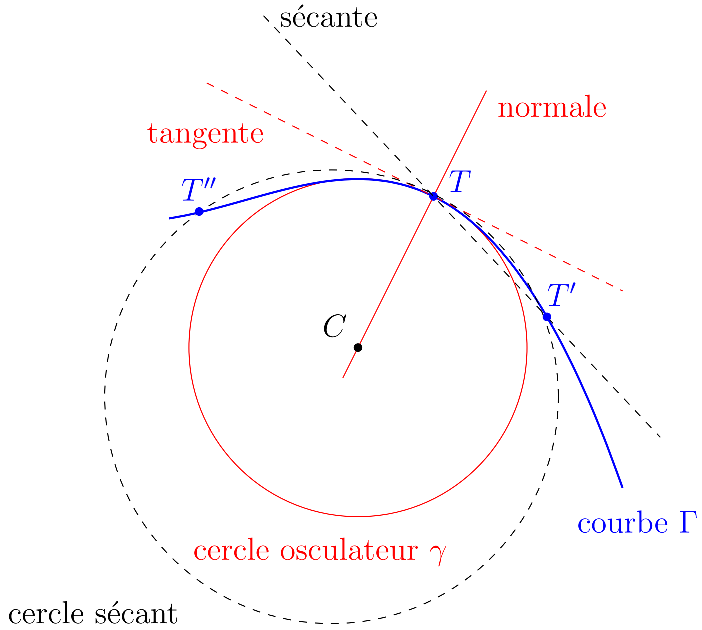
Rayon de courbure d'une courbe

Rappel : par deux points non confondus passe une unique droite et par trois points non alignés passe un unique cercle. Le centre de ce dernier se trouve à l'intersection des médiatrices des segments formés par les points.

Considérons une courbe Γ et un point $T(x_0, y_0)$ sur Γ, ainsi que deux autres poonts T' et T'' sur Γ.



Tout comme la tangente à Γ en T passe par « deux points de Γ infiniment proches » (cas limite de la sécante par T et T'), le cercle osculateur passe par « trois points de Γ infiniment proches » (cas limite de cercle sécant par T'', T et T').

Le rayon de courbure de Γ en un point T est le rayon du cercle osculateur γ, **cercle** « ressemblant au mieux » à la courbe Γ au voisinage de T.

Détermination de γ :

$$\Gamma: \ y = f(x) \qquad \gamma: \ (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2 .$$

1. $T(x_0, y_0)$ est un point de contact entre la courbe et le cercle : $T \in \Gamma$ et $T \in \gamma$
2. les tangentes à Γ et à γ en T coïncident : leurs pentes (dérivés premières) sont identiques
3. la variation de la pente de la tangente (dérivée seconde) est identique.

Déterminons le centre $C(x_C, y_C)$ et le rayon R du cercle γ.

1. $T(x_0, y_0) \in \gamma$ avec $\boxed{y_0 = f(x_0)}$:

$$(x_0 - x_C)^2 + (y_0 - y_C)^2 = R^2$$

2. Pente $\boxed{m = f'(x_0)}$ de la tangente commune (dérivée implicite) :

$$2(x - x_C) + 2(y - y_C)y' = 0 \Rightarrow (x_0 - x_C) + (y_0 - y_C)m = 0 .$$

3. Dérivée seconde $\boxed{s = f''(x_0)}$ identique :

$$1 + y'^2 + (y - y_C)y'' = 0 \Rightarrow 1 + m^2 + (y_0 - y_C)s = 0\,.$$

Ainsi

$$y_0 - y_C = -\frac{1+m^2}{s}\,,$$

$$x_0 - x_C = -(y_0 - y_C)m = \frac{1+m^2}{s}m\,,$$

$$R^2 = (x_0 - x_C)^2 + (y_0 - y_C)^2 = \left(\frac{1+m^2}{s}m\right)^2 + \left(-\frac{1+m^2}{s}\right)^2 = \frac{(1+m^2)^3}{s^2}$$

ou encore

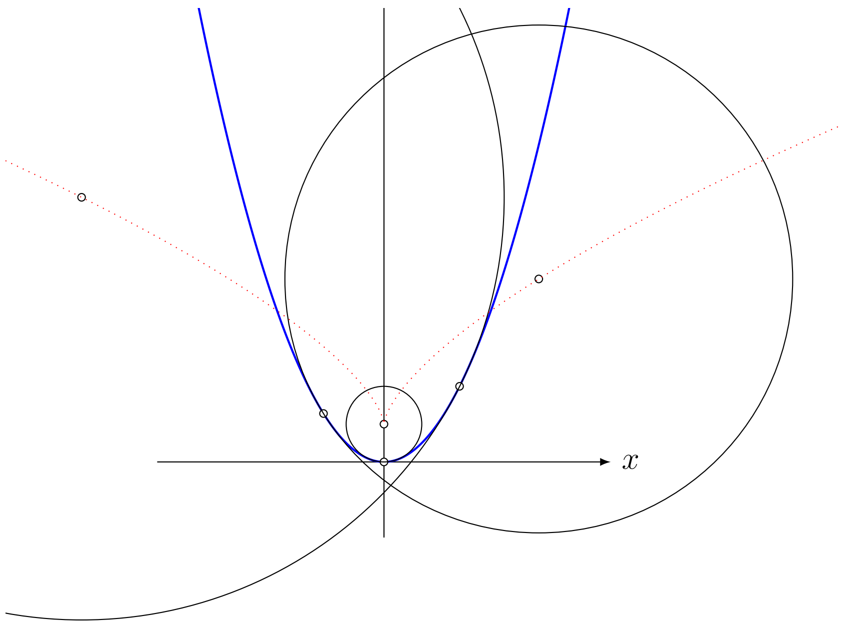
$$\boxed{x_C = x_0 - \frac{1+m^2}{s}m \qquad y_C = y_0 + \frac{1+m^2}{s} \qquad R = \frac{(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}{|s|}\,.}$$

Exemple : parabole

$$f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2x \qquad f''(x) = 2\,.$$

En $T(x_0, y_0)$: $y_0 = x_0^2$, $m = 2x_0$ $s = 2$ et

$$x_C = x_0 - \frac{1+4x_0^2}{2}\,2x_0 = -4x_0^3 \qquad y_C = \frac{1}{2} + 3x_0^2 \qquad R = \frac{\left(1+4x_0^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2}\,.$$



Pour une courbe paramétrée :

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}\,.$$

En $T(x_0, y_0)$, donné par la valeur t_0 du paramètre ($x_0 = x(t_0)$ et $y_0 = y(t_0)$),

$$\begin{aligned} x' &= \dot{x}t' = 1 & \qquad x'' &= \ddot{x}(t')^2 + \dot{x}t'' = 0 \\ y' &= \dot{y}t' & \qquad y'' &= \ddot{y}(t')^2 + \dot{y}t''\,. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$m = y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \qquad s = y'' = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}\,.$$

et alors

$$\boxed{x_C = x_0 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}\dot{y} \qquad y_C = y_0 + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}\dot{x} \qquad R = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{|\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}|}}$$

Par exemple, pour une ellipse $(a, b > 0)$ on a

$$\begin{aligned} x(t) &= a\cos t & \qquad y(t) &= b\sin t \\ \dot{x}(t) &= -a\sin t & \qquad \dot{y}(t) &= b\cos t \\ \ddot{x}(t) &= -a\cos t & \qquad \ddot{y}(t) &= -b\sin t\,. \end{aligned}$$

Ainsi

$$x_C = \frac{\cos^3 t}{a}(a^2 - b^2) \qquad y_C = -\frac{\sin^3 t}{b}(a^2 - b^2) \qquad R = \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab}$$