite de α et P un point de l'espace ($P \notin \alpha$).

- Soient n la normale à α passant par P et $\{N\} = n \cap \alpha$.
- Soient m la perpendiculaire à d issue de P et $\{M\} = m \cap d$.

Alors la droite (MN) de α est perpendiculaire à d.



Démonstration

Soit β le plan défini par P, N et M.

Le plan β est perpendiculaire à d, car il contient deux droites orthogonales à d :
- la droite m par définition (par hypothèse) ;
- la droite n car si $n \perp \alpha$, alors n est orthogonale à toutes les droites de α.
(donc en particulier, elle est orthogonale à d)

Si β est perpendiculaire à d, alors d est orthogonale à toutes les droites de β.

Donc, en particulier, d est perpendiculaire à la droite (MN). ∎

Ce théorème justifie le théorème de conservation de l'angle droit en projection orthogonale.