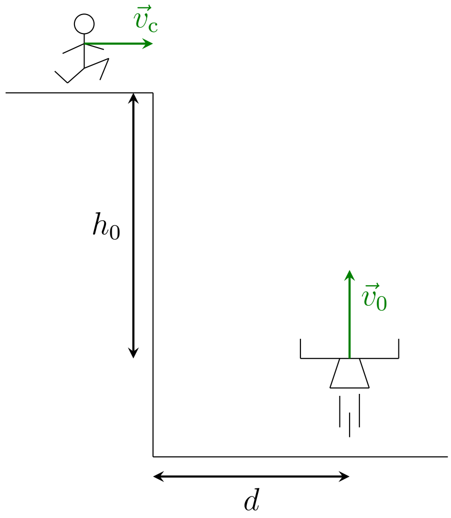
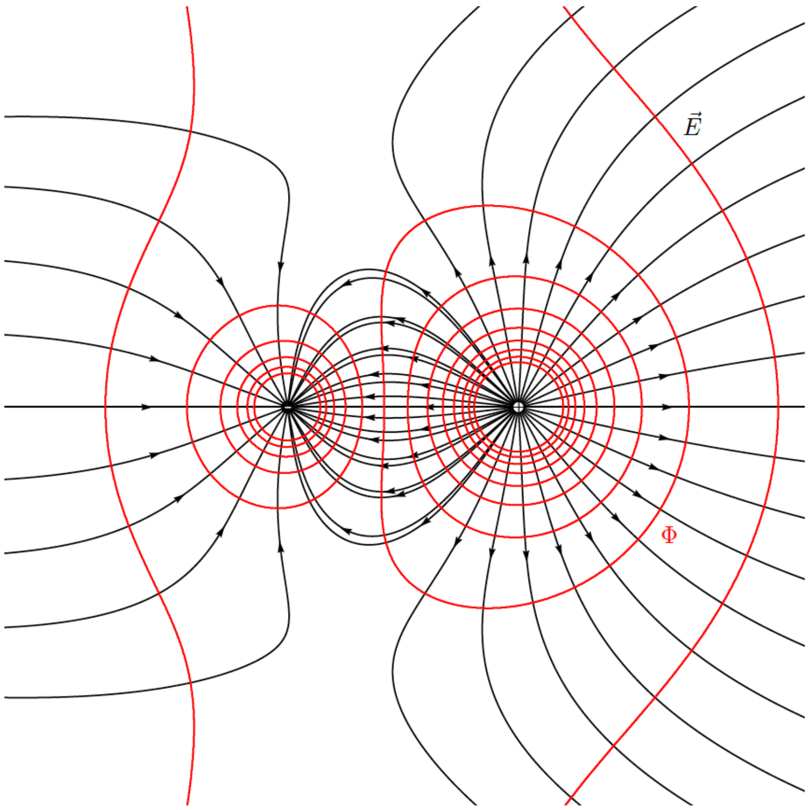
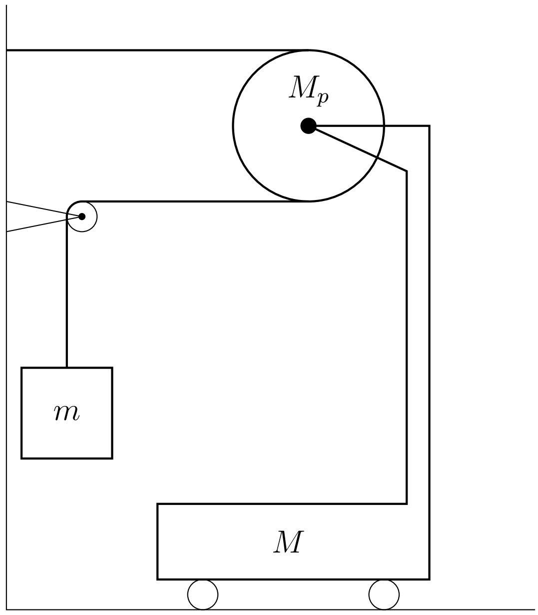
MAN - Cours de Physique

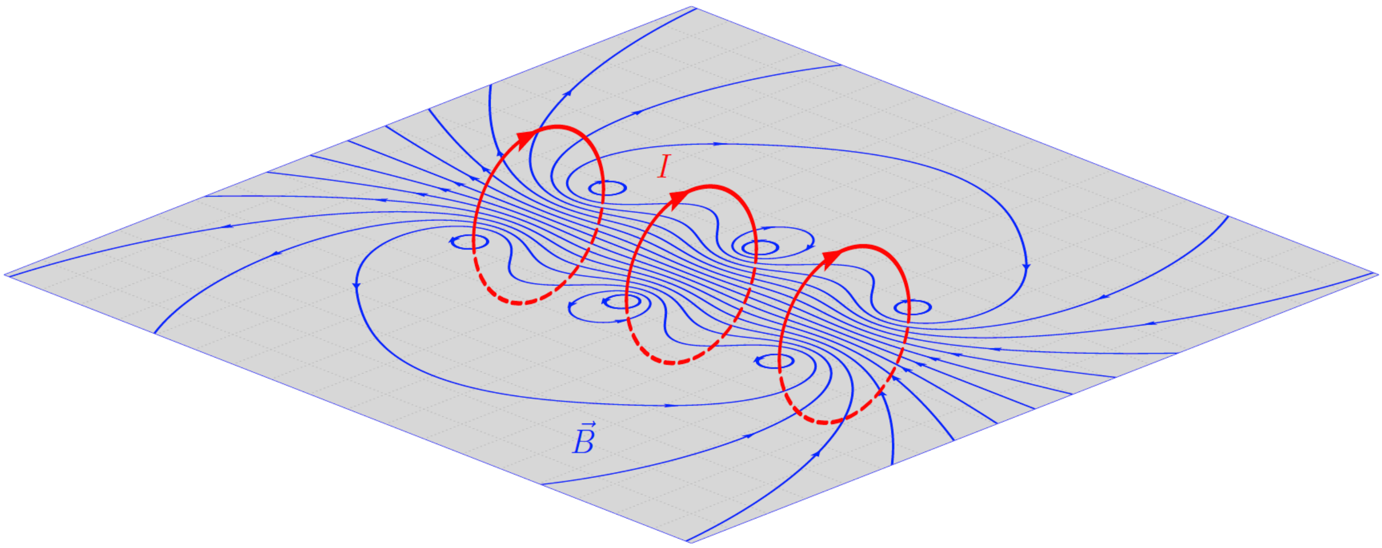
Semestre de printemps

2017









28 février 2017/GB,SB,RS

Table des matières

1 Introduction

1.1 But de la physique

Comprendre et décrire les phénomènes naturels par des lois aussi générales que possible.

1.2 Loi physique et rôle des mathématiques

Grandeur physique (ou observable) : adéquation entre le monde réel et le monde symbolique.

Mesure : comparaison avec une référence (système international d'**unités**).

Observation : ensemble de mesures de grandeurs physiques.

Loi : règle en accord avec l'observation et permettant la prédiction d'autres observations. **Relation mathématique** entre des grandeurs physiques.

2 Mouvement dans le plan

2.1 Matière et espace

Objet : un morceau de matière.

Masse : quantité de matière de l'objet.
Symboles : m, M ; unité : kg.

Volume : portion de l'espace occupé par l'objet.
Symbole : V ; unité : m^3.

Masse volumique :

$$\rho = \frac{m}{V}, \qquad \text{unité : kg m}^{-3}.$$

Densité :

$$d = \frac{\rho}{\rho_{\text{eau liquide}}}, \qquad \text{unité : - \quad (pas d'unité).}$$

Surface : symboles : S, σ ; unité : m^2.

Longueur : symboles : x, r, s, d, L ; unité : m.

2.2 Référentiel, origine, repère fixe

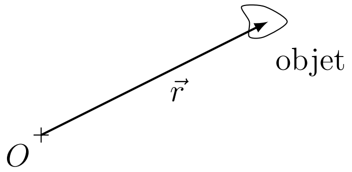
Référentiel : un objet de référence par rapport auquel est donné le mouvement d'un objet.

Origine : un point lié au référentiel, noté O.

Repère fixe orthonormé : triplet $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, avec $\vec{e}_x \perp \vec{e}_y$ et $||\vec{e}_x|| = ||\vec{e}_y|| = 1$.

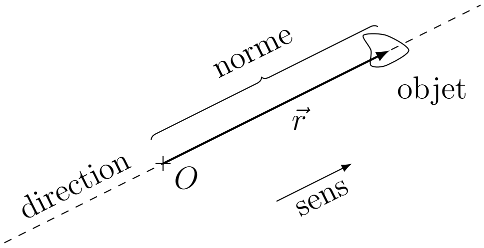
2.3 Vecteur position et temps

Vecteur position : vecteur donnant la position de l'objet dans le référentiel.

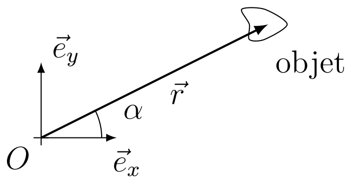


Symbole : $\vec{r}$; unité : m.

Direction, **sens** et **norme** de $\vec{r}$:



Décomposition de $\vec{r}$ dans le repère choisi :



$$\vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix}.$$

$$r = ||\vec{r}\,|| = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

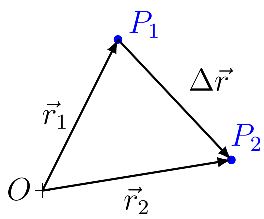
x et y sont les **composantes** de $\vec{r}$ selon le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$.

Temps : comparaison de durées.

Symbole : t ; unité : s.

Le vecteur position est une fonction du temps : $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Déplacement : comparaison entre deux positions $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ d'un objet.



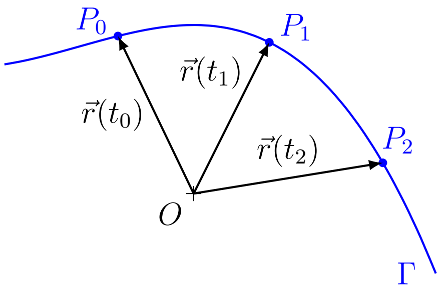
$\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$: ancienne position
$\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$: nouvelle position
$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$: déplacement

Symbole : $\Delta\vec{r}$; unité : m.

Rencontre de deux objets :

$$\exists\, t_r\,,\ \vec{r}_{\text{objet1}}(t_r) = \vec{r}_{\text{objet2}}(t_r)\,.$$

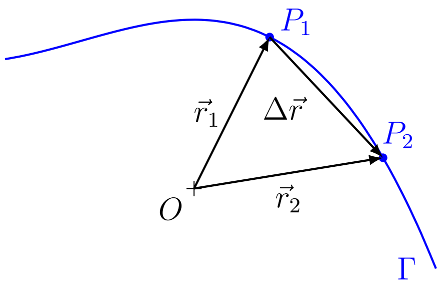
Trajectoire Γ :



$$\Gamma = \left\{ P \,|\, \exists\, t\,, \overrightarrow{OP} = \vec{r}(t) \right\} .$$

2.4 Vitesse

Considérons un objet à deux instants t_1 et t_2.

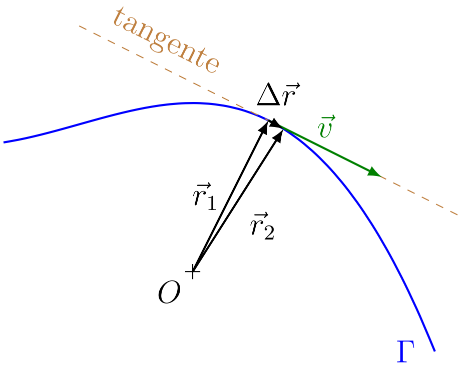


$\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$: ancienne position
$\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$: nouvelle position
$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$: déplacement
$\Delta t = t_2 - t_1$: durée du déplacement

Vitesse moyenne :

$$\vec{v}_{\text{moy}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\,, \quad \text{unité : m\,s}^{-1} .$$

Vitesse (instantanée) :



Lorsque $\Delta t \to 0$, $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ devient vecteur directeur de la tangente à la trajectoire en $\vec{r}_1$.

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t)\,, \quad \text{unité : m\,s}^{-1} .$$

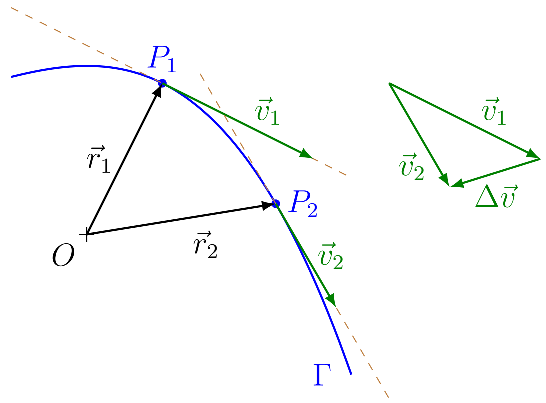
La vitesse est

- le taux de variation de la position par rapport au temps ;
- un vecteur (avec une direction, un sens et une norme) ;
- tangente à la trajectoire et dans le sens du mouvement.

La vitesse est une fonction du temps : $\vec{v} = \vec{v}(t)$.

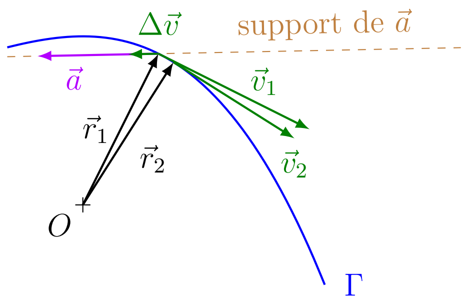
2.5 Accélération

Considérons un objet à deux instants t_1 et t_2.



$\vec{v}_1 = \vec{v}(t_1)$: ancienne vitesse
$\vec{v}_2 = \vec{v}(t_2)$: nouvelle vitesse
$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$: changement de vitesse
$\Delta t = t_2 - t_1$: durée du déplacement

Accélération (instantanée) :



$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}(t)\,, \quad \text{unité : m s}^{-2}\,.$$

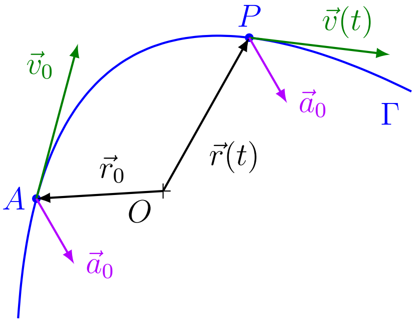
L'accélération est
- le taux de variation de la vitesse par rapport au temps ;
- un vecteur (avec une direction, un sens et une norme) ;
- toujours dirigée vers l'intérieur du virage.

L'accélération indique
- selon la tangente à la trajectoire, un changement dans la norme de la vitesse ;
- selon la normale à la trajectoire, un changement dans la direction de la vitesse.

L'accélération est une fonction du temps : $\vec{a} = \vec{a}(t)$.

Exemple : mouvement uniformément accéléré (MUA).

Pour un objet passant par un point A à l'instant t_0 ($\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 = \overrightarrow{OA}$) avec une vitesse $\vec{v}_0$ et dont l'accélération est constante, on a

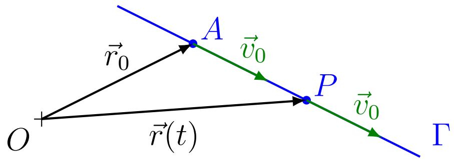


$$\begin{aligned}
\vec{a}(t) &= \vec{a}_0 = \overrightarrow{\text{cste}}\,, \\
\vec{v}(t) &= \vec{a}_0 \cdot (t - t_0) + \vec{v}_0\,, \\
\vec{r}(t) &= \frac{1}{2}\vec{a}_0 \cdot (t - t_0)^2 + \vec{v}_0 \cdot (t - t_0) + \vec{r}_0\,.
\end{aligned}$$

La trajectoire est alors une **parabole d'axe parallèle à** $\vec{a}_0$.

Exemple : mouvement rectiligne uniforme (MRU).

Il s'agit d'un cas particulier de MUA où l'accélération est nulle.



$$\begin{aligned}
\vec{a}(t) &= \vec{0}\,, \\
\vec{v}(t) &= \vec{v}_0\,, \\
\vec{r}(t) &= \vec{v}_0 \cdot (t - t_0) + \vec{r}_0\,.
\end{aligned}$$

3 Dynamique

3.1 Première loi de Newton (principe d'inertie)

Un objet en mouvement ne subit aucune action
ssi
son mouvement est rectiligne et uniforme ($\vec{a}(t) = \vec{0}\ \forall t$).

Référentiel d'inertie : un référentiel dans lequel le principe d'inertie est valable.

3.2 Deuxième loi de Newton

Un objet en mouvement subit une action
ssi
sa vitesse est modifiée ($\vec{a} \neq \vec{0}$).

Pour un objet considéré,

$$\vec{F} = m\vec{a}\,,$$

où m est la masse de l'objet, $\vec{a}$ son accélération et $\vec{F}$ la somme des forces qu'il subit.

Force : action qui modifie la vitesse de l'objet.

Symboles : $\vec{F}, \vec{S}, \vec{N}, \vec{T}$, $\vec{f}$; unité : $\mathrm{kg\,m\,s^{-2}} = \mathrm{N}$ ("newton").

Remarque :

- La force est la cause, l'accélération la conséquence.
- Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{F}$ sont parallèles et de même sens.
- Plus l'objet contient de matière, plus il est difficile de modifier sa vitesse.

Si un objet est **au repos**, la somme des forces qu'il subit est nulle :

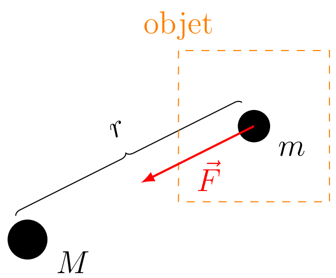
$$\text{objet statique} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \vec{0}\,, \quad \forall\, t\,.$$

La réciproque est fausse : l'objet peut être en MRU.

3.3 Forces particulières

3.3.1 Forces à distance

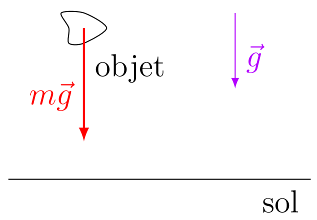
1) Force de gravitation : les masses s'attirent.



$$||\vec{F}|| = G\frac{Mm}{r^2}\,,$$

où $G \cong 6.67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$ est la constante gravitationnelle.

Près de la surface de la terre, la force de gravitation est appelée le poids.



$$\vec{F} = m\vec{g}\,,$$

où $\vec{g}$ est dirigé vers le centre de la terre et $g = ||\vec{g}|| \cong 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

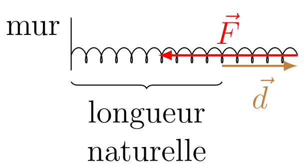
2) Force électrique : les charges électriques peuvent soit s'attirer, soit se repousser.
3) Force magnétique : une charge électrique en mouvement est déviée par un courant électrique.

3.3.2 Forces de contact

Les forces de contact sont exercées par traction, par pression ou par cisaillement.

Exemples : tension, soutien, frottement.

Cas particulier : le ressort élastique.



La force élastique est opposée à la déformation $\vec{d}$ du ressort,

$$\vec{F} = -k\vec{d}\,,$$

où la constante du ressort k mesure sa rigidité. Unité de k : $\mathrm{N\,m^{-1}}$.

3.4 Quantité de mouvement

Pour un objet de masse m et de vitesse $\vec{v}$,

Quantité de mouvement :

$$\vec{P} = m\vec{v}\,, \quad \text{unité : kg m s}^{-1}\,.$$

Pour un objet formé de N parties de masses m_1, m_2, ..., m_N de vitesses $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_N$,

Quantité de mouvement (totale) :

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_N = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_N\vec{v}_N\,.$$

La deuxième loi de Newton s'écrit alors

$$\vec{F} = \dot{\vec{P}}\,,$$

où $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N$ est la somme de toutes les forces exercées sur toutes les parties de l'objet.

3.5 Centre de masse

Pour un objet formé de N parties de masses m_1, m_2, ..., m_N repérées par leurs positions $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, ...,$\vec{r}_N$,

Centre de masse :

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_N\vec{r}_N}{m}\,,$$

où $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_N$ est la masse totale de l'objet considéré.

Ainsi,

$$\vec{P} = m\vec{v}_{\text{CM}}\,.$$

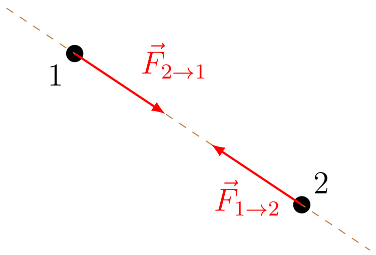
La quantité de mouvement de l'objet peut être vue comme celle d'une masse unique en mouvement située au CM.
La deuxième loi de Newton s'écrit alors

$$\vec{F} = \dot{\vec{P}} = m\vec{a}_{\text{CM}}\,.$$

Cette loi donne le mouvement du CM de l'objet soumis à des forces.

3.6 Troisième loi de Newton (action=réaction)

On observe que pour deux parties 1 et 2 d'un objet considéré, la force $\vec{F}_{1\to2}$ que 1 exerce sur 2 et la force $\vec{F}_{2\to1}$ que 2 exerce sur 1 sont



- de même support ;
- opposées ;
- de même norme ;

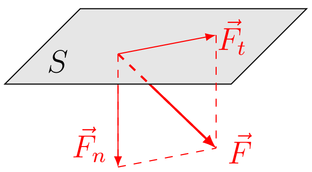
$$\vec{F}_{1\to2} + \vec{F}_{2\to1} = \vec{0}\,.$$

Les forces internes s'annulent donc deux à deux. Seules **les forces externes** sont déterminantes.
La deuxième loi de Newton s'écrit finalement

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \dot{\vec{P}} = m\vec{a}_{\text{CM}} \,.$$

3.7 Pression

Considérons une face S d'un objet et une force $\vec{F}$ exercée sur cette face.



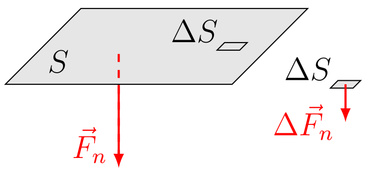
$$\vec{F} = \vec{F}_n + \vec{F}_t \,.$$

$\vec{F}_n$ est normale à S et $\vec{F}_t$ est tangente à S.

Pression moyenne :

$$p_{\text{moy}} = \frac{||\vec{F}_n||}{S} \,, \quad \text{unité : N m}^{-2} = \text{Pa (“pascal”)} \,.$$

En découpant S en petits morceaux ΔS, nous mettons en évidence la contribution $\Delta\vec{F}_n$ de la force normale $\vec{F}_n$ sur chaque ΔS :



$$\begin{aligned} S &= \Delta S_1 + \Delta S_2 + \ldots \\ \vec{F}_n &= \Delta\vec{F}_{n,1} + \Delta\vec{F}_{n,2} + \ldots \end{aligned}$$

Pression (locale) :

$$p(\vec{r}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{||\Delta\vec{F}_n||}{\Delta S} = \frac{dF_n}{dS} \,.$$

Remarque : la pression est

1) un scalaire positif, $p \geq 0$;

2) une fonction de l'espace et du temps, $p = p(\vec{r}, t)$.

Cas particulier : si la force normale est répartie uniformément sur la face S,

$$||\vec{F}_n|| = pS \,.$$

Autres unités de pression :

- le bar : 1 bar $= 10^5$ Pa $= 1000$ hPa ;
- l'atmosphère : 1 atm $= 1.013 \cdot 10^5$ Pa ;
- le millimètre de mercure : 1 atm $= 760$ mmHg $= 1013$ mbar $= 1013$ hPa.

Loi du gaz parfait :

$$pV = NkT = nRT\,,$$

où p est la pression du gaz, V le volume occupé par le gaz, N le nombre de molécules, T la température du gaz (en kelvin, K), $k = 1.38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$ la constante de Boltzmann, $n = N/N_\mathrm{A}$ est le nombre de moles et $R = N_\mathrm{A}k = 8.31\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mole^{-1}}$ la constante du gaz parfait. Une mole de molécules contient environ $N_\mathrm{A} = 6.02 \cdot 10^{23}$ molécules, N_A étant le nombre d'Avogadro.

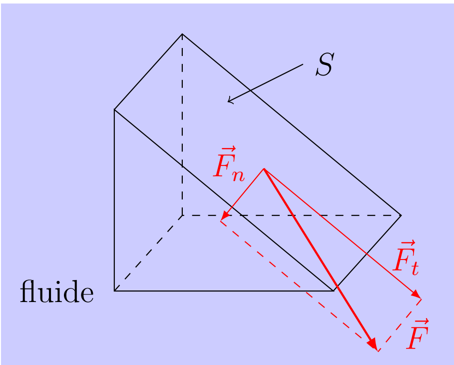
3.8 Hydrostatique

3.8.1 Définition d'un fluide

Un fluide est un matériau qui, contrairement à un solide, se transforme continuellement sous une contrainte tangentielle (cisaillement) arbitraire. Si la contrainte est relâchée, une déformation subsiste.

L'hydrostatique concerne les fluides au repos.

3.8.2 Forces dans un fluide au repos, loi de Pascal

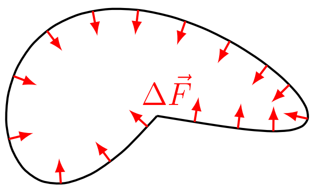


Dans un fluide, considérons un petit volume (de fluide).
S représente une des faces du volume.
Le fluide environnant exerce une force $\vec{F}$ sur chaque face S :

$$\vec{F} = \vec{F}_n + \vec{F}_t\,.$$

Comme le fluide est au repos, il n'exerce pas de cisaillement : $\vec{F}_t = \vec{0}$. Ainsi, la force exercée par le fluide sur une face du volume au repos est normale à la face ($\vec{F} = \vec{F}_n$).

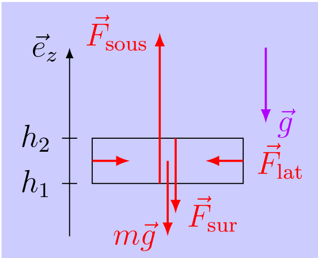
Les forces qu'un fluide au repos exerce sur un corps immobile sont exclusivement normales.



Loi de Pascal : l'intensité de la force exercée par le fluide sur une face ne dépend pas de l'orientation de la face.

3.8.3 Loi de l'hydrostatique

Considérons un fluide au repos, soumis à la gravitation.



Objet : parallélépipède rectangle de fluide entre deux niveaux h_1 et h_2.
Forces : poids et forces de pression verticales et latérales.
Newton :

$$m\vec{g} + \vec{F}_{\text{sur}} + \vec{F}_{\text{sous}} + \vec{F}_{\text{lat}} = \vec{0}\,.$$

Selon $\vec{e}_z$:

$$-mg - F_{\text{sur}} + F_{\text{sous}} = 0\,.$$

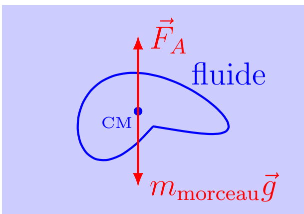
Ainsi, si le fluide est homogène ($\rho_{\text{fluide}} = \text{cste}$),

$$p(h_1) - p(h_2) = \rho_{\text{fluide}}\, g(h_2 - h_1)\,.$$

La différence de pression entre deux niveaux dans un fluide est due au poids (par unité de surface) du fluide compris entre les niveaux. En particulier, la pression est identique en tous points d'un même niveau.

3.8.4 Principe d'Archimède

La résultante des forces de pression est appelée poussée d'Archimède $\vec{F}_A$.



Objet : morceau de fluide
Forces : poids, résultante des forces de pression.
Newton :

$$m_{\text{morceau}}\,\vec{g} + \vec{F}_A = \vec{0}\,,$$

où $m_{\text{morceau}} = \rho_{\text{fluide}}\, V_{\text{morceau}}$.

$\vec{F}_A$ est une force égale et opposée au poids du liquide dans V_{morceau}.
Si nous remplaçons le morceau de fluide immergé par un autre objet au repos, de même volume immergé, les forces de pressions exercées par le fluide environnant ne changent pas. Ainsi,

Poussée d'Archimède :

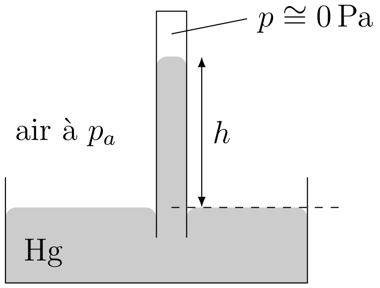
$$\vec{F}_A = -\rho_{\text{fluide}}\, V_{\text{immergé}}\, \vec{g}\,.$$

$\vec{F}_A$ est égale et opposée au poids du liquide déplacé.

Remarque : un corps flottant dans deux fluides subit deux poussées d'Archimède, données par le volume immergé dans chacun des fluides.

3.8.5 Unité de pression : le mmHg

La pression atmosphérique p_a peut être donnée par la hauteur h d'une colonne de liquide (mercure) dans un tube :



Au niveau de l'interface air-mercure,

$$p_a = p_{\mathrm{Hg}} = \rho_{\mathrm{Hg}}\, g\, h \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{p_a}{\rho_{\mathrm{Hg}}\, g}\,.$$

En particulier, à 1 atm, la hauteur de la colonne est de $760\,\mathrm{mm}$, d'où la relation

$$\frac{h}{760\,\mathrm{mm}} = \frac{p_a}{1\,\mathrm{atm}}\,.$$

3.9 Deux intermèdes

3.9.1 Produit scalaire

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ||\vec{a}||\,||\vec{b}||\,\cos\varphi\,.$$

Le produit scalaire est une mesure du parallélisme de deux vecteurs.
Un produit scalaire $\vec{a}\cdot\vec{b}$ positif signifie que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont plutôt de même sens.
Un produit scalaire $\vec{a}\cdot\vec{b}$ négatif signifie que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont plutôt de sens opposé.

Remarque : $\vec{v}\cdot\vec{v} = ||\vec{v}||^2$.

3.9.2 Taux de variation d'un produit (algébrique, scalaire ou vectoriel)

$$\frac{d}{dt}(AB) = \dot{A}B + A\dot{B}$$

Pour un vecteur $\vec{v} = v\vec{e}_t$:

$$\frac{d}{dt}(v\vec{e}_t) = \dot{v}\vec{e}_t + v\dot{\vec{e}}_t\,.$$

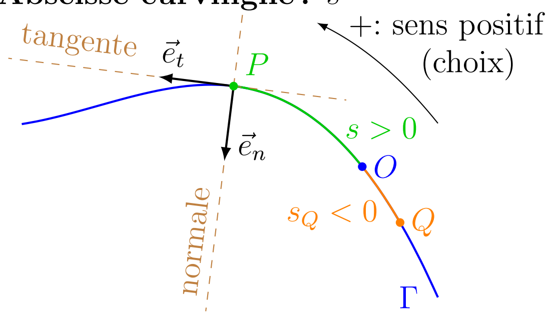
Pour le carré de sa norme :

$$\frac{d}{dt}(v^2) = \frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = 2\,\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}\,.$$

3.10 Repère lié au mouvement

3.10.1 Abscisse curviligne, repère lié à la position sur la trajectoire

Abscisse curviligne : s



On choisit $O \in \Gamma$ et un sens positif.
s est l'abscisse du point $P \in \Gamma$; unité : m.

$s > 0$: P est en avant de O selon le sens positif ;

$s < 0$: P est en arrière de O.

On définit pour chaque point de la trajectoire Γ un repère $(\vec{e}_t, \vec{e}_n)$ lié à ce point :

- $\vec{e}_t$ est un vecteur normé, tangent à Γ et donnant le sens positif de parcours,
- $\vec{e}_n$ est un vecteur normé, normal à Γ et indiquant l'intérieur (ou l'extérieur) du virage.

3.10.2 Vitesse scalaire

En tout point de Γ, la vitesse s'écrit

$$\vec{v} = v\vec{e}_t \,.$$

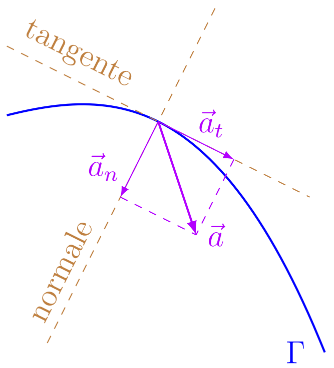
Vitesse scalaire :

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \dot{s} \,, \quad \text{unité : m}\,\text{s}^{-1}.$$

La vitesse scalaire est le taux de variation de l'abscisse curviligne par rapport au temps. Elle représente la vitesse le long de Γ selon $\vec{e}_t$.

3.10.3 Accélérations tangentielle et normale

En tout point de Γ, l'accélération se décompose dans le repère $(\vec{e}_t, \vec{e}_n)$:



$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = a_t\vec{e}_t + a_n\vec{e}_n \,.$$

- **Accélération tangentielle :**

$$a_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \dot{v} = \ddot{s} \,, \quad \text{unité : m}\,\text{s}^{-2}\,.$$

  L'accélération tangentielle est l'accélération le long de Γ selon $\vec{e}_t$. Elle est donc le taux de variation de la vitesse scalaire par rapport au temps.

- **Accélération normale :**

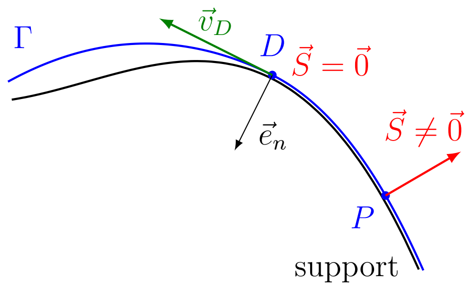
$$|a_n| = \frac{v^2}{R} \,, \quad \text{unité : m}\,\text{s}^{-2}\,.$$

  R est le rayon de la trajectoire, c.-à-d. le rayon du cercle osculateur (cercle passant par trois points de la trajectoire infiniment proches). L'accélération normale donne la variation de la direction de la vitesse $\vec{v}$.

  Remarque : Le vecteur $\vec{a}_n$ est toujours dirigé vers l'intérieur du virage.

Exemple : condition de décrochement.

Un objet se déplaçant sur un support subit une force de soutien $\vec{S}$ normale au support.



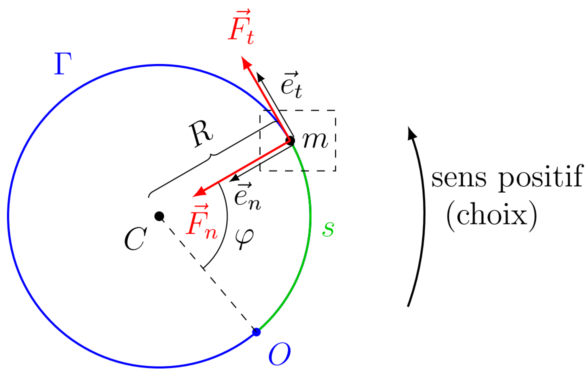
Si l'objet quitte le support, le soutien devient nul au point de décrochement D :

$$\vec{S} = \vec{0}\,;$$

il s'annule en particulier selon $\vec{e}_n$.

3.10.4 Mouvement circulaire

Considérons un objet sur une trajectoire circulaire Γ de rayon R. Une force tangentielle peut rendre l'objet plus ou moins rapide. Une force normale est nécessaire pour imprimer le virage à l'objet.



Objet : m
Forces : tangentielle et normale
Newton :

$$\vec{F}_t + \vec{F}_n = m\vec{a}\,.$$

Pour une origine O sur Γ, l'objet est repéré par l'angle φ :

$$s = R\varphi\,.$$

La vitesse scalaire est

$$v = \dot{s} = R\dot{\varphi}\,,$$

où $\dot{\varphi}$ est **la vitesse angulaire** de l'objet autour de C. C'est le taux de variation de la position angulaire φ par rapport au temps. Elle est souvent notée $\omega = \dot{\varphi}$.
Alors,

$$v = R\omega\,, \quad a_t = \dot{v} = R\dot{\omega} = R\ddot{\varphi} \quad \text{et} \quad |a_n| = \frac{v^2}{R} = R\omega^2\,.$$

Nous obtenons ainsi

$$\begin{cases} \text{selon } \vec{e}_t : \quad F_t = ma_t = mR\ddot{\varphi}\,, \\ \\ \text{selon } \vec{e}_n : \quad F_n = ma_n = mR\omega^2\,. \end{cases}$$

4 Energie

4.1 Conservation de l'énergie

L'énergie est une grandeur pouvant caractériser un système. Il s'agit d'un nombre, noté E, qui est conservé s'il n'y a aucun échange avec l'environnement du système. Ainsi, dans le cas d'un **système isolé**, la variation d'énergie entre deux instants t_1 et t_2, $t_2 > t_1$, est nulle :

$$\Delta E = E(t_2) - E(t_1) = 0\,.$$

Dans le cas d'un **système non isolé**, des échanges peuvent se faire avec l'environnement du système et l'on a en général

$$\Delta E = E(t_2) - E(t_1) \neq 0\,.$$

Par convention, on se place du point de vue du système :

- $\Delta E > 0$ signifie que le système gagne de l'énergie ;
- $\Delta E < 0$ signifie que le système perd de l'énergie.

Au cours du temps, l'énergie d'un système peut également changer de forme.

4.2 Energie cinétique et travail

4.2.1 Théorème de l'énergie cinétique

Considérons un objet de masse m.
A un instant donné, on définit l'**énergie cinétique** de son CM par

$$E_{\text{cin,CM}} = \frac{1}{2} m v_{\text{CM}}^2\,.$$

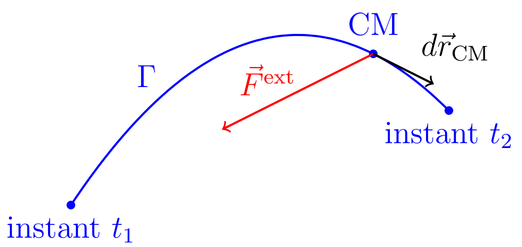
C'est l'énergie associée au mouvement. Unité : $\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}} = \mathrm{N\,m} = \mathrm{J}$ ("joule").

La variation d'énergie cinétique entre un instant t_1 et un instant t_2 est donnée par le **théorème de l'énergie cinétique** pour le CM :

$$E_{\text{cin,CM}}(2) - E_{\text{cin,CM}}(1) = W_{1\to 2}^{\text{ext}}\,,$$

où

$$W_{1\to 2}^{\text{ext}} = \int_1^2 dW^{\text{ext}} = \int_1^2 \vec{F}^{\text{ext}} \cdot d\vec{r}_{\text{CM}}$$



est le **travail** des forces extérieures $\vec{F}^{\text{ext}}$ sur le CM, $dW^{\text{ext}} = \vec{F}^{\text{ext}} \cdot d\vec{r}_{\text{CM}}$ étant le **travail infinitésimal** des forces extérieures sur le CM pour un déplacement $d\vec{r}_{\text{CM}}$. Le symbole d'intégration $\int$ désigne la somme des travaux infinitésimaux effectués entre 1 et 2.

4.2.2 Forces conservatives

Force conservative : Une force est dite conservative si son travail sur l'objet considéré ne dépend que des extrémités du chemin que l'objet parcourt, et non du chemin lui-même.

Energie potentielle : Le travail d'une force conservative entre un instant t_1 et un instant t_2 peut être écrit comme une différence d'énergie potentielle :

$$W_{1\to 2}(\vec{F}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{cons}}) = E_{\mathrm{pot,CM}}(1) - E_{\mathrm{pot,CM}}(2)\,.$$

L'énergie potentielle est associée à une position $\vec{r}$ du CM de l'objet et est définie à une constante arbitraire près.

Exemples :

a) Le poids, $\vec{F} = m\vec{g}$.

$$E_{\mathrm{pot}}(\vec{r}) = -m\vec{g}\cdot\vec{r} + \mathrm{cste} = mgh + \mathrm{cste}\,.$$

Cette énergie potentielle est associée à la hauteur h du CM au-dessus de l'origine.

b) La gravitation (cas général), $\vec{F} = -G\,\dfrac{Mm}{r^2}\,\vec{e}_r\,.$

$$E_{\mathrm{pot}}(\vec{r}) = -G\,\frac{Mm}{r} + \mathrm{cste}\,.$$

c) La force de rappel d'un ressort, $\vec{F} = -k\vec{d}$.

$$E_{\mathrm{pot}}(\vec{r}) = \frac{1}{2}kd^2 + \mathrm{cste}\,.$$

d) La force de Coulomb, $\vec{F} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Qq}{r^2}\,\vec{e}_r\,.$

$$E_{\mathrm{pot}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r} + \mathrm{cste}\,.$$

Energie mécanique :

$$E_{\mathrm{méc,CM}} = E_{\mathrm{cin,CM}} + E_{\mathrm{pot,CM}}\,.$$

C'est l'énergie associée au mouvement et à la position du CM de l'objet.

La variation d'énergie mécanique entre un instant t_1 et un instant t_2 est donc donnée par

$$E_{\mathrm{méc,CM}}(2) - E_{\mathrm{méc,CM}}(1) = W_{1\to 2}(\vec{F}^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{non\ cons}})\,.$$

En d'autres termes, si toutes les forces sont conservatives (ou ne travaillent pas), l'énergie mécanique du CM est conservée, $E_{\mathrm{méc,CM}} = \mathrm{cste}$.

4.3 Puissance

Puissance :

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{dE}{dt} = \dot{E}\,, \quad \text{unité : J s}^{-1} = \text{W (“watt”)}.$$

C’est un apport d’énergie par unité de temps.

Rendement :

$$\eta = \frac{P_{\text{utile}}}{P_{\text{fournie}}}\,, \quad \text{unité : -}.$$

Pour un dispositif transformant de l’énergie d’une forme en une autre, c’est le rapport entre la puissance utile (la forme voulue) et la puissance fournie (la forme initiale).

5 Oscillateur harmonique

5.1 Evolution

Une équation du type

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x$$

décrit l’évolution d’un oscillateur harmonique. Résoudre cette équation revient à chercher une fonction du temps $x(t)$ vérifiant cette équation faisant intervenir $x(t)$ et ses dérivées (équation différentielle).
Le mouvement de l’oscillateur harmonique est entièrement déterminé si l’on connaît de plus sa position et sa vitesse à un instant t_0 (les conditions initiales) :

$$x(t_0) = x_0 \qquad v(t_0) = \dot{x}(t_0) = v_0\,.$$

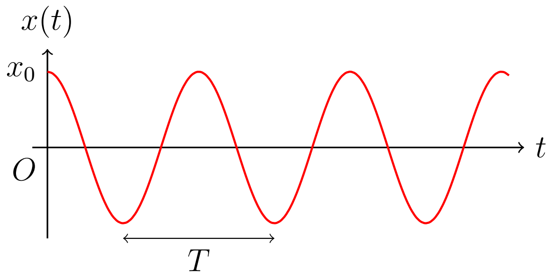
La solution, unique, est

$$x(t) = x_0 \cos\left(\omega_0(t - t_0)\right) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin\left(\omega_0(t - t_0)\right)\,.$$

C’est une oscillation harmonique autour de la position d’équilibre $x_{\text{éq}} = 0$.

Exemple : lâcher à $t_0 = 0$ à la position x_0 et à vitesse nulle.

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)\,.$$



5.2 Caractéristiques

Les arguments du cos et du sin étant les mêmes, nous pouvons écrire la solution également comme

$$x(t) = A\cos\left(\omega_0(t-t_0)+\varphi\right) \,.$$

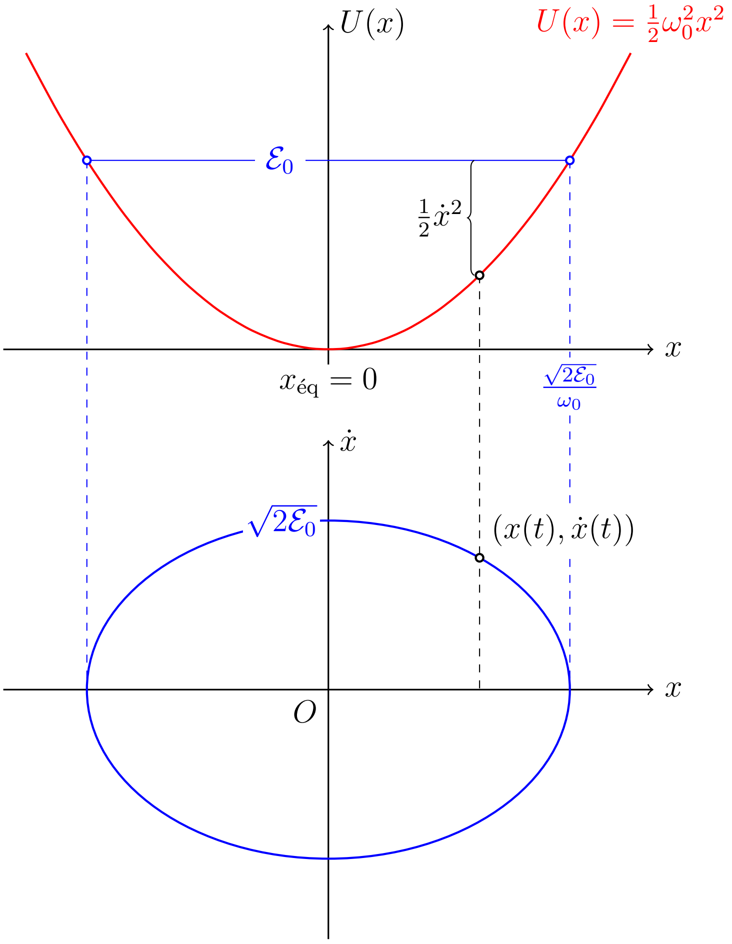
C'est une oscillation (non amortie)

- d'amplitude A : valeur extrême (unité : celle de x)
- de période $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$: temps d'un cycle (unité : s)
- de fréquence $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$: nombre de cycles par unité de temps (unité : $\mathrm{s}^{-1} = \mathrm{Hz}$)
- de pulsation ω_0 : angle (1 tour $\simeq 2\pi$) parcouru par unité de temps (unité : s^{-1}).

5.3 Energie mécanique

La conservation de l'énergie (par unité de masse) d'un oscillateur harmonique s'écrit

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 x^2 = \mathcal{E}_0 \quad \forall\, t\,.$$



Pour chaque valeur $\mathcal{E}_0$ de l'énergie, l'oscillation se fait autour du point d'équilibre $x_{\text{éq}} = 0$ situé au minimum du potentiel. L'énergie cinétique se lit comme la différence entre $\mathcal{E}_0$ et le potentiel $U(x)$:

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = \mathcal{E}_0 - U(x)\,.$$

Dans le plan $(x, \dot{x})$, appelé espace de phase, l'équation

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 x^2 = \mathcal{E}_0$$

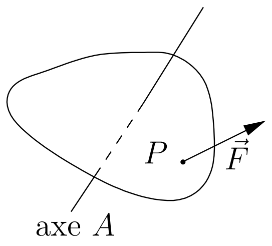
décrit une ellipse, appelée orbite. L'orbite est un rendu visuel de la relation entre position et vitesse (selon $\vec{e}_x$).

6 Rotation en deux dimensions

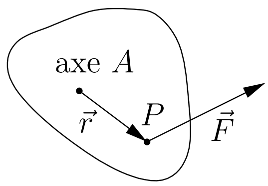
6.1 Moment d'une force (rotation autour d'un axe)

Si on veut mettre un objet en mouvement autour d'un axe fixe A, on doit appliquer une force $\vec{F}$ en un point P.

Vue en 3D



Vue en 2D dans un plan perpendiculaire à l'axe A



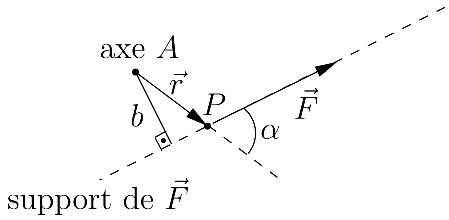
La mise en rotation est donnée par

$$M_A = b\,||\vec{F}||\,,$$

où

$$b = ||\vec{r}\,||\,|\sin\alpha|$$

est le **bras de levier**.



Moment de la force $\vec{F}$ par rapport à A :

$$\vec{M}_A = \vec{r} \times \vec{F}\,, \qquad \text{unité : N m}\,,$$

avec $\vec{r} = \overrightarrow{AP}$. Le sens de la rotation induite par $\vec{M}_A$ est donné par la règle du tire-bouchon. Dans le cas de la figure ci-dessus, le moment de force est sortant : $\odot\vec{M}_A$.

Si plusieurs forces $\vec{F}_i$ sont appliquées sur l'objet considéré en des points P_i ,

$$\vec{M}_A = \sum_i \vec{M}_{A,i} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i\,, \qquad \text{avec} \;\; \vec{r}_i = \overrightarrow{AP_i}\,.$$

6.2 Statique

Relativement à un référentiel d'inertie, un objet au repos pour la translation et la rotation vérifie les relations

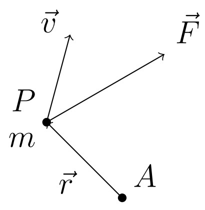
$$\vec{F}^{\,\text{ext}} = \sum_i \vec{F}_i^{\,\text{ext}} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{M}_A^{\text{ext}} = \sum_i \vec{M}_{A,i}^{\text{ext}} = \vec{0}\,, \;\; \forall A\,.$$

La somme des forces extérieures et la somme des moments des forces extérieures par rapport à n'importe quel point fixe A sont nulles.

6.3 Théorème du moment cinétique

6.3.1 Cas d'une masse ponctuelle

On considère un point A fixe dans un référentiel d'inertie et une masse ponctuelle m se déplaçant à une vitesse $\vec{v}$ et soumise à une force $\vec{F}$.



Moment cinétique de m par rapport à A :

$$\vec{L}_A = \vec{r} \times \vec{P} = \vec{r} \times m\,\vec{v}\,, \qquad \text{unité : kg m}^2\,\text{s}^{-1}.$$

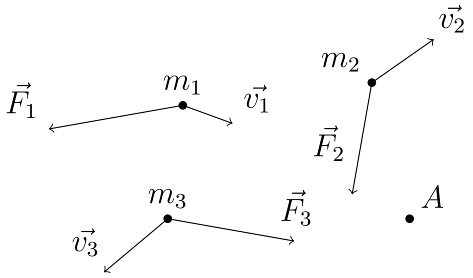
Théorème du moment cinétique :

$$\vec{M}_A = \frac{d}{dt}\vec{L}_A \equiv \dot{\vec{L}}_A\,.$$

6.3.2 Cas d'un système de plusieurs masses

On considère un point A et un système formé de plusieurs masses m_i subissant chacune une force (résultante) $\vec{F}_i$.
Pour chaque masse m_i,

$$\vec{M}_{A,i} = \dot{\vec{L}}_{A,i}\,.$$



Moment cinétique du système par rapport à A :

$$\vec{L}_A = \sum_i \vec{L}_{A,i}\,.$$

Selon la troisième loi de Newton (action=réaction),

$$\vec{M}_A = \sum_i \vec{M}_{A,i} = \sum_i \vec{M}^{\text{ext}}_{A,i}\,.$$

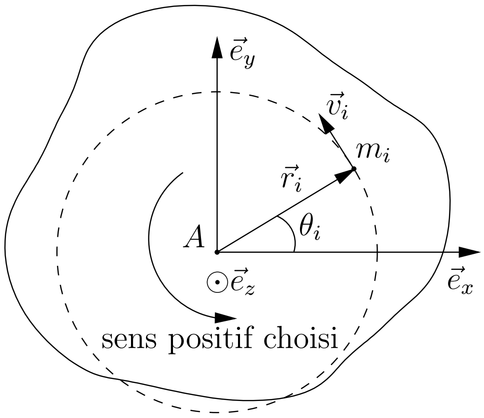
Seules les forces externes et leur moment interviennent donc dans la dynamique du système.

Théorème du moment cinétique :

$$\vec{M}^{\text{ext}}_A = \dot{\vec{L}}_A\,.$$

6.3.3 Cas d'un solide

Dans un solide, les positions relatives des masses m_i ne changent pas au cours du temps.



Imaginons un solide en rotation autour d'un axe passant par A et choisissons un sens positif de rotation. Selon la règle du tire-bouchon, ce sens positif de rotation est décrit par un vecteur $\vec{e}_z$ parallèle à l'axe de rotation et donc normal au plan (x, y).
La rotation du solide est alors complètement donnée par le **vecteur vitesse angulaire**

$$\vec{\omega}_A = \omega_A \, \vec{e}_z \, .$$

La vitesse scalaire, définie à la section 3.10, s'écrit ainsi

$$v_i = r_i \, \dot{\theta}_i = r_i \, \omega_A \, .$$

Le moment cinétique du solide par rapport à A a pour expression

$$\vec{L}_A = L_A \, \vec{e}_z \, ,$$

avec

$$L_A = \sum_i L_{A,i} = \sum_i r_i \, m_i \, v_i = \sum_i \omega_A \, m_i \, r_i^2 = \Big(\sum_i m_i \, r_i^2 \Big) \omega_A = I_A \, \omega_A \, ,$$

où

$$I_A = \sum_i m_i \, r_i^2 \, , \qquad \text{unité : kg m}^2 \, ,$$

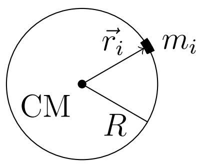
est le **moment d'inertie** du solide par rapport à A.
Vectoriellement, on peut écrire

$$\vec{L}_A = I_A \, \vec{\omega}_A \quad \text{et} \quad \vec{M}_A^{\text{ext}} = \dot{\vec{L}}_A = I_A \, \dot{\vec{\omega}}_A \, ,$$

où $\dot{\vec{\omega}}_A$ est **l'accélération angulaire** du solide.

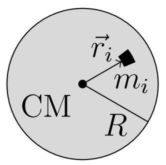
Moment d'inertie pour quelques solides homogènes de masse m :

1) Cerceau (cercle) ou cylindre creux, p.r. à l'axe de symétrie passant par le CM



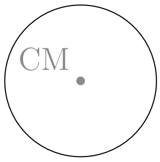
$$I_{\text{CM}} = mR^2 \, .$$

2) Disque ou cylindre plein, p.r. à l'axe de symétrie passant par le CM



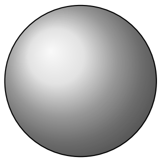
$$I_{\text{CM}} = \frac{1}{2} mR^2 \, .$$

3) Sphère, p.r. à un axe passant par le CM



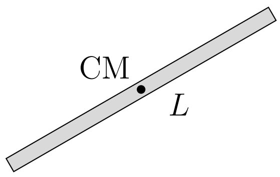
$$I_{\mathrm{CM}} = \frac{2}{3} m R^2 \,.$$

4) Boule, p.r. à un axe passant par le CM



$$I_{\mathrm{CM}} = \frac{2}{5} m R^2 \,.$$

5) Tige mince, p.r. à un axe normal à la tige et passant par le CM



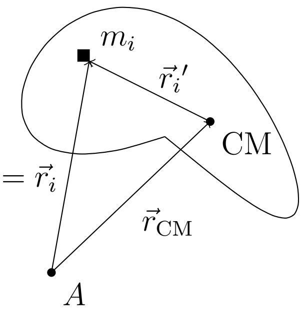
$$I_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{12} m L^2 \,.$$

Règle de Steiner :
Connaissant I_{CM} p.r. à un axe passant par le CM, on a I_A p.r. à un axe parallèle passant par A :

$$I_A = m\, d^2 + I_{\mathrm{CM}} \,,$$

avec $d = ||\vec{r}_{\mathrm{CM}}||$ et $I_{\mathrm{CM}} = \sum_i m_i\, {r_i'}^2 \,.$

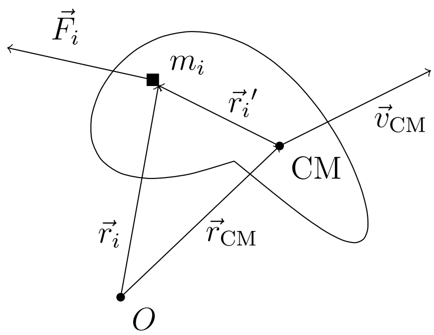
$$\vec{r}_{\mathrm{CM}} + \vec{r}_i{}' = \vec{r}_i$$



6.3.4 Référentiel du CM

Dans le référentiel lié au CM d'un objet constitué de masses ponctuelles m_i, on a

$$\begin{aligned}
\underbrace{\vec{r}_i}_{\text{rel. à } O} &= \underbrace{\vec{r}_{\mathrm{CM}}}_{\text{rel. à } O} + \underbrace{\vec{r}_i{}'}_{\text{rel. au CM}} \\
\vec{v}_i &= \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \vec{v}_i{}' \\
\vec{a}_i &= \vec{a}_{\mathrm{CM}} + \vec{a}_i{}' \,.
\end{aligned}$$



Le CM est immobile par rapport à lui-même :

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}}{}' = \vec{0} \,, \quad \vec{v}_{\mathrm{CM}}{}' = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{a}_{\mathrm{CM}}{}' = \vec{0} \,.$$

La deuxième loi de Newton reste valable si l'on ajoute la "force" d'inertie $-m_i\, \vec{a}_{\mathrm{CM}}$:

$$\vec{F}_i - m_i\, \vec{a}_{\mathrm{CM}} = m_i\, \vec{a}_i{}' \,.$$

Remarque :
En sommant sur les m_i, il vient

$$\vec{F} - m\vec{a}_{\text{CM}} = \vec{0}\,.$$

Le théorème du moment cinétique $\vec{M}_A^{\text{ext}} = \dot{\vec{L}}_A$ reste valable relativement au référentiel du CM :

$$\vec{M}_{\text{CM}}^{\text{ext}} = \dot{\vec{L}}_{\text{CM}}\,,$$

et ce, même si le CM est accéléré !

6.4 Théorème de l'énergie cinétique et énergie cinétique de rotation d'un solide

Rappel : pour une masse ponctuelle m_i : $m_i\,\vec{a}_i = \vec{F}_i$.
On peut s'intéresser à l'énergie du CM, ou à celle de toutes les parties du solide.

6.4.1 Energie cinétique du CM de l'objet

Avec $E_{\text{cin,CM}} = \frac{1}{2}mv_{\text{CM}}^2$,

$$E_{\text{cin,CM}}(2) - E_{\text{cin,CM}}(1) = W_{1\to2}^{\text{ext}} = \int_1^2 \vec{F}^{\text{ext}} \cdot d\vec{r}_{\text{CM}}\,.$$

La variation de l'énergie cinétique du CM de l'objet est donnée par le travail des forces extérieures sur le CM.

6.4.2 Energie cinétique de l'objet

Produit scalaire avec $\vec{v}_i$, somme sur i : avec $E_{\text{cin}} = \sum_i E_{\text{cin},i} = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2$,

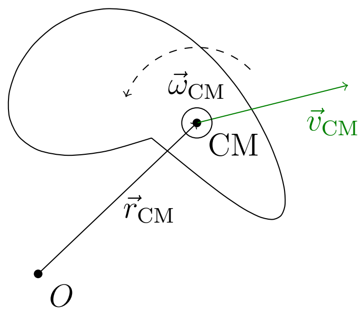
$$E_{\text{cin}}(2) - E_{\text{cin}}(1) = W_{1\to2}^{\text{ext}} + W_{1\to2}^{\text{int}}\,.$$

La variation de l'énergie cinétique (totale) de l'objet est donnée par le travail des forces extérieures et intérieures sur leur point d'application.

6.4.3 Cas d'un solide

L'énergie cinétique d'un solide s'écrit

$$E_{\text{cin}} = E_{\text{cin,CM}} + E_{\text{cin,rot.}}\,,$$



avec les définitions

Energie cinétique de translation :

$$E_{\text{cin,CM}} = \frac{1}{2}\, m\, v_{\text{CM}}^2$$

Energie cinétique de rotation par rapport au CM :

$$E_{\text{cin,rot.}} = \frac{1}{2}\, I_{\text{CM}}\, \omega_{\text{CM}}^2\,.$$

La variation de l'énergie cinétique d'un solide ne dépend que des forces extérieures :

$$E_{\text{cin}}(2) - E_{\text{cin}}(1) = W_{1\to 2}^{\text{ext}} = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i^{\text{ext}} \cdot d\vec{r}_i\,.$$

Par ailleurs, les dérivées par rapport au temps s'écrivent

$$\dot{E}_{\text{cin,CM}} = \vec{F}^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_{\text{CM}} \quad \text{et} \quad \dot{E}_{\text{cin,rot.}} = \vec{M}_{\text{CM}}^{\text{ext}} \cdot \vec{\omega}_{\text{CM}}\,.$$

7 Electrostatique

L'électrostatique est l'étude des phénomènes électriques relatifs à des charges immobiles.

7.1 Force, charge et champ électriques

7.1.1 Electrisation par frottements, attraction, répulsion (expérience)

Il existe deux types de charges : **positives** et **négatives**. Deux charges de même signe se repoussent alors que deux charges de signe contraire s'attirent.
Un objet portant autant de charges positives que de charges négatives est dit **neutre**.

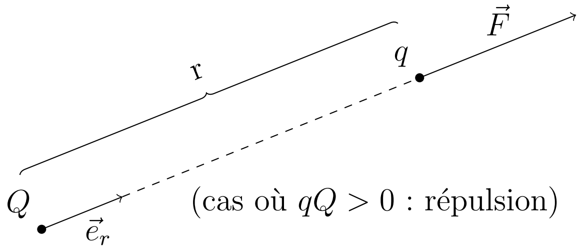
7.1.2 Charge élémentaire

La charge d'un système est toujours un multiple entier positif ou négatif d'une charge élémentaire e (quantification de la charge) : $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C.
Unité de la charge : Le Coulomb C.
La charge électrique totale d'un système isolé est une grandeur conservée.

7.1.3 Force de Coulomb

Force de Coulomb exercée sur une charge q par une autre charge Q :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\,Q}{r^2} \vec{e}_r\,.$$



La constante $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ N^{-1}m^{-2}C^2 est appelée **permittivité du vide**.

7.1.4 Champ électrique $\vec{E}$

La force exercée sur une charge q par une autre charge Q peut donc s'écrire :

$$\vec{F} = q\vec{E}\,,$$

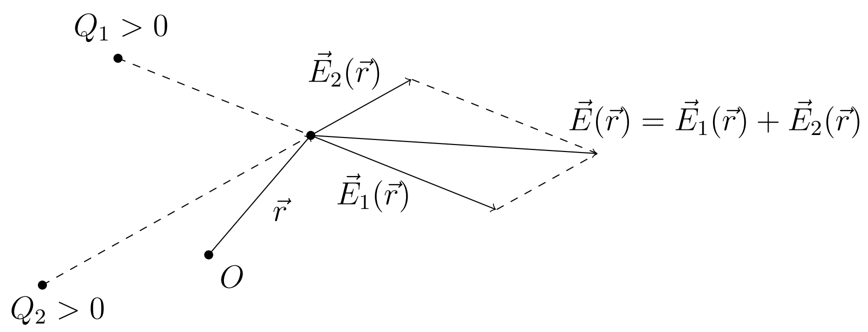
avec

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\vec{e}_r\,, \qquad \text{unité : } \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\,,$$

où $\vec{E}$ est le **champ électrique** produit par la charge Q à l'endroit où se trouve q. Le volt V est une unité introduite à la section 7.2.

Principe de superposition :
Le champ $\vec{E}$ dû à N charges $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ est

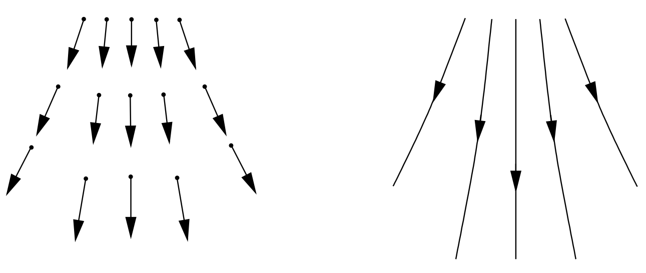
$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r}) + \cdots + \vec{E}_N(\vec{r})\,.$$



La force électrique excercée sur une charge q située dans le champ électrique est ainsi donnée par

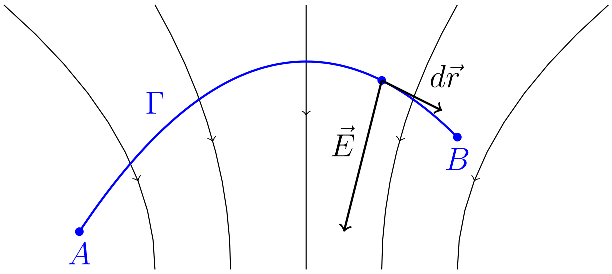
$$\vec{F} = q\,\vec{E}\,.$$

Lignes de champ :
Un vecteur $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ est associé à chaque position $\vec{r}$ et on peut représenter graphiquement ce champ vectoriel en traçant un ensemble de vecteurs dont les modules et les directions correspondent aux valeurs de $\vec{E}$ aux points d'origine des vecteurs dessinés. Une autre représentation possible d'un champ de vecteurs consiste à tracer des lignes qui sont tangentes à la direction de $\vec{E}$ en tout point. On parle alors de **lignes de champ**. Ces dernières ne peuvent pas se croiser et vont toujours des charges positives aux charges négatives.



7.2 Tension et potentiel électrique

Considérons une région où règne un champ électrique $\vec{E}(\vec{r})$ et un chemin Γ d'un point A vers un point B.



Une charge q suivant Γ subirait la force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$.

La force électrique est conservative : son travail s'exprime aussi comme une différence d'énergie potentielle. De plus, la charge q peut être mise en évidence :

$$\begin{aligned} W_{A\to B}(\vec{F}) &= \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} = E_{\text{pot}}(A) - E_{\text{pot}}(B) \\ &= q\,U_{AB} = q\,\Phi_A - q\,\Phi_B\,. \end{aligned}$$

Potentiel électrique :

$$\Phi(\vec{r})\,, \quad \text{unité : V (“volt”).}$$

Le potentiel électrique à la position $\vec{r}$ dans le champ électrique est l'énergie potentielle électrique par unité de charge (“hauteur dans le champ électrique”).
C'est un nombre défini, à une constante arbitraire près, en tout point de l'espace (champ scalaire).

Tension électrique entre A et B :

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} = \Phi_A - \Phi_B\,.$$

La tension électrique est le travail de la force électrique par unité de charge ou encore la différence de potentiel (“différence de hauteur dans le champ électrique”).

Surface équipotentielle :
L'ensemble des points de l'espace au même potentiel est une surface appelée équipotentielle.

Propriétés :

1) U_{AB} est un nombre réel (positif, négatif ou nul).
2) U_{AB} est indépendante du chemin de A à B : $\vec{E}$ est conservatif.
3) U_{AB} ne dépend que de A et de B.
4) $U_{BA} = -U_{AB}$ (chemin inverse).
5) $U_{AA} = 0\,\text{V}$ (chemin fermé).
6) $U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}$.
7) En électrostatique, le champ $\vec{E}$ est normal aux équipotentielles.
8) Le potentiel diminue lorsqu'on parcourt une ligne de champ dans le sens de $\vec{E}$.

Une charge q suivant un chemin de A vers B dans un champ électrique reçoit de l'énergie sous forme de travail de la force électrique

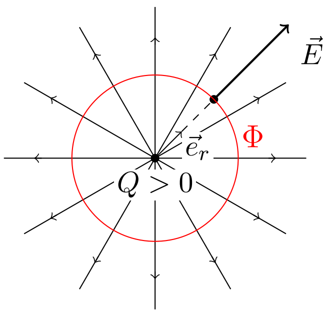
$$W_{AB} = q\,U_{AB}\,.$$

L'électron-volt est une unité d'énergie définie par l'énergie électrique reçue par une charge élémentaire sous une tension de 1 V :

$$1\,e\mathrm{V} = 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}\,.$$

Cas particuliers :

a) Charge ponctuelle Q



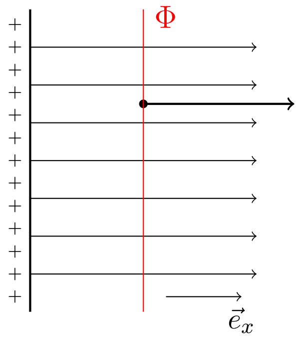
$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{r^2}\,\vec{e}_r \\ \Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{r} + \mathrm{cte} \end{aligned}$$

Alors

$$U_{AB} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right).$$

Les équipotentielles sont des sphères centrées sur Q.

b) Plaque infinie



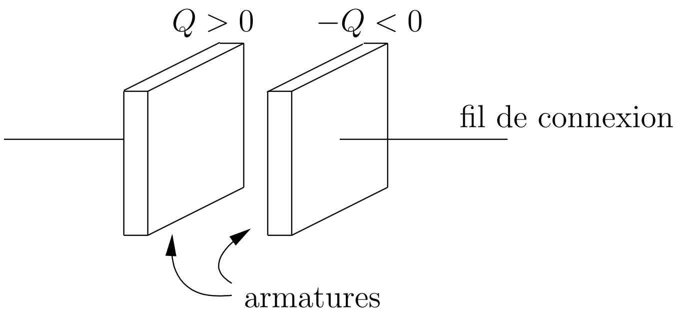
$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \vec{E}_0 = E_0\vec{e}_x \\ \Phi(\vec{r}) &= -E_0 x + \mathrm{cte} \end{aligned}$$

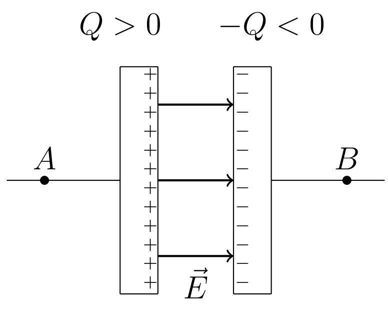
Alors

$$U_{AB} = \vec{E}_0 \cdot \overrightarrow{AB} = E_0(x_B - x_A)\,.$$

Les équipotentielles sont des plans parallèles à la plaque.

Exemple : un condensateur plan est un ensemble formé de deux plaques conductrices isolées, se faisant face. Si l'une des armatures est chargée, l'autre possède une charge de signe contraire.





$U = U_{AB} > 0$

Dans un condensateur, i) on crée un champ $\vec{E}$, ii) on stocke des charges.
Par convention,

- La charge d'un condensateur est celle de l'armature positive.
- La tension d'un condensateur U est celle du $+$ au $-$, donc positive.

La tension et la charge sont liées par la relation

$$Q = CU \,,$$

où C est la capacité du condensateur dont l'unité est $\mathrm{CV}^{-1} = \mathrm{F}$ ("farad"). C'est une caractéristique du condensateur : à tension donnée, plus C est grande, plus la charge du condensateur est grande. C dépend de la géométrie (distance entre les armatures, surface, etc.).
Pour le condensateur plan :

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d} \,,$$

où S est la surface d'une des plaques et d la distance entre les plaques (supposées identiques).
L'énergie stockée dans un condensateur correspond au travail à fournir pour charger ce dernier avec un certain nombre de charges élémentaires :

$$W = \frac{1}{2} C U^2 \,.$$

8 Circuits à courant continu

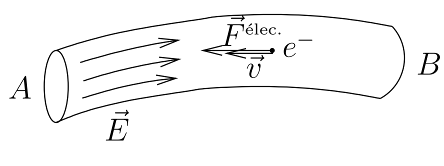
8.1 Origine du courant dans un conducteur

8.1.1 Champ électrique dans un conducteur

Un corps est dit **conducteur** si les charges peuvent facilement y circuler. Dans le cas contraire, il est dit **isolant**. Dans un conducteur, il existe des particules chargées susceptibles de se déplacer.
En électrostatique, le champ électrique est nul à l'intérieur des conducteurs. Deux points quelconques d'un même conducteur peuvent toujours être joints par un chemin sur lequel le champ est partout nul. Par conséquent,

- La tension entre deux points d'un conducteur est toujours nulle.
- Tous les points d'un conducteur sont au même potentiel.
- Les lignes de champ sont perpendiculaires à la surface des conducteurs (celle-ci étant une équipotentielle).

Lorsqu'une tension U_{AB} est établie aux bornes d'un conducteur, il règne un champ $\vec{E}$ à l'intérieur de ce dernier. Les porteurs de charges (électrons) subissent alors une force électrique $\vec{F}^{\text{élec.}}$ et se déplacent collectivement à une vitesse $\vec{v}$, créant un courant :



Remarques :

- les lignes de champ suivent le conducteur ;
- le conducteur reste neutre ;
- les électrons subissent également un frottement (résistance).

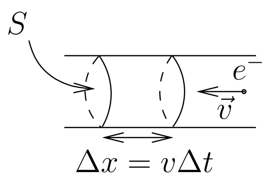
8.2 Courant électrique

Le courant électrique I est la quantité de charges traversant la section d'un conducteur par unité de temps :

$$I = \frac{dq}{dt}\,, \qquad \text{unité : Cs}^{-1} = \text{A (“ampère”)}.$$

Convention : le sens du courant est celui des charges positives.

Exemple : Courant traversant un fil de section S



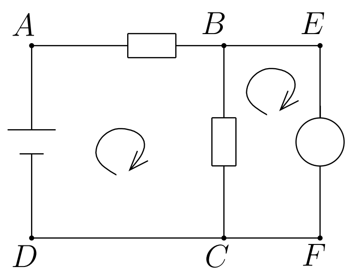
$$\Delta Q = enS\Delta x = enSv\Delta t \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = enSv\,,$$

où v est la vitesse des électrons et n la densité électronique (nombre d'électrons de conduction par unité de volume).

8.3 Règles de Kirchhoff

1) Sur un chemin fermé, la somme des tensions est nulle.

   Exemple de circuit :



Dans toute **maille** (chemin fermé), la somme des tensions est nulle :

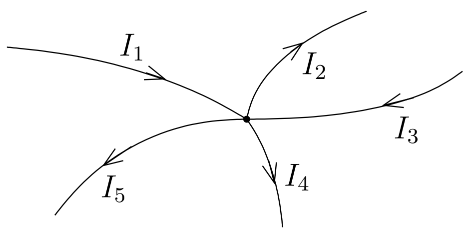
1) $U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + U_{DA} = 0\,\text{V}$.

2) $U_{BE} + U_{EF} + U_{FC} + U_{CB} = 0\,\text{V}$.

3) $U_{AE} + U_{EC} + U_{CA} = 0\,\text{V}$.

2) La charge est conservée.

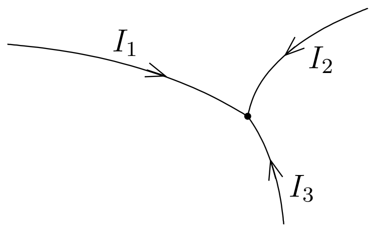
   Cas d'un noeud dans un circuit :



$$I_1 + I_3 = I_2 + I_4 + I_5\,.$$

La somme des courants entrant est égale à la somme des courants sortant.

Remarque :
Si on ne connaît pas le sens d'un courant, on choisit un sens positif et I peut alors être positif ou négatif.



$$I_1 + I_2 + I_3 = 0\,.$$

8.4 Puissance électrique

La puissance électrique est une variation d'énergie par unité de temps :

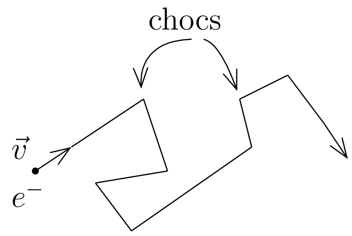
$$P = \frac{dE}{dt}\,, \qquad \text{unité : J}\,\text{s}^{-1} = \text{W (“Watt”)}.$$

La puissance électrique fournie à un dispositif de bornes A et B (ex. : circuit électrique, ampoule, moteur) est l'énergie par unité de temps permettant d'avoir un courant électrique I entre A et B.

$$P = U_{AB}\, I\,.$$

8.5 Résistance d'un conducteur

Dans un conducteur, un électron accéléré par une force $\vec{F}^{\text{élec.}} = q\vec{E}$ est freiné à cause des chocs avec les atomes et les autres électrons.



L'électron avance avec une vitesse moyenne d'environ 0.5 mm s^{-1}.

8.5.1 Loi d'Ohm

L'expérience montre que dans la plupart des conducteurs le courant est proportionnel à la tension

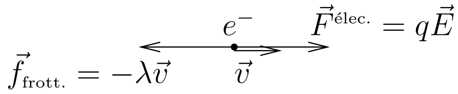
$$U = RI\,, \qquad \text{(loi d'Ohm)}$$

où U est la tension aux bornes du conducteur, I est le courant traversant ce dernier, et R est la **résistance du conducteur** (unité : VA^{-1} = Ω, “ohm”)

Remarque : Plus la résistance est faible, plus les électrons se déplacent facilement et plus le courant est élevé.

8.5.2 Modèle de la résistance d'un conducteur

On suppose une force de frottement proportionnelle à la vitesse des électrons :



En admettant une vitesse des électrons constante (et donc une accélération nulle),

$$-\lambda\vec{v} - e\vec{E} \cong \vec{0}\,,$$

il vient, en norme,

$$v = uE\,, \qquad \text{où } u = \frac{e}{\lambda} \text{ est } \textbf{la mobilité}.$$

Dans un fil conducteur, on peut donc écrire $I = enSv = enSuE$. D'autre part, pour une longueur L et un champ électrique $||\vec{E}|| = E = \text{cste}$, on a $U = EL$, de sorte que

$$U = \frac{L}{enSu} I\,,$$

d'où

$$R = \underbrace{\frac{1}{enu}}_{\rho} \frac{L}{S} = \rho \frac{L}{S}\,.$$

Résistivité :

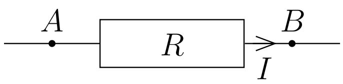
$$\rho = \frac{1}{enu}\,, \quad \text{unité : } \Omega\,\text{m}.$$

Remarques :

- Plus le conducteur est long, plus sa résistance est grande.
- Plus le conducteur est épais, plus sa résistance est faible.

8.5.3 Effet Joule

En raison de la résistance, la puissance électrique fournie au conducteur est dissipée en chaleur :

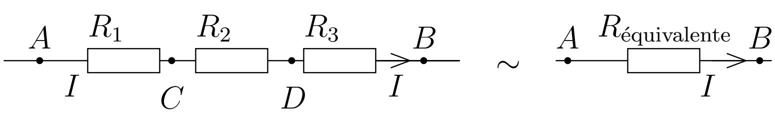


$$P_{\text{Joule}} = RI^2.$$

8.5.4 Groupement de résistances

On cherche à regrouper plusieurs résistances pour obtenir une résistance équivalente.

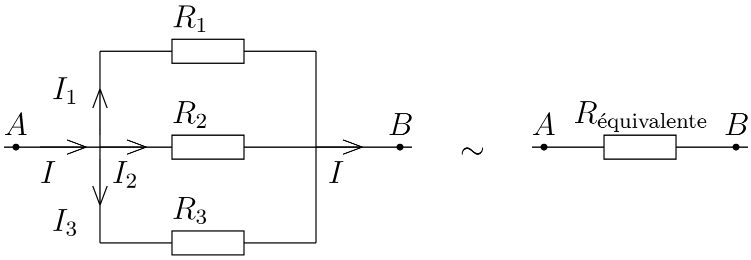
1) Branchement en série de trois résistances :



$$R_{\text{équivalente}} = R_1 + R_2 + R_3\,.$$

Le branchement en série augmente donc la résistance.

2) Branchement en parallèle de trois résistances :



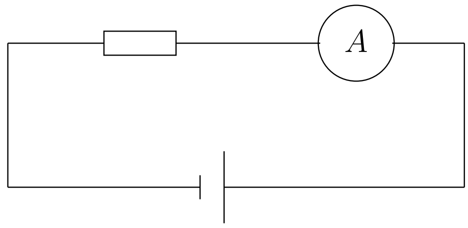
$$\frac{1}{R_{\text{équivalente}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \,.$$

Le branchement en parallèle diminue donc la résistance.

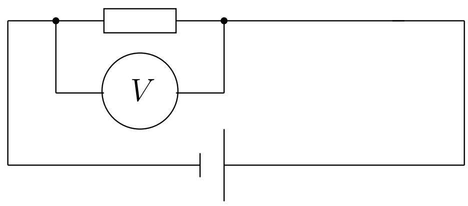
8.6 Ampèremètre et voltmètre

L'**ampèremètre** mesure des courants alors que le **voltmètre** mesure des tensions.

Pour mesurer le courant traversant un élément d'un circuit, on doit insérer l'ampèremètre en série avec cet élément. La résistance de l'ampèremètre doit être la plus petite possible.



Pour mesurer la tension aux bornes d'un élément d'un circuit, on doit insérer le voltmètre en parallèle avec cet élément. La résistance du voltmètre doit être la plus grande possible.



9 Magnétostatique

9.1 Force de Lorentz et champ magnétique

La force que subit une particule chargée en mouvement au voisinage d'un aimant ou d'un fil parcouru par un courant est appelée **force de Lorentz** :

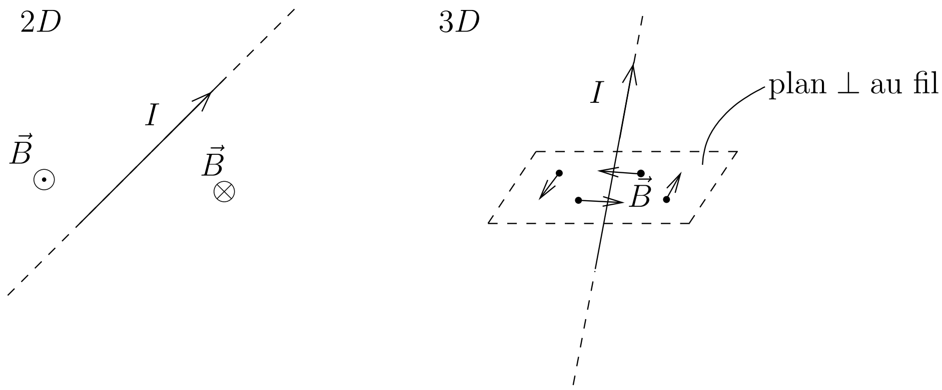
$$\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B} \,,$$

où q est la charge de la particule, $\vec{v}$ sa vitesse et $\vec{B}$ un vecteur dépendant de l'aimant ou du courant dans le fil, ainsi que de l'endroit $\vec{r}$ où se trouve la charge q (voir exemple ci-dessous).

Remarque : La force de Lorentz ne travaille pas.

Le champ vectoriel $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$ est le **champ magnétique** à l'endroit $\vec{r}$.
Unité : $\dfrac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \text{T}$ ("tesla").

Exemple : Cas d'un fil rectiligne infini parcouru par un courant I



Par symétrie,

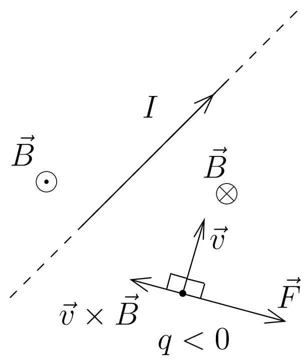
- $\vec{B}$ est perpendiculaire au fil ;
- les lignes de champ sont des cercles perpendiculaires au fil et centrés sur le fil ;
- $||\vec{B}||$ ne dépend que de la distance entre le fil et l'endroit où l'on mesure $\vec{B}$.

Le sens de $\vec{B}$ est donné par la règle du tire-bouchon : en tournant dans le sens indiqué par $\vec{B}$, on avance selon I. L'intensité $||\vec{B}||$ de $\vec{B}$ a quant à elle pour expression

$$B(d) = \frac{\mu_0 I}{2\pi d},$$

où $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{V\,s\,A^{-1}m^{-1}}$ est une constante appelée **perméabilité magnétique du vide** et d représente la distance entre le fil et l'endroit où l'on mesure $\vec{B}$.

Pour une charge q à vitesse $\vec{v}$:



9.1.1 Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique

a) Cas d'un champ magnétique uniforme ($\vec{B} = \overrightarrow{\text{cste}}$)

  i) Si $\vec{v} \perp \vec{B}$: mouvement circulaire uniforme de rayon $R = \dfrac{mv}{|q|B}$.

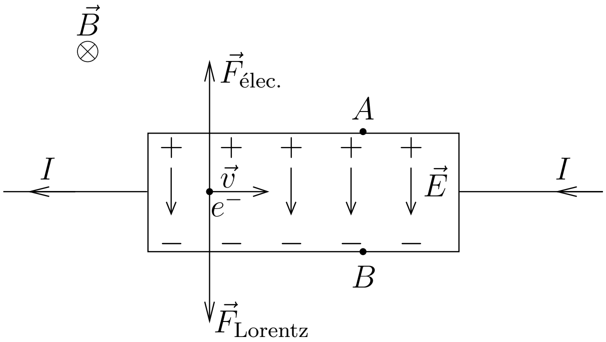
  ii) Si $\vec{v}$ est quelconque : trajectoire hélicoïdale, ayant comme axe une ligne du champ magnétique $\vec{B}$.

b) Cas d'un champ magnétique produit par un fil rectiligne infini

Si la vitesse de la particule est parallèle au plan formé par la particule et le fil rectiligne, cette dernière reste toujours dans le même plan et sa trajectoire a un rayon de courbure grand loin du fil et petit proche du fil.

9.1.2 Effet Hall

Un courant dans une feuille métallique plongée dans un champ magnétique $\vec{B}$ induit une tension transversale.



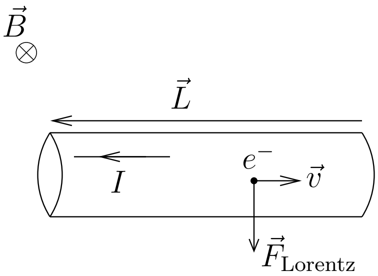
Sous l'effet de $\vec{F}_{\text{Lorentz}}$, les charges se séparent jusqu'à ce que $\vec{F}_{\text{élec.}}$ (due au champ électrique crée par les charges déplacées) compense exactement la force magnétique :

$$q\,(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})=\vec{0} \quad\Rightarrow\quad \vec{E}=-\vec{v}\times\vec{B}\,.$$

Il apparaît donc une tension transversale U_{AB}.

9.2 Force de Laplace

Considérons un fil de longueur $L=||\vec{L}||$, parcouru par un courant I et plongé dans un champ $\vec{B}$.



Les électrons de conduction subissent $\vec{F}_{\text{Lorentz}}$ et appuient sur le fil. Ainsi, un fil parcouru par un courant dans un champ magnétique subit la **force de Laplace**

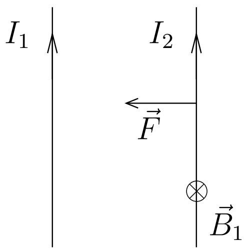
$$\vec{F}=I\vec{L}\times\vec{B}\,,$$

où $\vec{L}$ est le vecteur donnant la longueur du fil et le sens du courant.

9.2.1 Deux fils parallèles parcourus par des courants

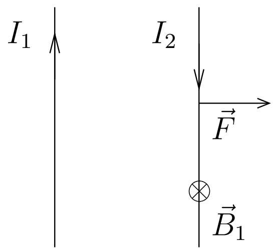
Le courant I_2 se trouve dans le champ $\vec{B}_1$ produit par le courant I_1.

a) Courants de même sens



Les fils se rapprochent.

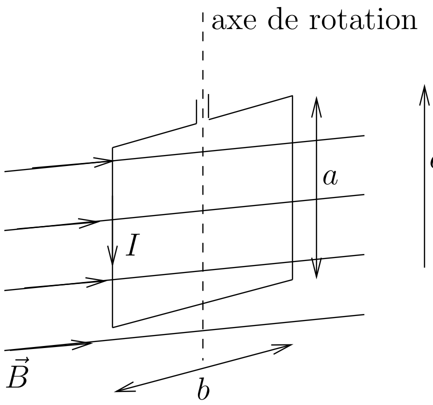
b) Courants de sens opposé

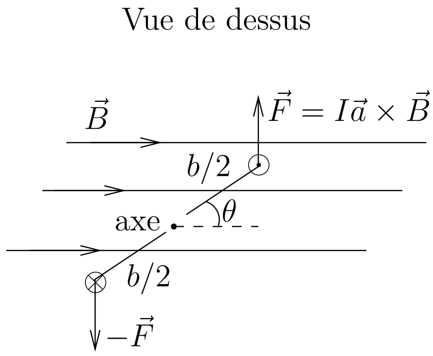


Les fils s'éloignent.

9.2.2 Galvanomètre, moteur électrique

Le **galvanomètre** est un cadre rectangulaire de côtés a et b, mobile autour d'un axe et plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$. Lorsque le cadre est parcouru par un courant I, ce dernier subit un couple de forces de Laplace.





Lorsque le couple est compensé par un couple de rappel de constante C, la mesure de l'angle d'équilibre θ permet de déduire le courant traversant le cadre :

$$I = \frac{C\theta}{abB\cos\theta}\,.$$

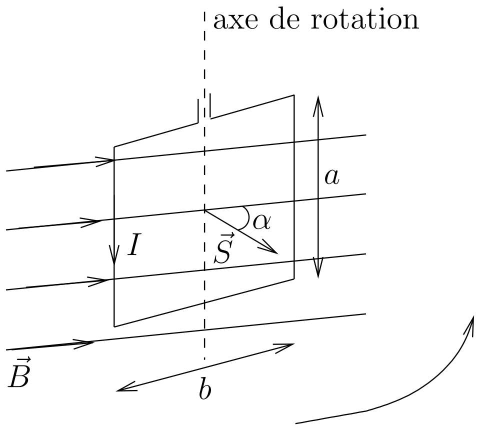
Le **moteur électrique à courant continu** est basé sur le même principe que le galvanomètre si ce n'est que le couple de rappel n'existe pas et que le sens du courant est inversé périodiquement de manière à ce que le couple soit toujours dans le même sens.

9.3 Moment dipolaire magnétique, aimants

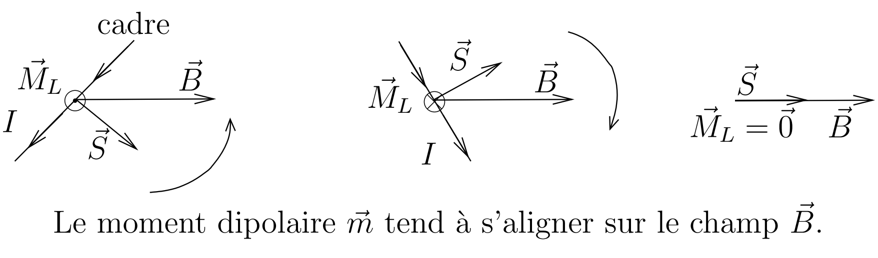
On définit le **moment dipolaire magnétique** d'un cadre par

$$\vec{m} = I\vec{S}\,,$$

où $\vec{S}$ est le vecteur normal au cadre, de norme ab (surface définie par le cadre) et de sens donné par la règle du tire-bouchon selon le sens du courant.

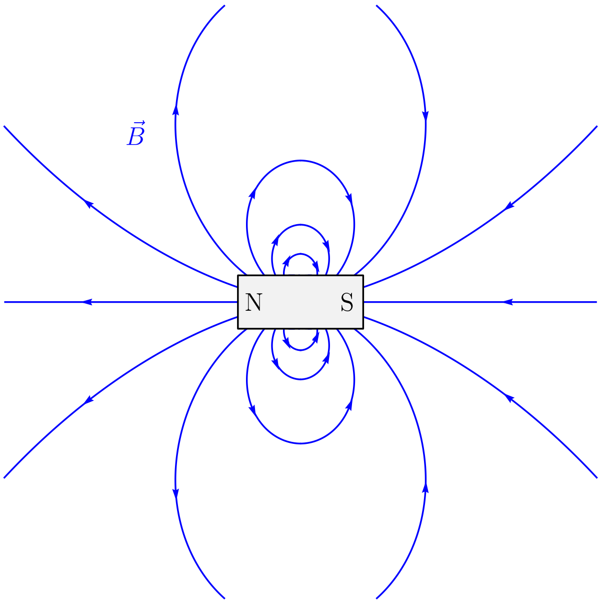


Rotation induite par $\vec{M}_L = \vec{m} \times \vec{B}$

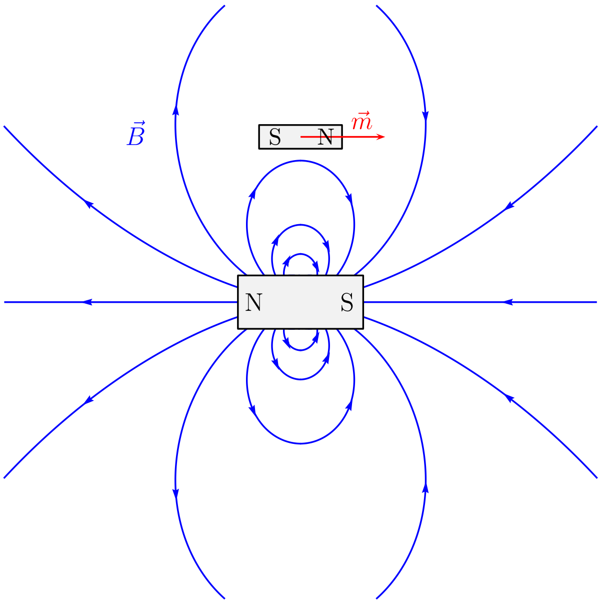


Le moment dipolaire $\vec{m}$ tend à s'aligner sur le champ $\vec{B}$.

Exemple : un **aimant** peut être vu comme formé de petits courants permanents : il crée un champ $\vec{B}$.



Un second aimant peut être vu comme un dipôle magnétique (moment dipolaire) $\vec{m}$ s'alignant sur le champ $\vec{B}$ produit par le premier aimant :



Un aimant possède toujours deux pôles. Deux pôles similaires se repoussent et deux pôles différents s'attirent.

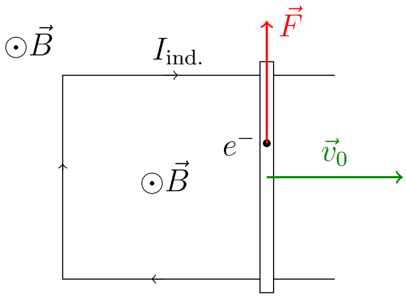
9.4 Induction magnétique

Rappel : on peut créer un champ $\vec{B}$ avec un courant I .
Peut-on créer un courant avec un champ magnétique ? Oui,

- soit en déplaçant le fil conducteur dans le champ $\vec{B}$
- soit en faisant varier $\vec{B}$ dans le temps.

1) Force de Lorentz

Dans un champ magnétique $\vec{B}$ constant, considérons un cadre en ⊏ fermé par une tige mobile déplacée à vitesse $\vec{v}_0$:



Les électrons de la tige subissent la force de Lorentz

$$\vec{F} = (-e)\,\vec{v}_0 \times \vec{B}$$

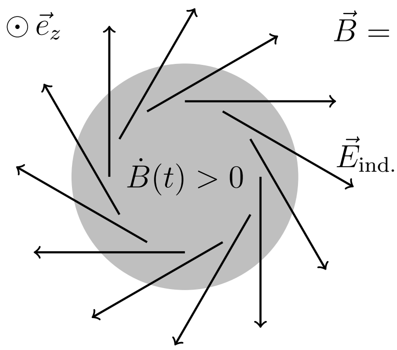
et induisent un courant I_{ind}, ceci sans champ électrique.

Remarque : le courant induit crée un champ induit $\vec{B}_{\text{ind}}$. A l'intérieur du cadre, ce champ est de sens contraire au champ $\vec{B}$: il y a une opposition à la variation du flux du champ magnétique à travers le cadre (loi de Lenz).

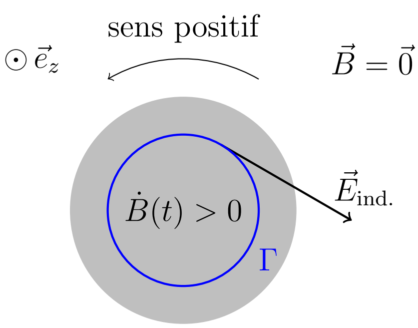
2) **Loi de Faraday :** En chaque point de l'espace (même dans le vide), un champ magnétique $\vec{B}(t)$ variable dans le temps induit un champ électrique tourbillonnant $\vec{E}_{\text{ind}}(t)$.

Exemple :

On considère dans l'espace une région en forme de cylindre infini d'axe $\vec{e}_z$. A l'intérieur du cylindre règne un champ magnétique uniforme mais dépendant du temps $\vec{B} = B(t)\vec{e}_z$, alors qu'à l'extérieur il est nul.
Si $\vec{B}$ augmente selon $\vec{e}_z$ ($\dot{B}(t) > 0$), il apparaît avec cette variation un champ électrique induit $\vec{E}_{\text{ind.}}$.



En considérant un chemin fermé Γ dans le champ magnétique variable $\vec{B}(t)$, on obtient une circulation du champ électrique induit $\vec{E}_{\text{ind}}$ non nulle (contrairement à la tension en électrostatique). Cette circulation est appelée « force » (par unité de charge) électro-motrice $\mathcal{E}_{\text{ém}}$.



Selon la loi de Faraday, elle est donnée par

$$\mathcal{E}_{\text{ém}} = \oint_\Gamma \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{r} = -\dot{\vec{B}} \cdot \vec{S}\,,$$

le sens du vecteur de surface $\vec{S}$ (c'est-à-dire $\vec{e}_z$) étant donné par le sens de parcours de Γ (règle du tire-bouchon).