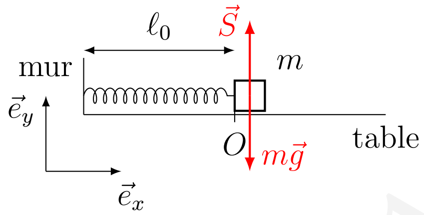
Oscillateur harmonique $\ddot{x} = -\omega^2 x$

GB

14 décembre 2018

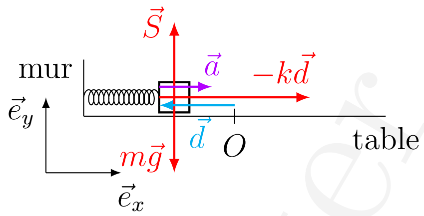
Introduction

Ex. : un objet de masse m fixé à un ressort et glissant sur une table



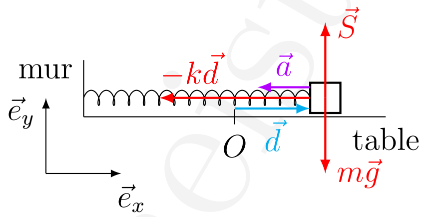
Sans déformation : la force est nulle,

$$\vec{f} = -k\vec{d} = \vec{0}\,.$$



En compression : la force est répulsive,

$$\vec{f} = -k\vec{d}\,.$$



En élongation : la force est attractive,

$$\vec{f} = -k\vec{d}\,.$$

Newton :

$$m\vec{g} + \vec{S} - k\vec{d} = m\vec{a}$$

Avec le choix de l'origine à la position de repos du ressort, $\vec{d} = x\vec{e}_x$ et, selon $\vec{e}_x$:

$$-kx(t) = ma(t) = m\ddot{x}(t)\,.$$

L'accélération étant toujours opposée au vecteur position, la masse oscille autour de l'origine.
Pour systématiser la discussion, comme $k, m > 0$, nous pouvons poser

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} > 0\,.$$

L'équation d'évolution s'écrit donc

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x\,.$$

Oscillateur harmonique

Une équation du type

$$\boxed{\ddot{x} = -\omega_0^2 x}$$

donne l'évolution d'un oscillateur harmonique. Résoudre cette équation revient à chercher une fonction du temps $x(t)$ vérifiant cette équation faisant intervenir $x(t)$ et ses dérivées (équation différentielle).

Le mouvement de l'OH est entièrement déterminé si l'on connaît de plus sa position et sa vitesse à un instant t_0 (les conditions initiales) :

$$\boxed{x(t_0) = x_0 \qquad v(t_0) = \dot{x}(t_0) = v_0\,.}$$

La solution est

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos\left(\omega_0(t - t_0)\right) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin\left(\omega_0(t - t_0)\right)\,.}$$

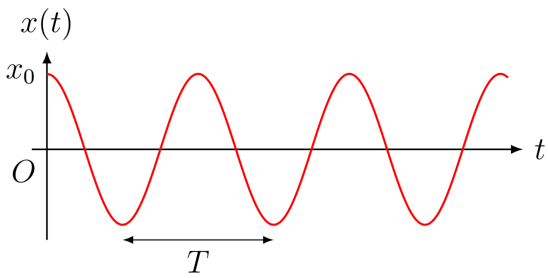
En effet, avec les dérivées $\cos' x = -\sin x$ et $\sin' x = \cos x$, nous vérifions

- $x(t_0) = x_0$
- $\dot{x} = -\omega_0 x_0 \sin(\omega_0(t - t_0)) + \omega_0 \frac{v_0}{\omega_0} \cos(\omega_0(t - t_0)) \Longrightarrow \dot{x}(t_0) = v_0$
- $\ddot{x} = -\omega_0^2 x_0 \cos(\omega_0(t - t_0)) - \omega_0^2 \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0(t - t_0)) = -\omega_0^2 x\,.$

On peux montrer que cette solution est unique.

Ex. : lâcher de la masse fixée au ressort à $t_0 = 0$ à la position x_0 et à vitesse nulle.

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)\,.$$



Caractéristiques

Les arguments du cos et du sin étant les mêmes, nous pouvons écrire la solution également comme

$$\boxed{x(t) = A \cos\left(\omega_0(t - t_0) + \varphi\right)\,,}$$

A et φ étant données par les conditions initiales $x(t_0) = x_0$ et $\dot{x}(t_0) = v_0$.

Elle décrit une oscillation (non amortie)

- d'amplitude A : valeur extrême (unité : celle de x)
- de période T : temps d'un cycle (unité : s)

$$x(t + T) = x(t),\ \forall\, t \Longrightarrow \omega_0 T = n 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

$$\Longrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \text{(la plus petite positive.)}$$

- de fréquence ν : nombre de cycles par unité de temps (unité : $\mathrm{s}^{-1} = \mathrm{Hz}$)

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

- de pulsation ω_0 : angle (1 tour $\simeq 2\pi$) parcouru par unité de temps (unité : s^{-1}), par analogie avec le mouvement circulaire uniforme
- de phase φ correspondant à un décalage dans le temps.

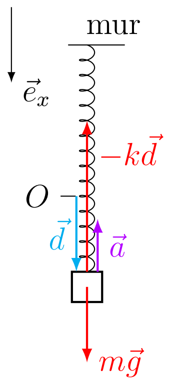
Exemples

Ex. : masse fixée au ressort, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

Plus l'inertie est grande, plus la période est importante. Plus le ressort est rigide, plus l'oscillation est rapide.

Ex. : masse suspendue à un ressort (vertical).



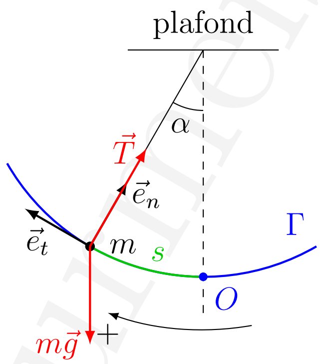
La masse oscille autour de la position d'équilibre définie par

$$m\vec{g} - k\vec{d}_{\text{éq}} = \vec{0}\,.$$

La pulsation de l'oscillation est encore donnée par $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et la période vaut

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

Ex. : pendule simple.



Objet : m

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}\,.$$

Selon $\vec{e}_t$:

$$-mg\sin\alpha = ma_t = m\ddot{s} = mL\ddot{\alpha}\,.$$

Posons $\omega_0^2 = \frac{g}{L}$:

$$\ddot{\alpha} = -\omega_0^2 \sin\alpha\,.$$

Il n'y a pas de solution analytique à cette équation. Cependant, si nous considérons le cas où α reste petit, nous faisons l'approximation au premier ordre $\sin\alpha \simeq \alpha$ et alors

$$\ddot{\alpha} = -\omega_0^2\alpha\,.$$

C'est l'équation d'un OH.

Energie mécanique

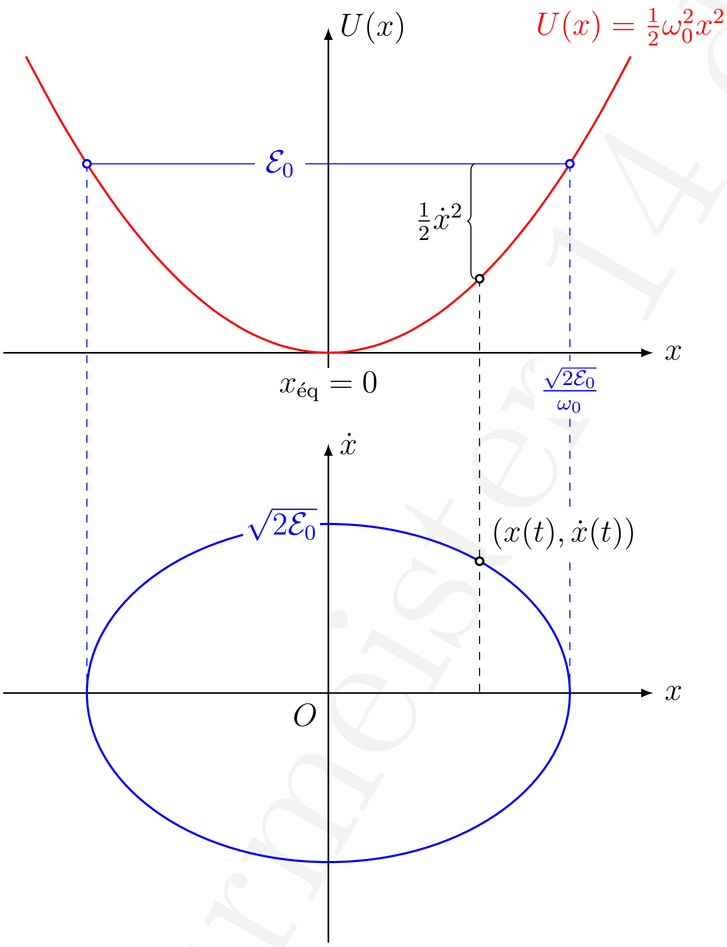
Pour l'objet de masse m fixée à un ressort, la force de rappel est conservative et l'énergie mécanique donc conservée :

$$E_{\rm cin} + E_{\rm pot} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kd^2 = E_0 \quad \forall\, t\,.$$

En normalisant avec la division par m, nous avons la conservation de l'énergie (par unité de masse) d'un OH quelconque,

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 x^2 = \mathcal{E}_0 \quad \forall\, t\,.}$$

Pour rappel, le potentiel $U(x)$ est l'opposé d'une primitive de la force (normalisée) : $F(x) = -U'(x)$.



Pour chaque valeur $\mathcal{E}_0$ de l'énergie, l'oscillation se fait autour du point d'équilibre $x_{\rm éq} = 0$ situé au minimum du potentiel. L'énergie cinétique se lit comme la différence entre $\mathcal{E}_0$ et le potentiel $U(x)$:

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = \mathcal{E}_0 - U(x)\,.$$

Dans le plan $(x, \dot{x})$, appelé espace de phase, l'équation

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 x^2 = \mathcal{E}_0$$

décrit une ellipse, appelée orbite. L'orbite est un rendu visuel de la relation entre position et vitesse (selon $\vec{e}_x$).

Ex. : pendule simple. Dans l'approximation des petits angles $\sin\alpha \approx \alpha$, la conservation de l'énergie mécanique (par unité de masse) s'écrit

$$\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2\alpha^2 = \mathcal{E}_0 \quad \forall\, t\,.$$

Approximation harmonique

L'approximation harmonique consiste en la linéarisation de la force autour d'un point d'équilibre stable. Cela revient à considérer l'approximation quadratique du potentiel $U(x)$ autour d'un minimum local $x_{\text{éq}}$. L'approximation harmonique donne le comportement oscillant de l'objet près de cette stabilité.

Avec $U'(x_{\text{éq}}) = 0$ (tangente horizontale), l'approximation quadratique s'écrit

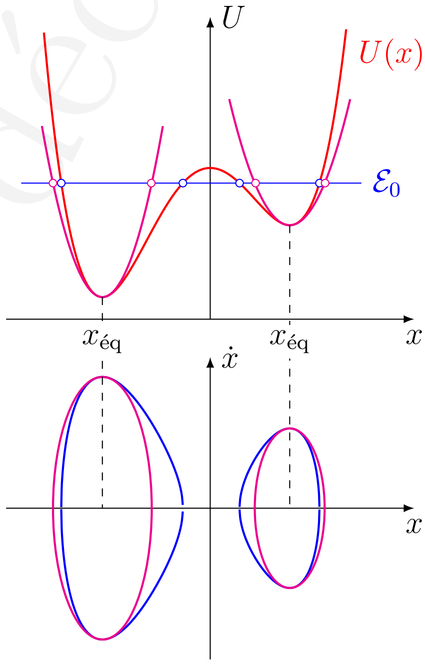
$$U(x) \simeq U(x_{\text{éq}}) + \frac{1}{2} U''(x_{\text{éq}})(x - x_{\text{éq}})^2 \,.$$

La pulsation de l'oscillateur harmonique est donc donnée par

$$\omega_0^2 = U''(x_{\text{éq}}) \,.$$

Au voisinage de $x_{\text{éq}}$, le graphe de $U(x)$ a un comportement parabolique.

Dans l'espace de phase, les orbites sont approchées par des ellipses.

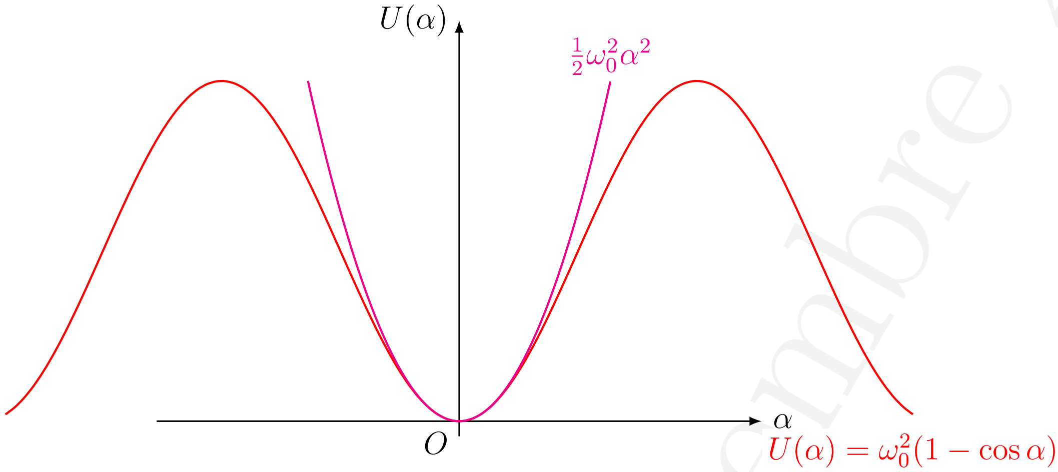


Ex. : pendule simple. La conservation de l'énergie normalisée s'écrit

$$\ddot{\alpha} = -\omega_0^2 \sin\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 - \omega_0^2 \cos\alpha = \text{cte} \quad \forall\, t \,.$$

En choisissant la constante telle que le potentiel $U(\alpha)$ est nul pour $\alpha = 0$, on a

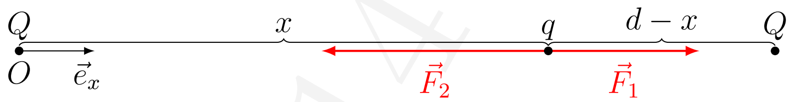
$$\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 + \omega_0^2 (1 - \cos\alpha) = \mathcal{E}_0 \,.$$



L'approximation harmonique donne alors

$$\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2\alpha^2 = \mathcal{E}_0\,.$$

Ex. : charge électrique positive q placée entre deux charges positives identiques distantes de d.



La charge q est repoussée par les deux charges et plus q est proche d'une charge, plus celle-ci la repousse.
La force électrique étant conservative, l'énergie mécanique de la charge q est conservée :

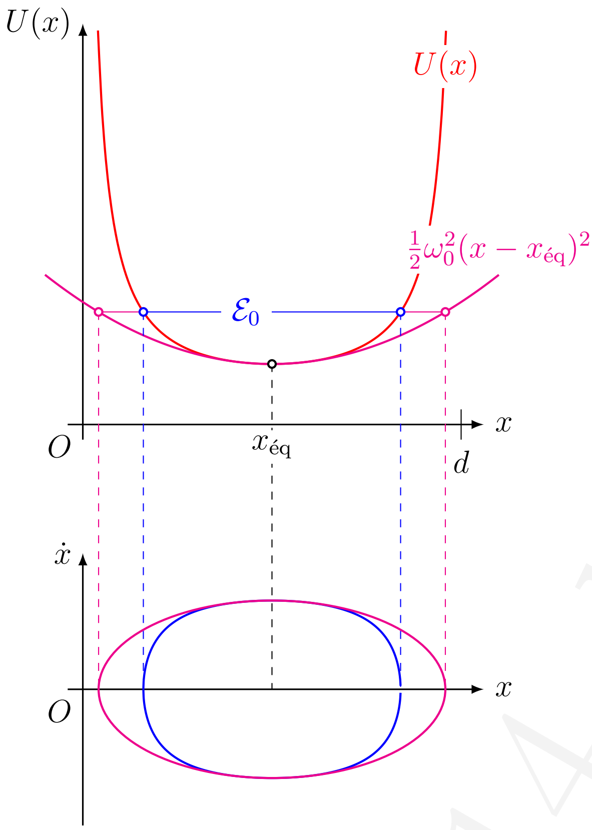
$$E_{\text{cin}} + E_{\text{pot,1}} + E_{\text{pot,2}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{x} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{d-x} = E_0 \qquad \forall\, t\,.$$

En divisant par m, nous avons

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x) = \mathcal{E}_0$$

avec

$$U(x) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 m}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)\,.$$



La charge oscille autour de la position d'équilibre donné par le minimum du potentiel $U(x)$:

$$x_{\text{éq}} = \frac{d}{2}\,.$$

Dans l'approximation quadratique du potentiel au voisinage de son minimum, nous avons $U'(x_{\text{éq}}) = 0$ et

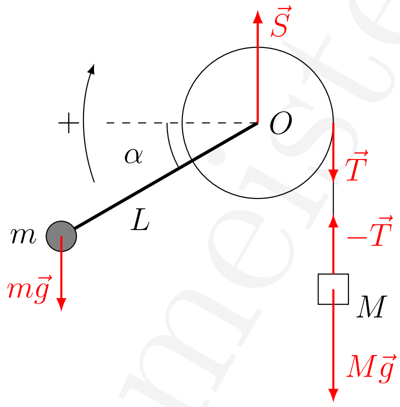
$$U(x) \approx U_{\min} + \frac{1}{2}U''(x_{\text{éq}})(x - x_{\text{éq}})^2\,.$$

Nous retrouvons ainsi un oscillateur harmonique, avec

$$\omega_0^2 = U''(x_{\text{éq}}) = \frac{16Qq}{\pi\varepsilon_0 m d^3}\,.$$

Plus l'énergie de la charge q est petite, plus l'approximation est bonne.

Ex. : oscillation d'un disque vertical de rayon R, de centre O fixe et soumis à des moments de force.



L'objet formé du disque et de la masse m (la tige est de masse négligeable) a un moment d'inertie I par rapport à O. Selon $\vec{e}_z \otimes$:

$$RT - L\cos\alpha mg = I\dot{\omega}\,.$$

Pour la masse M, selon $\vec{e}_y \downarrow$:

$$Mg - T = Ma\,.$$

Avec la liaison $a = R\dot{\omega}$, l'évolution de $\alpha(t)$ est donnée par

$$RMg - Lmg\cos\alpha = (I + MR^2)\ddot{\alpha}$$

ou encore par

$$\ddot{\alpha} = \frac{g}{I + MR^2}(RM - Lm\cos\alpha)\,.$$

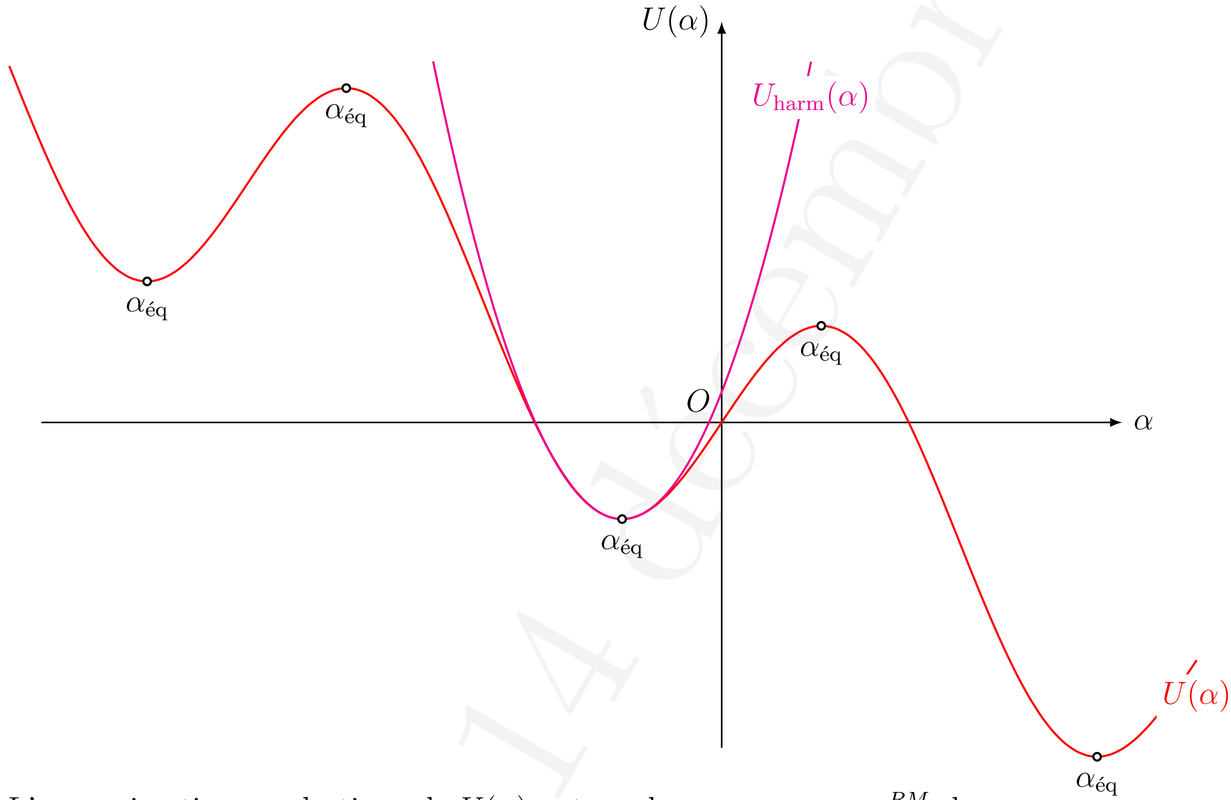
Les positions d'équilibres sont données par $\ddot{\alpha} = 0$:

$$\cos\alpha_{\text{éq}} = \frac{RM}{Lm}\,.$$

Un équilibre est possible si $RM < LM$.

La conservation d'énergie s'écrit

$$\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 + U(\alpha) = \text{cte} \qquad U(\alpha) = \frac{g}{I + MR^2}(-RM\alpha + Lm\sin\alpha)\,.$$



L'approximation quadratique de $U(\alpha)$ autour de $\alpha_{\text{éq}} = -\arccos\frac{RM}{Lm}$ donne

$$\begin{aligned}
U(\alpha) &\approx U(\alpha_{\text{éq}}) + \frac{1}{2}U''(\alpha_{\text{éq}})(\alpha - \alpha_{\text{éq}})^2 \\
&= U(\alpha_{\text{éq}}) + \frac{1}{2}\frac{g}{I + MR^2}(0 - Lm\sin\alpha_{\text{éq}})(\alpha - \alpha_{\text{éq}})^2 \\
&= U(\alpha_{\text{éq}}) + \frac{1}{2}\frac{Lmg}{I + MR^2}|\sin\alpha_{\text{éq}}|(\alpha - \alpha_{\text{éq}})^2 \\
&= U(\alpha_{\text{éq}}) + \frac{1}{2}\omega_0^2(\alpha - \alpha_{\text{éq}})^2
\end{aligned}$$

où la pulsation est donnée par

$$\omega_0^2 = \frac{Lmg}{I + MR^2}|\sin\alpha_{\text{éq}}| = \frac{Lmg}{I + MR^2}\sqrt{1 - \cos^2\alpha_{\text{éq}}} = \frac{g}{I + MR^2}\sqrt{(Lm)^2 - (RM)^2}\,.$$

Rem. : on obtient le même résultat en développant la force au premier ordre autour de $\alpha_{\text{éq}}$:

$$\begin{aligned}
\ddot{\alpha} &= \frac{g}{I + MR^2}\Big(RM - Lm\cos\big(\alpha_{\text{éq}} + (\alpha - \alpha_{\text{éq}})\big)\Big) \\
&\approx \frac{g}{I + MR^2}\Big(RM - Lm\big(\cos\alpha_{\text{éq}} - \sin\alpha_{\text{éq}}(\alpha - \alpha_{\text{éq}})\big)\Big) \\
&= -\frac{Lmg}{I + MR^2}|\sin\alpha_{\text{éq}}|(\alpha - \alpha_{\text{éq}})
\end{aligned}$$

d'où

$$\omega_0^2 = \frac{Lmg}{I + MR^2}|\sin\alpha_{\text{éq}}|\,.$$