

Exercice à rendre

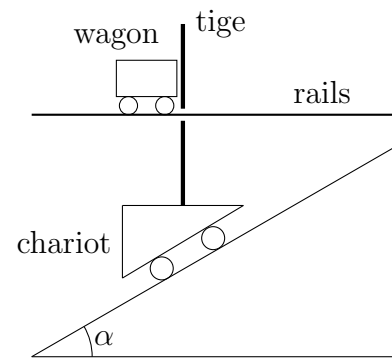
11 mars 2024

Enoncé

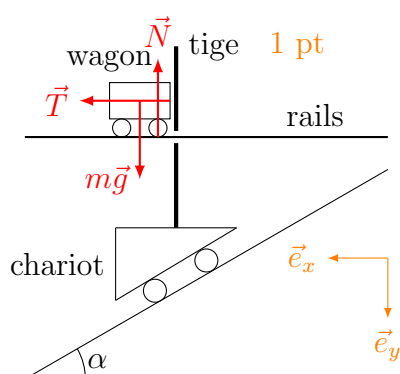
Un chariot de masse $M = 3m$ peut rouler le long d'une droite inclinée d'un angle $\alpha = 30^\circ$. Une tige de masse négligeable, verticale et fixée sur le chariot, pousse un wagon de masse m pouvant avancer sur des rails horizontaux fixes.

Tous les frottements sont négligeables.

Déterminer entièrement l'accélération du wagon.



Corrigé



Objet : wagon m

Forces : poids, soutien des rails, contact avec la tige

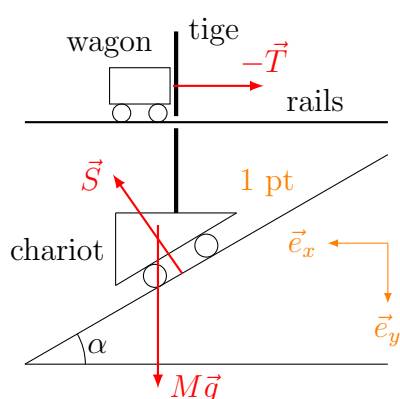
Newton :

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} = m\vec{a}_m \quad 1 \text{ pt}$$

Selon \vec{e}_x :

$$T = ma_m \quad 1 \text{ pt}$$

Remarque : pas de mouvement selon \vec{e}_y .



Objet : chariot M et tige

Forces : poids, soutien du plan, contact avec le wagon

Newton :

$$M\vec{g} + \vec{S} - \vec{T} = M\vec{a}_M \quad 1 \text{ pt}$$

Selon \vec{e}_x :

$$S \sin \alpha - T = Ma_{M,x} \quad 1 \text{ pt}$$

Selon \vec{e}_y :

$$Mg - S \cos \alpha = Ma_{M,y} \quad 1 \text{ pt}$$

Liaisons : wagon et chariot ont même mouvement horizontal

$$a_{M,x} = a_m = a \quad 1 \text{ pt}$$

et l'accélération du chariot fait un angle α avec l'horizontale

$$\frac{a_{M,y}}{a_{M,x}} = \tan \alpha \Rightarrow a_{M,y} = a \tan \alpha. \quad 1 \text{ pt}$$

Système à résoudre :

$$\begin{aligned} T &= ma \\ S \sin \alpha - T &= Ma \\ Mg - S \cos \alpha &= Ma \tan \alpha. \end{aligned}$$

Avec l'angle remarquable $\alpha = 30^\circ$ et $M = 3m$:

$$\begin{aligned} T &= ma \\ S \frac{1}{2} - T &= 3ma \\ 3mg - S \frac{\sqrt{3}}{2} &= 3ma \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{array}{rcl} S_{\frac{1}{2}} & = & 4ma \\ 3mg - S_{\frac{\sqrt{3}}{2}} & = & \sqrt{3}ma \end{array} \left| \begin{array}{l} \cdot \sqrt{3} \\ \cdot 1 \end{array} \right.$$

d'où

$$\begin{aligned} 3mg &= (4m\sqrt{3} + m\sqrt{3})a \\ \Rightarrow 3g &= 5\sqrt{3}a \end{aligned}$$

et finalement

$$a_m = a = \frac{\sqrt{3}}{5} g . \quad \text{1 pt}$$

Le wagon accélère vers la gauche.