

Loi de Newton et théorème de l'énergie cinétique

Objet considéré : le CM d'un corps de masse m .

Evolution

$$2^{\text{e}} \text{ loi de Newton : } \boxed{\vec{F}^{\text{ext}} = m\vec{a}_{\text{CM}} \quad \forall t}$$

Loi d'évolution + condition initiale à t_0 ($\vec{r}_{\text{CM}}(t_0)$ et $\vec{v}_{\text{CM}}(t_0)$) \Rightarrow mouvement déterminé.

- Repère fixe (\vec{e}_x, \vec{e}_y) : $\begin{cases} F_x^{\text{ext}} = ma_{\text{CM},x} \\ F_y^{\text{ext}} = ma_{\text{CM},y} \end{cases}$

Intérêt : en cas de séparabilité du mouvement dans ces deux directions, programmation.

- Repère lié (\vec{e}_n, \vec{e}_t) : $\begin{cases} F_n^{\text{ext}} = ma_{\text{CM},n} \\ F_t^{\text{ext}} = ma_{\text{CM},t} \end{cases} \quad \text{ou} \quad E_{\text{cin,CM}}(t_2) - E_{\text{cin,CM}}(t_1) = W_{1 \rightarrow 2}^{\text{ext}}$

Intérêt : séparation des mouvements normal à la trajectoire et le long de la trajectoire.

- ◇ Selon \vec{e}_n : changement instantané de direction de la vitesse ssi $a_n \neq 0$ (effectuer un virage), mise en évidence des forces normales (soutien, force centripète dans un mouvement circulaire, ...)
- ◇ Selon \vec{e}_t : changement instantané de norme de la vitesse ssi $a_t \neq 0$ (aller plus vite ou moins vite), mise en évidence des forces tangentielles (frottement, propulsion, freinage, ...)

On peut aussi considérer le bilan des changements entre deux instants t_1 et t_2 donné par le théorème de l'énergie cinétique pour le CM, obtenu de $\vec{F}^{\text{ext}} = m\vec{a}_{\text{CM}}$ par un produit scalaire avec \vec{v}_{CM} .

Théorème de l'énergie cinétique pour le CM

Changement d'énergie cinétique du CM pendant un intervalle de temps infinitésimal dt :

$$dE_{\text{cin,CM}} = dW^{\text{ext}} = \vec{F}^{\text{ext}} \cdot d\vec{r}_{\text{CM}},$$

dW^{ext} étant le travail infinitésimal de \vec{F}^{ext} sur le déplacement infinitésimal $d\vec{r}_{\text{CM}}$.

Changement d'énergie cinétique du CM pendant un intervalle $[t_1, t_2]$:

$$E_{\text{cin,CM}}(t_2) - E_{\text{cin,CM}}(t_1) = W_{1 \rightarrow 2}^{\text{ext}} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}^{\text{ext}} \cdot d\vec{r}_{\text{CM}},$$

le long de Γ

où $\vec{r}_1 = \vec{r}_{\text{CM}}(t_1)$ et $\vec{r}_2 = \vec{r}_{\text{CM}}(t_2)$. C'est le théorème de l'énergie cinétique pour le CM : la variation de l'énergie cinétique est donnée par le travail des forces.

Forces conservatives

Si le travail d'une force ne dépend pas du chemin Γ mais que de ses extrémités \vec{r}_1 et \vec{r}_2 , la force est dite conservative. On peut alors écrire son travail comme la différence d'une énergie potentielle associée à cette force

$$W_{1 \rightarrow 2}(\vec{F}_{\text{cons}}^{\text{ext}}) = \int_{\substack{\vec{r}_1 \\ \text{le long de } \Gamma}}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{\text{cons}}^{\text{ext}} \cdot d\vec{r}_{\text{CM}} = E_{\text{pot,CM}}(\vec{r}_1) - E_{\text{pot,CM}}(\vec{r}_2).$$

L'énergie mécanique du CM est la somme de son énergie cinétique et de toutes les énergies potentielles :

$$E_{\text{méc,CM}} = E_{\text{cin,CM}} + E_{\text{pot,CM}}.$$

Le théorème de l'énergie cinétique donne alors le changement de l'énergie mécanique du CM pendant un intervalle $[t_1, t_2]$:

$$E_{\text{méc,CM}}(t_2) - E_{\text{méc,CM}}(t_1) = W_{1 \rightarrow 2}(\vec{F}_{\text{non cons}}^{\text{ext}}).$$

Enfin, si toutes les forces extérieures sont conservatives (ou ne travaillent pas), l'énergie mécanique du CM est conservée :

$$E_{\text{méc,CM}}(t_1) = E_{\text{méc,CM}}(t_2).$$

Remarque

Ce passage d'une description vectorielle instantanée (Newton) à un bilan exprimé par un scalaire, l'énergie, fournit une approche qui est très efficace, mais qui, selon les cas, peut aussi s'avérer insuffisante.