

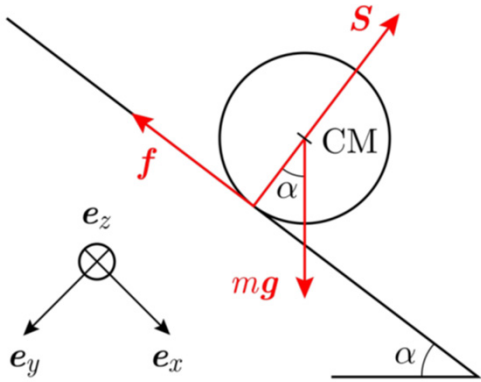
# Leçon 21 – 13/05/2025

## 6. Rotation en deux dimensions

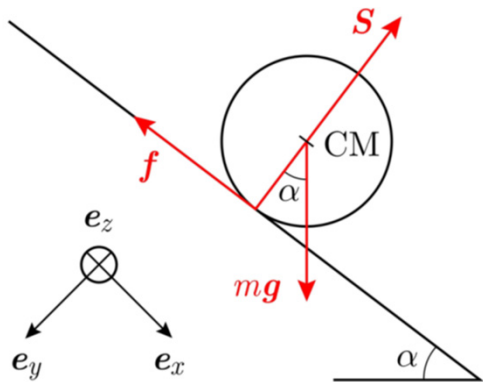
- 6.5 Référentiel du centre de masse
- 6.6 Théorème de l'énergie cinétique d'un solide

### 6.5.5 *Cylindre roulant sans glisser*

---



### 6.5.5 Cylindre roulant sans glisser

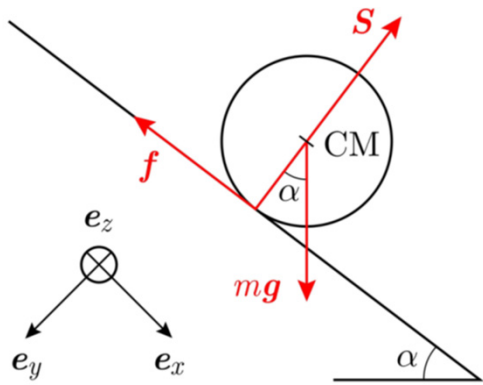


- Objet : cylindre
- Forces : poids  $mg$ , soutien  $S$ , frottement  $f$
- Newton :  $mg + S + f = ma$

Selon  $e_x$  :  $mg \sin \alpha - f = ma$  (6.58)

Selon  $e_y$  :  $mg \cos \alpha - S = 0$

### 6.5.5 Cylindre roulant sans glisser



- Objet : cylindre
- Forces : poids  $m\mathbf{g}$ , soutien  $\mathbf{S}$ , frottement  $\mathbf{f}$
- Newton :  $m\mathbf{g} + \mathbf{S} + \mathbf{f} = m\mathbf{a}$

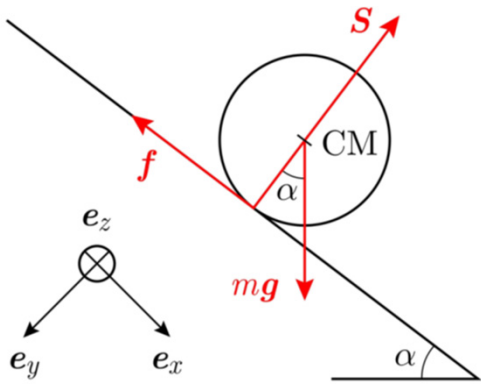
Selon  $\mathbf{e}_x$  :  $m g \sin \alpha - f = m a$  (6.58)

Selon  $\mathbf{e}_y$  :  $m g \cos \alpha - S = 0$

- Rotation (par rapport au centre de masse) :  $\mathbf{M}_{\text{CM}}^{\text{ext}} = \mathbf{M}_{\text{CM}}(\mathbf{f}) = I_{\text{CM}} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{CM}}$

Selon  $\mathbf{e}_z$  :  $R f = I_{\text{CM}} \dot{\omega}_{\text{CM}}$  (6.59)

### 6.5.5 Cylindre roulant sans glisser



- Objet : cylindre
- Forces : poids  $m\mathbf{g}$ , soutien  $\mathbf{S}$ , frottement  $\mathbf{f}$
- Newton :  $m\mathbf{g} + \mathbf{S} + \mathbf{f} = m\mathbf{a}$

Selon  $\mathbf{e}_x$  :  $m g \sin \alpha - f = m a$  (6.58)

Selon  $\mathbf{e}_y$  :  $m g \cos \alpha - S = 0$

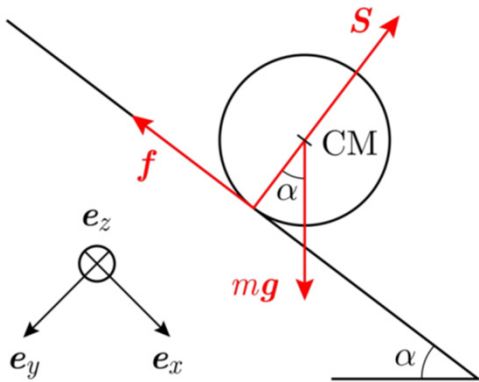
- Rotation (par rapport au centre de masse) :  $\mathbf{M}_{\text{CM}}^{\text{ext}} = \mathbf{M}_{\text{CM}}(\mathbf{f}) = I_{\text{CM}} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{CM}}$

Selon  $\mathbf{e}_z$  :  $R f = I_{\text{CM}} \dot{\omega}_{\text{CM}}$  (6.59)

- Liaison (le cylindre roule sans glisser : vitesse du point de contact nulle) :

$v = R \omega_{\text{CM}} \Rightarrow a = R \dot{\omega}_{\text{CM}}$  (6.60)

## 6.5.5 Cylindre roulant sans glisser



- Objet : cylindre
- Forces : poids  $mg$ , soutien  $S$ , frottement  $f$
- Newton :  $mg + S + f = ma$

Selon  $e_x$  :  $mg \sin \alpha - f = ma$  (6.58)

Selon  $e_y$  :  $mg \cos \alpha - S = 0$

- Rotation (par rapport au centre de masse) :  $M_{CM}^{ext} = M_{CM}(f) = I_{CM} \dot{\omega}_{CM}$

Selon  $e_z$  :  $Rf = I_{CM} \dot{\omega}_{CM}$  (6.59)

- Liaison (le cylindre roule sans glisser : vitesse du point de contact nulle) :

$v = R\omega_{CM} \Rightarrow a = R\dot{\omega}_{CM}$  (6.60)

- Résolution : Soit  $\omega \equiv \omega_{CM}$  alors  $a = R\dot{\omega} \Rightarrow a_{\text{cyl. plein}} > a_{\text{cyl. creux}}$  (masse identique)

$$\left. \begin{array}{l} mg \sin \alpha - f = mR\dot{\omega} \\ Rf = I_{CM} \dot{\omega} \end{array} \right\} \Rightarrow mgR \sin \alpha = (mR^2 + I_{CM}) \dot{\omega} \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{mgR \sin \alpha}{mR^2 + I_{CM}} \Rightarrow a = \frac{g \sin \alpha}{1 + I_{CM}/mR^2}$$

## 6.5.5 *Cylindre roulant sans glisser*

---

Expérience :



## 6.5.5 *Cylindre roulant sans glisser*

---

Expérience : Cylindres plein et creux



## 6.5.5 *Cylindre roulant sans glisser*

---

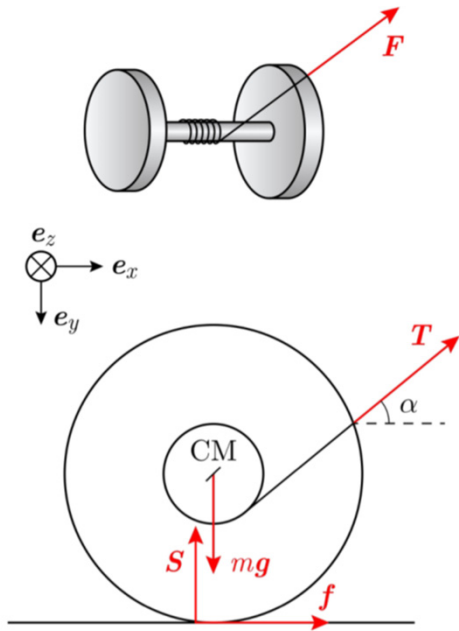
Expérience : Cylindres plein et creux



- Deux cylindres de masse et de rayon égaux sont lâchés initialement au repos et roulent sans glisser sur un plan incliné. Le cylindre plein a un moment d'inertie plus faible et donc une accélération plus grande que le cylindre creux. Il arrive donc en premier en bas du plan incliné.

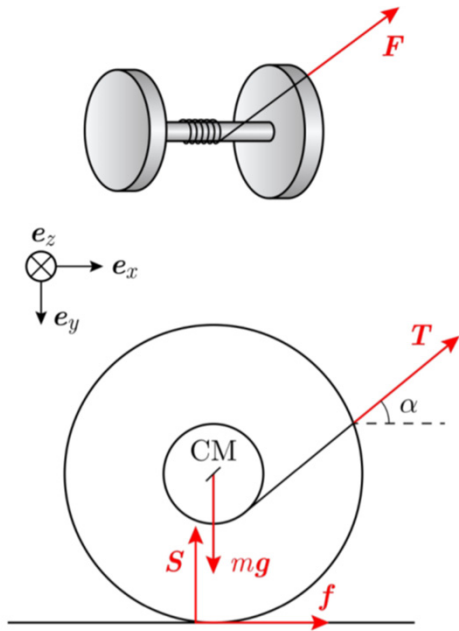
## 6.5.6 Haltère tiré par un fil

---



Remarque :

## 6.5.6 Haltère tiré par un fil

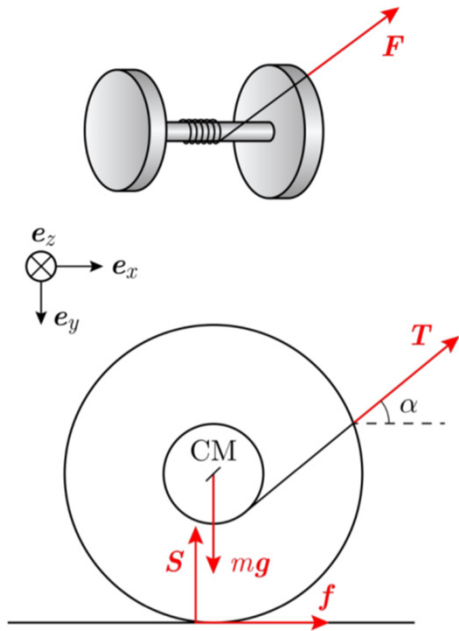


- L'haltère est formé d'une poignée, i.e., d'un cylindre de rayon  $r$ , et de deux disques de rayon  $R$  (où  $R \gg r$ ). Son moment d'inertie est la somme des moments d'inertie.

$$I_{\text{CM}} = I_{\text{CM}}(\text{poignée}) + 2I_{\text{CM}}(\text{disque})$$

Remarque :

## 6.5.6 Haltère tiré par un fil



- L'haltère est formé d'une poignée, i.e., d'un cylindre de rayon  $r$ , et de deux disques de rayon  $R$  (où  $R \gg r$ ). Son moment d'inertie est la somme des moments d'inertie.

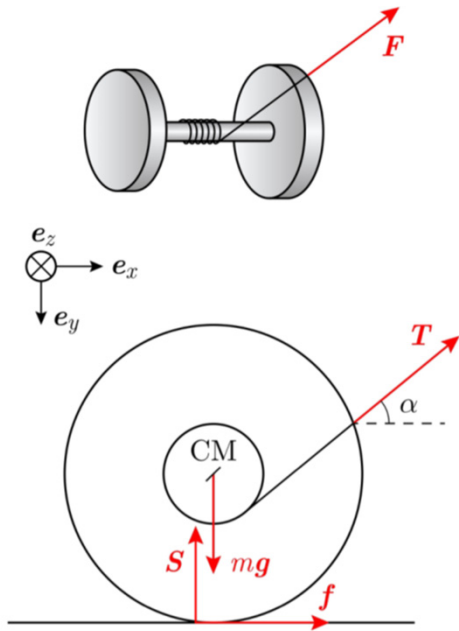
$$I_{\text{CM}} = I_{\text{CM}}(\text{poignée}) + 2I_{\text{CM}}(\text{disque})$$

- Objet : haltère
- Forces : poids  $mg$ , soutien  $S$ , frottement  $f$ , tension  $T$
- Newton :

$$mg + S + f + T = ma_{\text{CM}} \quad (6.61)$$

Remarque :

## 6.5.6 Haltère tiré par un fil



- L'haltère est formé d'une poignée, i.e., d'un cylindre de rayon  $r$ , et de deux disques de rayon  $R$  (où  $R \gg r$ ). Son moment d'inertie est la somme des moments d'inertie.

$$I_{\text{CM}} = I_{\text{CM}}(\text{poignée}) + 2I_{\text{CM}}(\text{disque})$$

- Objet : haltère
- Forces : poids  $mg$ , soutien  $S$ , frottement  $f$ , tension  $T$
- Newton :

$$mg + S + f + T = ma_{\text{CM}} \quad (6.61)$$

Remarque :

On ne peut pas a priori donner le sens du frottement  $f$  qui est horizontal  $f = f\mathbf{e}_x$  où  $f \in \mathbb{R}$

Selon  $\mathbf{e}_x$  :

$$f + T\cos\alpha = ma_{\text{CM}} \quad (6.62)$$

Selon  $\mathbf{e}_y$  :

$$mg - S - T\sin\alpha = 0 \quad (6.63)$$

### ***6.5.6 Haltère tiré par un fil***

---

### 6.5.6 Haltère tiré par un fil

---

- Rotation (par rapport au centre de masse) :  $\mathbf{M}_{\text{CM}}^{\text{ext}} = \mathbf{M}_{\text{CM}}(\mathbf{f}) + \mathbf{M}_{\text{CM}}(\mathbf{T}) = I_{\text{CM}} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{CM}}$

Selon  $\mathbf{e}_z$  :  $-Rf - rT = I_{\text{CM}} \dot{\omega}_{\text{CM}}$  (6.64)

## 6.5.6 Haltère tiré par un fil

---

- Rotation (par rapport au centre de masse) :  $\mathbf{M}_{\text{CM}}^{\text{ext}} = \mathbf{M}_{\text{CM}}(\mathbf{f}) + \mathbf{M}_{\text{CM}}(\mathbf{T}) = I_{\text{CM}} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{CM}}$

Selon  $\mathbf{e}_z$  :  $-Rf - rT = I_{\text{CM}} \dot{\omega}_{\text{CM}}$  (6.64)

- Liaison (l'haltère roule sans glisser : vitesse du point de contact nulle) :

$$v_{\text{CM}} = R\omega_{\text{CM}} \Rightarrow a_{\text{CM}} = R\dot{\omega}_{\text{CM}}$$

## 6.5.6 Haltère tiré par un fil

- Rotation (par rapport au centre de masse) :  $\mathbf{M}_{\text{CM}}^{\text{ext}} = \mathbf{M}_{\text{CM}}(\mathbf{f}) + \mathbf{M}_{\text{CM}}(\mathbf{T}) = I_{\text{CM}} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{CM}}$

Selon  $\mathbf{e}_z$  :  $-Rf - rT = I_{\text{CM}} \dot{\omega}_{\text{CM}}$  (6.64)

- Liaison (l'haltère roule sans glisser : vitesse du point de contact nulle) :

$$v_{\text{CM}} = R\omega_{\text{CM}} \Rightarrow a_{\text{CM}} = R\dot{\omega}_{\text{CM}}$$

- Résolution : Soit  $\omega \equiv \omega_{\text{CM}}$  et  $a \equiv a_{\text{CM}} = R\dot{\omega}$

$$\left. \begin{array}{l} f + T\cos\alpha = mR\dot{\omega} \\ -Rf - rT = I_{\text{CM}}\dot{\omega} \end{array} \right\} \Rightarrow (R\cos\alpha - r)T = (mR^2 + I_{\text{CM}})\dot{\omega} \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{R\cos\alpha - r}{mR^2 + I_{\text{CM}}} T \text{ et } a = R\dot{\omega} = \frac{\cos\alpha - \frac{r}{R}}{m + \frac{I_{\text{CM}}}{R^2}} T \quad (6.65)$$

## 6.5.6 Haltère tiré par un fil

- Rotation (par rapport au centre de masse) :  $\mathbf{M}_{\text{CM}}^{\text{ext}} = \mathbf{M}_{\text{CM}}(\mathbf{f}) + \mathbf{M}_{\text{CM}}(\mathbf{T}) = I_{\text{CM}} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{CM}}$

Selon  $\mathbf{e}_z$  :  $-Rf - rT = I_{\text{CM}} \dot{\omega}_{\text{CM}}$  (6.64)

- Liaison (l'haltère roule sans glisser : vitesse du point de contact nulle) :

$$v_{\text{CM}} = R\omega_{\text{CM}} \Rightarrow a_{\text{CM}} = R\dot{\omega}_{\text{CM}}$$

- Résolution : Soit  $\omega \equiv \omega_{\text{CM}}$  et  $a \equiv a_{\text{CM}} = R\dot{\omega}$

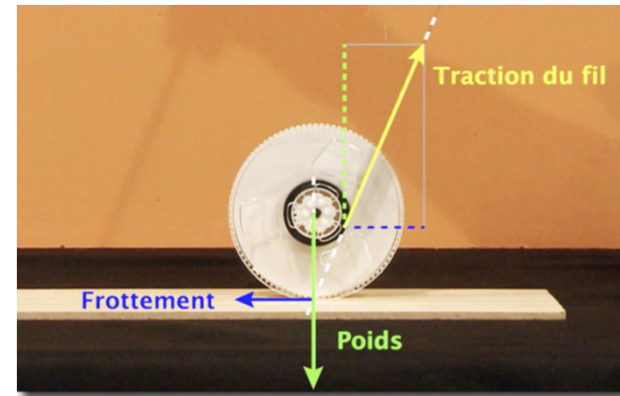
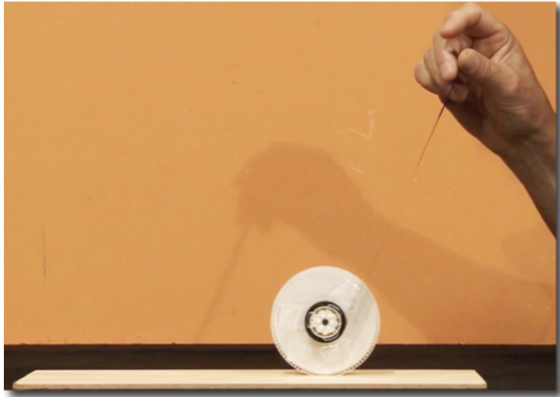
$$\left. \begin{array}{l} f + T\cos\alpha = mR\dot{\omega} \\ -Rf - rT = I_{\text{CM}}\dot{\omega} \end{array} \right\} \Rightarrow (R\cos\alpha - r)T = (mR^2 + I_{\text{CM}})\dot{\omega} \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{R\cos\alpha - r}{mR^2 + I_{\text{CM}}} T \text{ et } a = R\dot{\omega} = \frac{\cos\alpha - \frac{r}{R}}{m + \frac{I_{\text{CM}}}{R^2}} T \quad (6.65)$$

- Discussion :

- Si  $\cos\alpha > \frac{r}{R}$ , l'haltère accélère vers la droite ( $a > 0$ ).
- Si  $\cos\alpha < \frac{r}{R}$ , l'haltère accélère vers la gauche ( $a < 0$ ).
- Si  $\cos\alpha = \frac{r}{R}$ , l'haltère est immobile ( $a = 0$ ).

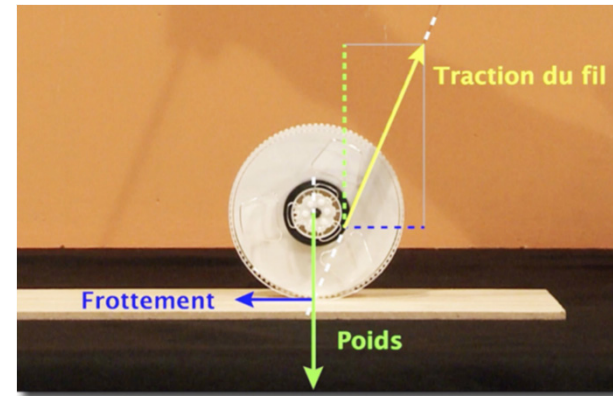
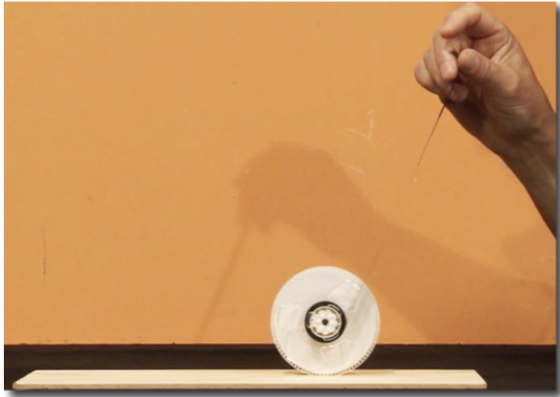
## 6.5.6 Haltère tiré par un fil

Expérience :



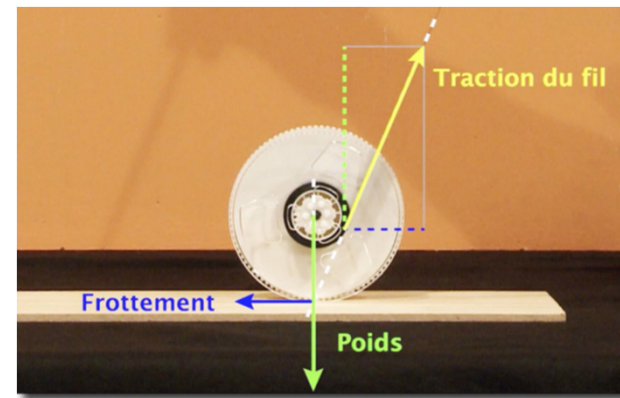
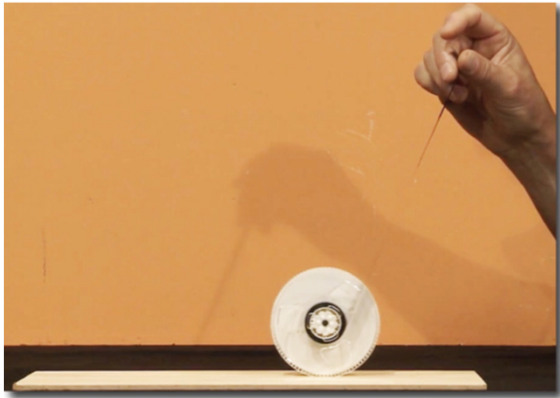
## 6.5.6 Haltère tiré par un fil

Expérience : Roulement d'une bobine tirée par un fil



## 6.5.6 Haltère tiré par un fil

Expérience : Roulement d'une bobine tirée par un fil



- Si l'angle  $\alpha$  entre le fil de la bobine et la verticale est tel que  $\alpha < \arccos(r/R)$ , la bobine se déplace vers la droite.
- Si  $\alpha > \arccos(r/R)$ , la bobine se déplace vers la gauche.
- Si  $\alpha = \arccos(r/R)$ , la bobine tourne sur place. Cet angle est tel que le fil se trouve dans le prolongement du point de contact entre la bobine et la surface horizontale.

---

## 6.6 Théorème de l'énergie cinétique d'un solide

## ***6.6.1 Théorème de l'énergie cinétique du centre de masse***

---

### 6.6.1 Théorème de l'énergie cinétique du centre de masse

---

- Le théorème de l'énergie cinétique associée au mouvement du centre de masse d'un corps d'une position initiale  $\mathbf{r}_1$  à une position finale  $\mathbf{r}_2$  s'écrit :

$$E_{\text{cin,CM}}(2) - E_{\text{cin,CM}}(1) = W_{1 \rightarrow 2}^{\text{ext}} \quad (6.66)$$

où  $E_{\text{cin,CM}} = \frac{1}{2} m v_{\text{CM}}^2$  et  $W_{1 \rightarrow 2}^{\text{ext}} = \int_1^2 \mathbf{F}^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r}_{\text{CM}}$   
avec  $\mathbf{F}^{\text{ext}}$  la résultante des forces extérieures.

## 6.6.1 Théorème de l'énergie cinétique du centre de masse

---

- Le théorème de l'énergie cinétique associée au mouvement du centre de masse d'un corps d'une position initiale  $\mathbf{r}_1$  à une position finale  $\mathbf{r}_2$  s'écrit :

$$E_{\text{cin,CM}}(2) - E_{\text{cin,CM}}(1) = W_{1 \rightarrow 2}^{\text{ext}} \quad (6.66)$$

où  $E_{\text{cin,CM}} = \frac{1}{2} m v_{\text{CM}}^2$  et  $W_{1 \rightarrow 2}^{\text{ext}} = \int_1^2 \mathbf{F}^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r}_{\text{CM}}$   
avec  $\mathbf{F}^{\text{ext}}$  la résultante des forces extérieures.

- La dérivée temporelle de l'énergie cinétique du centre de masse s'écrit :

$$\dot{E}_{\text{cin,CM}} = \mathbf{F}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v}_{\text{CM}} \quad (6.67)$$

## ***6.6.2 Théorème de l'énergie cinétique d'un corps***

---

## 6.6.2 Théorème de l'énergie cinétique d'un corps

---

- Un corps est constitué d'un ensemble de points matériels.
- L'énergie cinétique du corps s'écrit :

$$E_{\text{cin}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (6.68)$$

## 6.6.2 Théorème de l'énergie cinétique d'un corps

---

- Un corps est constitué d'un ensemble de points matériels.
- L'énergie cinétique du corps s'écrit :

$$E_{\text{cin}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (6.68)$$

- La variation d'énergie cinétique est due au travail des forces qui s'exercent sur chaque point matériel.

$$\dot{E}_{\text{cin}} = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v}_i + \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{int}} \cdot \mathbf{v}_i \quad (6.69)$$

Ainsi, 
$$dE_{\text{cin}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{int}} \cdot d\mathbf{r}_i = \delta W^{\text{ext}} + \delta W^{\text{int}} \quad (6.70)$$

## 6.6.2 Théorème de l'énergie cinétique d'un corps

---

- Un corps est constitué d'un ensemble de points matériels.
- L'énergie cinétique du corps s'écrit :

$$E_{\text{cin}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (6.68)$$

- La variation d'énergie cinétique est due au travail des forces qui s'exercent sur chaque point matériel.

$$\dot{E}_{\text{cin}} = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v}_i + \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{int}} \cdot \mathbf{v}_i \quad (6.69)$$

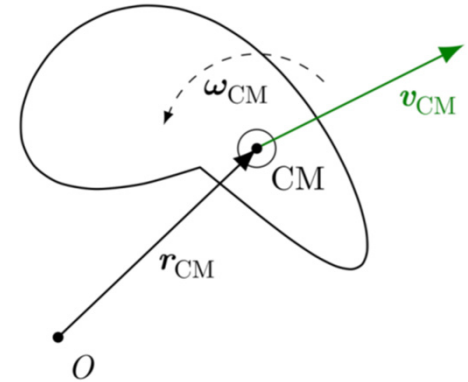
Ainsi, 
$$dE_{\text{cin}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{int}} \cdot d\mathbf{r}_i = \delta W^{\text{ext}} + \delta W^{\text{int}} \quad (6.70)$$

- La variation d'énergie cinétique (totale) du corps est donnée par le travail des forces intérieures et extérieures.

$$E_{\text{cin}}(2) - E_{\text{cin}}(1) = W_{1 \rightarrow 2}^{\text{ext}} + W_{1 \rightarrow 2}^{\text{int}} \quad (6.71)$$

### 6.6.3 Énergie cinétique d'un solide indéformable

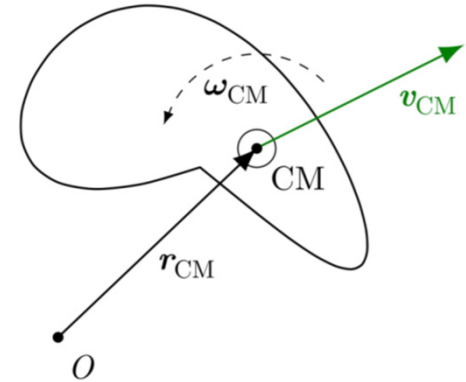
---



### 6.6.3 Énergie cinétique d'un solide indéformable

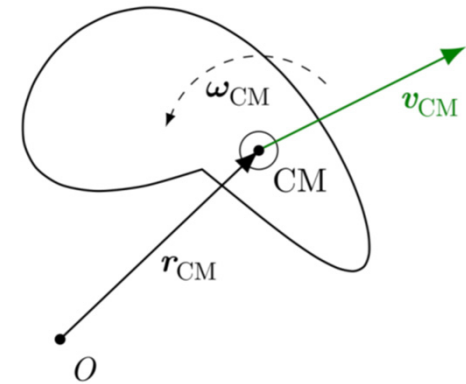
---

- Le mouvement d'un solide indéformable est caractérisé par la vitesse  $\mathbf{v}_{\text{CM}}$  du CM et la vitesse angulaire de rotation autour du centre de masse  $\omega_{\text{CM}}$ .



### 6.6.3 Énergie cinétique d'un solide indéformable

- Le mouvement d'un solide indéformable est caractérisé par la vitesse  $\mathbf{v}_{\text{CM}}$  du CM et la vitesse angulaire de rotation autour du centre de masse  $\omega_{\text{CM}}$ .



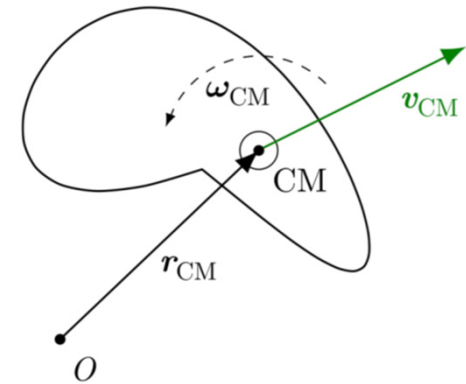
- La vitesse d'un point matériel du solide s'écrit :

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{\text{CM}} + \mathbf{v}_i' = \mathbf{v}_{\text{CM}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{CM}} \times \mathbf{r}_i' \quad \text{où} \quad \mathbf{v}_i' = \boldsymbol{\omega}_{\text{CM}} \times \mathbf{r}_i'$$

car le point matériel de masse  $m_i$  a un mouvement circulaire autour du centre de masse.

### 6.6.3 Énergie cinétique d'un solide indéformable

- Le mouvement d'un solide indéformable est caractérisé par la vitesse  $\mathbf{v}_{\text{CM}}$  du CM et la vitesse angulaire de rotation autour du centre de masse  $\boldsymbol{\omega}_{\text{CM}}$ .



- La vitesse d'un point matériel du solide s'écrit :

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{\text{CM}} + \mathbf{v}_i' = \mathbf{v}_{\text{CM}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{CM}} \times \mathbf{r}_i' \quad \text{où} \quad \mathbf{v}_i' = \boldsymbol{\omega}_{\text{CM}} \times \mathbf{r}_i'$$

car le point matériel de masse  $m_i$  a un mouvement circulaire autour du centre de masse.

- Son énergie cinétique s'écrit :

$$E_{\text{cin}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v}_{\text{CM}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{CM}} \times \mathbf{r}_i')^2$$

### *6.6.3 Énergie cinétique d'un solide indéformable*

---

### 6.6.3 Énergie cinétique d'un solide indéformable

---

$$\begin{aligned}\text{Ainsi, } E_{\text{cin}} &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left( v_{\text{CM}}^2 + 2 \mathbf{v}_{\text{CM}} \cdot (\boldsymbol{\omega}_{\text{CM}} \times \mathbf{r}_i') + \omega_{\text{CM}}^2 r_i'^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} m v_{\text{CM}}^2 + \mathbf{v}_{\text{CM}} \cdot \left( \boldsymbol{\omega}_{\text{CM}} \times \underbrace{m \mathbf{r}_{\text{CM}}'}_{=0} \right) + \frac{1}{2} \left( \underbrace{\sum_i m_i r_i'^2}_{=I_{\text{CM}}} \right) \omega_{\text{CM}}^2 \\ &= \frac{1}{2} m v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega_{\text{CM}}^2\end{aligned}$$

### 6.6.3 Énergie cinétique d'un solide indéformable

---

$$\begin{aligned}\text{Ainsi, } E_{\text{cin}} &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (v_{\text{CM}}^2 + 2\mathbf{v}_{\text{CM}} \cdot (\boldsymbol{\omega}_{\text{CM}} \times \mathbf{r}_i') + \omega_{\text{CM}}^2 r_i'^2) \\ &= \frac{1}{2} m v_{\text{CM}}^2 + \mathbf{v}_{\text{CM}} \cdot \left( \boldsymbol{\omega}_{\text{CM}} \times \underbrace{m \mathbf{r}_{\text{CM}}'}_{=0} \right) + \frac{1}{2} \left( \underbrace{\sum_i m_i r_i'^2}_{=I_{\text{CM}}} \right) \omega_{\text{CM}}^2 \\ &= \frac{1}{2} m v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega_{\text{CM}}^2\end{aligned}$$

- L'énergie cinétique est la somme de l'énergie cinétique du centre de masse  $E_{\text{cin,CM}}$  et de l'énergie cinétique de rotation propre  $E_{\text{cin,rot}}$  du solide autour du centre de masse :

$$E_{\text{cin}} = E_{\text{cin,CM}} + E_{\text{cin,rot}} \quad (6.72)$$

où  $E_{\text{cin,CM}} = \frac{1}{2} m v_{\text{CM}}^2 \quad (6.73)$  et  $E_{\text{cin,rot}} = \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega_{\text{CM}}^2 \quad (6.74)$

## *6.6.4 Théorème de l'énergie cinétique pour un solide*

---

## 6.6.4 Théorème de l'énergie cinétique pour un solide

---

- La dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un solide indéformable s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{E}_{\text{cin}} &= \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v}_i + \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{int}} \cdot \mathbf{v}_i \\ &= \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v}_i + \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{int}} \cdot (\mathbf{v}_{\text{CM}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{CM}} \times \mathbf{r}_i') \\ &= \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v}_i + \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{int}} \cdot \mathbf{v}_{\text{CM}} + \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{int}} \cdot (\boldsymbol{\omega}_{\text{CM}} \times \mathbf{r}_i')\end{aligned}$$

## 6.6.4 Théorème de l'énergie cinétique pour un solide

---

- La dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un solide indéformable s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{E}_{\text{cin}} &= \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v}_i + \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{int}} \cdot \mathbf{v}_i \\ &= \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v}_i + \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{int}} \cdot (\mathbf{v}_{\text{CM}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{CM}} \times \mathbf{r}_i') \\ &= \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v}_i + \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{int}} \cdot \mathbf{v}_{\text{CM}} + \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{int}} \cdot (\boldsymbol{\omega}_{\text{CM}} \times \mathbf{r}_i')\end{aligned}$$

- Ainsi, comme  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$

$$\begin{aligned}\dot{E}_{\text{cin}} &= \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v}_i + \left( \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{int}} \right) \cdot \mathbf{v}_{\text{CM}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{CM}} \cdot \left( \sum_i \mathbf{r}_i' \times \mathbf{F}_i^{\text{int}} \right) \\ &= \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v}_i + \underbrace{\sum_i \mathbf{F}_i^{\text{int}}}_{=0} \cdot \mathbf{v}_{\text{CM}} + \underbrace{\sum_i \mathbf{r}_i' \times \mathbf{F}_i^{\text{int}}}_{=0} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{CM}} \\ &= \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v}_i\end{aligned}$$

## *6.6.4 Théorème de l'énergie cinétique pour un solide*

---

Remarque :

## 6.6.4 Théorème de l'énergie cinétique pour un solide

---

- La variation de l'énergie cinétique est due au travail des forces extérieures  $\mathbf{F}_i^{\text{ext}}$  qui s'exercent sur chaque point matériel  $i$  :

$$\dot{E}_{\text{cin}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v}_i \quad (6.75)$$

Remarque :

## 6.6.4 Théorème de l'énergie cinétique pour un solide

---

- La variation de l'énergie cinétique est due au travail des forces extérieures  $\mathbf{F}_i^{\text{ext}}$  qui s'exercent sur chaque point matériel  $i$  :

$$\dot{E}_{\text{cin}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v}_i \quad (6.75)$$

- On multiplie cette relation par l'intervalle de temps infinitésimal  $dt$ . Ainsi,

$$dE_{\text{cin}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r}_i = \delta W^{\text{ext}} \quad (6.76)$$

Remarque :

## 6.6.4 Théorème de l'énergie cinétique pour un solide

---

- La variation de l'énergie cinétique est due au travail des forces extérieures  $\mathbf{F}_i^{\text{ext}}$  qui s'exercent sur chaque point matériel  $i$  :

$$\dot{E}_{\text{cin}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v}_i \quad (6.75)$$

- On multiplie cette relation par l'intervalle de temps infinitésimal  $dt$ . Ainsi,

$$dE_{\text{cin}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r}_i = \delta W^{\text{ext}} \quad (6.76)$$

- Par intégration de (1) à (2), on obtient le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_{\text{cin}} = E_{\text{cin}}(2) - E_{\text{cin}}(1) = W_{1 \rightarrow 2}^{\text{ext}} = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r}_i \quad (6.77)$$

Remarque :

## 6.6.4 Théorème de l'énergie cinétique pour un solide

---

- La variation de l'énergie cinétique est due au travail des forces extérieures  $\mathbf{F}_i^{\text{ext}}$  qui s'exercent sur chaque point matériel  $i$  :

$$\dot{E}_{\text{cin}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v}_i \quad (6.75)$$

- On multiplie cette relation par l'intervalle de temps infinitésimal  $dt$ . Ainsi,

$$dE_{\text{cin}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r}_i = \delta W^{\text{ext}} \quad (6.76)$$

- Par intégration de (1) à (2), on obtient le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_{\text{cin}} = E_{\text{cin}}(2) - E_{\text{cin}}(1) = W_{1 \rightarrow 2}^{\text{ext}} = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r}_i \quad (6.77)$$

### Remarque :

Pour un solide indéformable, les forces intérieures ne travaillent pas ( ce qui n'est pas vrai pour un liquide).

## 6.6.4 Théorème de l'énergie cinétique pour un solide

---

Expérience :



## 6.6.4 Théorème de l'énergie cinétique pour un solide

---

Expérience : Frottement interne (amortissement avec des œufs)



## 6.6.4 Théorème de l'énergie cinétique pour un solide

---

Expérience : Frottement interne (amortissement avec des œufs)



- Les forces intérieures à l'œuf cuit (solide indéformable) ne travaillent pas, donc elles n'amortissent pas le mouvement de rotation autour de l'axe.
- Les forces intérieures à l'œuf cru (liquide) travaillent ce qui génère un amortissement du mouvement de rotation.

## *6.6.4 Théorème de l'énergie cinétique pour un solide*

---

## 6.6.4 Théorème de l'énergie cinétique pour un solide

---

- La dérivée temporelle de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{E}_{\text{cin}} &= \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot (\mathbf{v}_{\text{CM}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{CM}} \times \mathbf{r}_i') \\ &= \left( \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \right) \cdot \mathbf{v}_{\text{CM}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{CM}} \cdot \left( \sum_i \mathbf{r}_i' \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \right) \\ &= \left( \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \right) \cdot \mathbf{v}_{\text{CM}} + \left( \sum_i \mathbf{M}_{\text{CM},i}^{\text{ext}} \right) \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{CM}} \\ &= \mathbf{F}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v}_{\text{CM}} + \mathbf{M}_{\text{CM}}^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{CM}}\end{aligned}$$

et  $\boxed{\dot{E}_{\text{cin}} = \dot{E}_{\text{cin,CM}} + \dot{E}_{\text{cin,rot}} \quad (6.78)}$

## 6.6.4 Théorème de l'énergie cinétique pour un solide

---

- La dérivée temporelle de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{E}_{\text{cin}} &= \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot (\mathbf{v}_{\text{CM}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{CM}} \times \mathbf{r}_i') \\ &= \left( \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \right) \cdot \mathbf{v}_{\text{CM}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{CM}} \cdot \left( \sum_i \mathbf{r}_i' \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \right) \\ &= \left( \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \right) \cdot \mathbf{v}_{\text{CM}} + \left( \sum_i \mathbf{M}_{\text{CM},i}^{\text{ext}} \right) \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{CM}} \\ &= \mathbf{F}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v}_{\text{CM}} + \mathbf{M}_{\text{CM}}^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{CM}}\end{aligned}$$

et  $\dot{E}_{\text{cin}} = \dot{E}_{\text{cin,CM}} + \dot{E}_{\text{cin,rot}} \quad (6.78)$

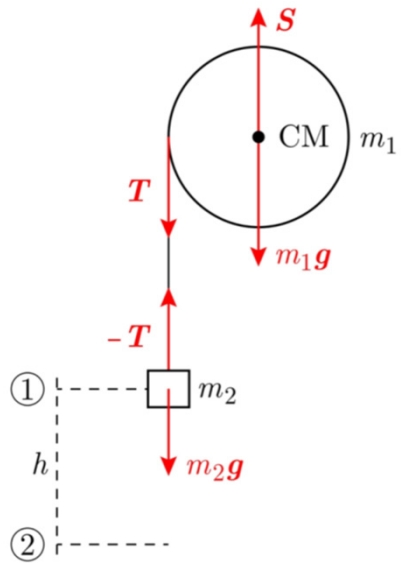
Ainsi,

$$\dot{E}_{\text{cin,CM}} = \mathbf{F}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v}_{\text{CM}} \quad (6.79)$$

$$\dot{E}_{\text{cin,rot}} = \mathbf{M}_{\text{CM}}^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{CM}} \quad (6.80)$$

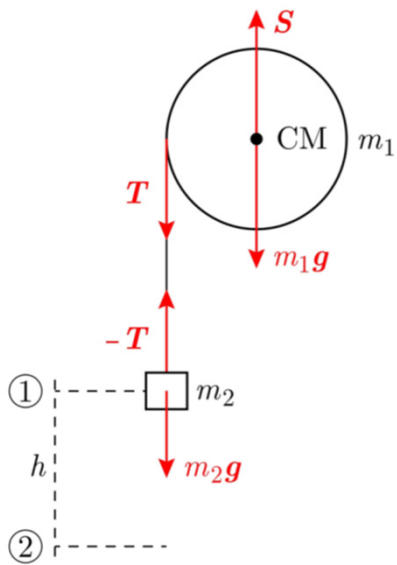
## 6.6.5 Poulie entraînée par une masse

---

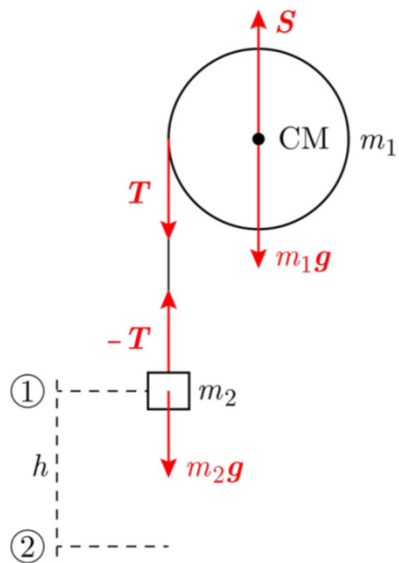


### 6.6.5 Poulie entraînée par une masse

Une poulie est entraînée par une masse initialement au repos. Quelle est la vitesse  $v$  de la masse après une chute d'une hauteur  $h$ ?



## 6.6.5 Poulie entraînée par une masse



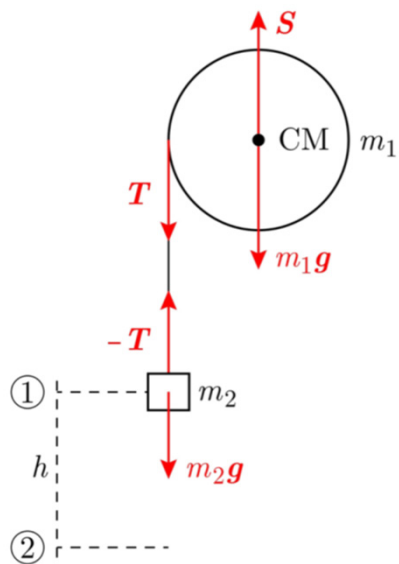
Une poulie est entraînée par une masse initialement au repos. Quelle est la vitesse  $v$  de la masse après une chute d'une hauteur  $h$ ?

- Objet 1 : poulie de masse  $m_1$
- Forces : poids  $m_1g$ , soutien  $S$ , tension  $T$

- Théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega_{\text{CM}}^2 - 0 = W_{1 \rightarrow 2}^{\text{ext}} = W_{1 \rightarrow 2}(T) \quad (6.81)$$

## 6.6.5 Poulie entraînée par une masse



Une poulie est entraînée par une masse initialement au repos. Quelle est la vitesse  $v$  de la masse après une chute d'une hauteur  $h$ ?

- Objet 1 : poulie de masse  $m_1$
- Forces : poids  $m_1g$ , soutien  $S$ , tension  $T$

- Théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega_{\text{CM}}^2 - 0 = W_{1 \rightarrow 2}^{\text{ext}} = W_{1 \rightarrow 2}(T) \quad (6.81)$$

- Objet 2 : masse d'entraînement  $m_2$
- Forces : poids  $m_2g$ , tension  $-T$

- Théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2} m_2 v^2 - 0 = W_{1 \rightarrow 2}^{\text{ext}} = W_{1 \rightarrow 2}(m_2g) + W_{1 \rightarrow 2}(-T) = m_2gh + W_{1 \rightarrow 2}(-T) \quad (6.82)$$

### ***6.6.5 Poulie entraînée par une masse***

---

Remarque :

### 6.6.5 Poulie entraînée par une masse

---

- En sommant les équations (6.81) et (6.82), on obtient :

$$\frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 = m_2gh + W_{1\rightarrow 2}(\mathbf{T}) + W_{1\rightarrow 2}(-\mathbf{T})$$

$$\text{où } W_{1\rightarrow 2}(\mathbf{T}) + W_{1\rightarrow 2}(-\mathbf{T}) = 0$$

Remarque :

### 6.6.5 Poulie entraînée par une masse

---

- En sommant les équations (6.81) et (6.82), on obtient :

$$\frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 = m_2gh + W_{1\rightarrow 2}(\mathbf{T}) + W_{1\rightarrow 2}(-\mathbf{T})$$

$$\text{où } W_{1\rightarrow 2}(\mathbf{T}) + W_{1\rightarrow 2}(-\mathbf{T}) = 0$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{\frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 = m_2gh \quad (6.83)}$$

Remarque :

### 6.6.5 Poulie entraînée par une masse

---

- En sommant les équations (6.81) et (6.82), on obtient :

$$\frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 = m_2gh + W_{1\rightarrow 2}(\mathbf{T}) + W_{1\rightarrow 2}(-\mathbf{T})$$

$$\text{où } W_{1\rightarrow 2}(\mathbf{T}) + W_{1\rightarrow 2}(-\mathbf{T}) = 0$$

Ainsi,  $\boxed{\frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 = m_2gh \quad (6.83)}$

- Compte tenu de la liaison,

$$v = R\omega_{\text{CM}} \Rightarrow \frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega_{\text{CM}}^2 = \frac{1}{2}\frac{I_{\text{CM}}}{R^2}v^2$$

on obtient alors une relation entre  $v$  et  $h$  :

$$\frac{1}{2}\left(m_2 + \frac{I_{\text{CM}}}{R^2}\right)v^2 = m_2gh \Rightarrow \boxed{v^2 = \frac{2gh}{1 + \frac{I_{\text{CM}}}{m_2R^2}} < 2gh \quad (6.84)}$$

Remarque :

## 6.6.5 Poulie entraînée par une masse

---

- En sommant les équations (6.81) et (6.82), on obtient :

$$\frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 = m_2gh + W_{1\rightarrow 2}(\mathbf{T}) + W_{1\rightarrow 2}(-\mathbf{T})$$

$$\text{où } W_{1\rightarrow 2}(\mathbf{T}) + W_{1\rightarrow 2}(-\mathbf{T}) = 0$$

Ainsi,  $\boxed{\frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 = m_2gh \quad (6.83)}$

- Compte tenu de la liaison,

$$v = R\omega_{\text{CM}} \Rightarrow \frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega_{\text{CM}}^2 = \frac{1}{2}\frac{I_{\text{CM}}}{R^2}v^2$$

on obtient alors une relation entre  $v$  et  $h$  :

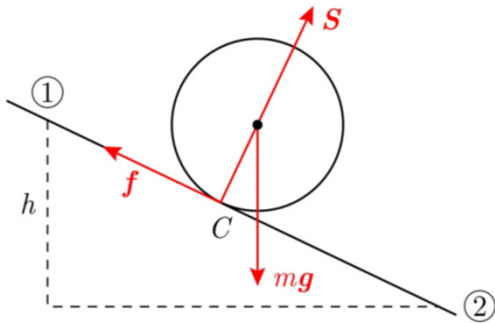
$$\frac{1}{2}\left(m_2 + \frac{I_{\text{CM}}}{R^2}\right)v^2 = m_2gh \Rightarrow \boxed{v^2 = \frac{2gh}{1 + \frac{I_{\text{CM}}}{m_2R^2}} < 2gh \quad (6.84)}$$

Remarque :

En chute libre,  $v^2 = 2gh$ .

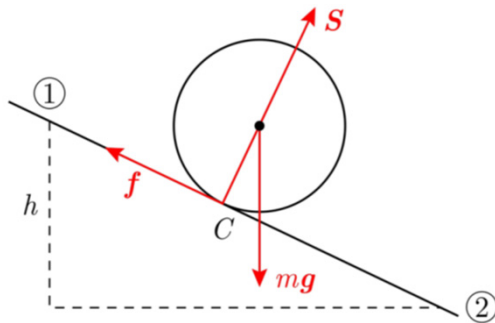
## 6.6.6 Roue qui roule sans glisser sur un plan incliné

---



### 6.6.6 Roue qui roule sans glisser sur un plan incliné

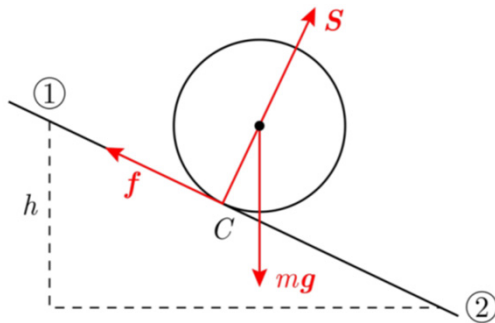
---



Une roue initialement au repos roule sans glisser sur un plan incliné. Que vaut la vitesse de la roue après une descente d'une hauteur  $h$ ?

### 6.6.6 Roue qui roule sans glisser sur un plan incliné

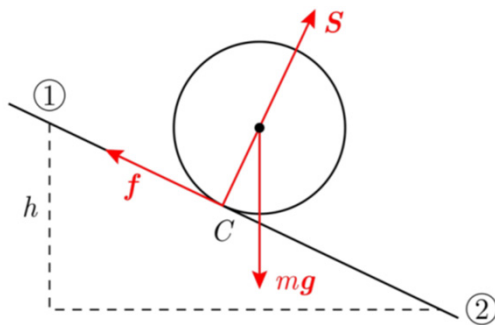
---



Une roue initialement au repos roule sans glisser sur un plan incliné. Que vaut la vitesse de la roue après une descente d'une hauteur  $h$ ?

- Objet : roue
- Forces : poids  $mg$ , soutien  $S$ , frottement statique  $f$

## 6.6.6 Roue qui roule sans glisser sur un plan incliné



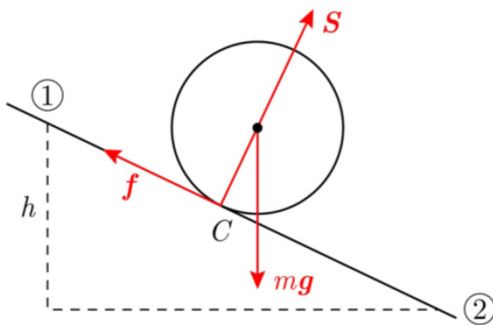
Une roue initialement au repos roule sans glisser sur un plan incliné. Que vaut la vitesse de la roue après une descente d'une hauteur  $h$ ?

- Objet : roue
- Forces : poids  $mg$ , soutien  $S$ , frottement statique  $f$

- Théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2}mv_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega_{\text{CM}}^2 = W_{1 \rightarrow 2}^{\text{ext}} = W_{1 \rightarrow 2}(mg) + W_{1 \rightarrow 2}(f) \quad (6.85)$$

## 6.6.6 Roue qui roule sans glisser sur un plan incliné



Une roue initialement au repos roule sans glisser sur un plan incliné. Que vaut la vitesse de la roue après une descente d'une hauteur  $h$ ?

- Objet : roue
- Forces : poids  $m\mathbf{g}$ , soutien  $\mathbf{S}$ , frottement statique  $\mathbf{f}$

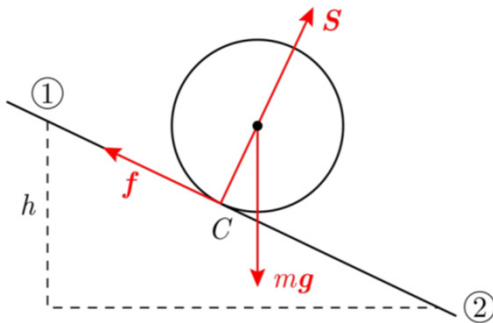
- Théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2}mv_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega_{\text{CM}}^2 = W_{1 \rightarrow 2}^{\text{ext}} = W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{mg}) + W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{f}) \quad (6.85)$$

Pour un roulement sans glissement, la vitesse du point de contact  $C$  est nulle. Ainsi,

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{0} \Rightarrow d\mathbf{r}_C = \mathbf{0} \Rightarrow W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{f}) = \int_1^2 \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}_C = 0 \quad (6.86)$$

## 6.6.6 Roue qui roule sans glisser sur un plan incliné



Une roue initialement au repos roule sans glisser sur un plan incliné. Que vaut la vitesse de la roue après une descente d'une hauteur  $h$ ?

- Objet : roue
- Forces : poids  $mg$ , soutien  $S$ , frottement statique  $f$

- Théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega_{CM}^2 = W_{1 \rightarrow 2}^{\text{ext}} = W_{1 \rightarrow 2}(mg) + W_{1 \rightarrow 2}(f) \quad (6.85)$$

Pour un roulement sans glissement, la vitesse du point de contact  $C$  est nulle. Ainsi,

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{0} \Rightarrow d\mathbf{r}_C = \mathbf{0} \Rightarrow W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{f}) = \int_1^2 \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}_C = 0 \quad (6.86)$$

Ainsi, la force de frottement statique  $f$  ne travaille pas!

### ***6.6.6 Roue qui roule sans glisser sur un plan incliné***

---

Remarque :

### 6.6.6 Roue qui roule sans glisser sur un plan incliné

---

Ainsi,  $W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{f}) = 0$  (6.87)

Remarque :

### 6.6.6 Roue qui roule sans glisser sur un plan incliné

---

Ainsi,  $W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{f}) = 0$  (6.87)

De plus,  $W_{1 \rightarrow 2}(m\mathbf{g}) = mgh$  (6.88)

Remarque :

### 6.6.6 Roue qui roule sans glisser sur un plan incliné

---

Ainsi,  $W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{f}) = 0$  (6.87)

De plus,  $W_{1 \rightarrow 2}(m\mathbf{g}) = mgh$  (6.88)

- Donc, la relation (6.85) devient :

$$\frac{1}{2}mv_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega_{\text{CM}}^2 = mgh \quad (6.89)$$

Remarque :

## 6.6.6 Roue qui roule sans glisser sur un plan incliné

---

Ainsi,  $W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{f}) = 0$  (6.87)

De plus,  $W_{1 \rightarrow 2}(m\mathbf{g}) = mgh$  (6.88)

- Donc, la relation (6.85) devient :

$$\frac{1}{2}mv_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega_{\text{CM}}^2 = mgh \quad (6.89)$$

- Avec la liaison,

$$v \equiv v_{\text{CM}} = R\omega_{\text{CM}}$$

On obtient une relation entre  $v$  et  $h$  :

$$\frac{1}{2}\left(m + \frac{I_{\text{CM}}}{R^2}\right)v^2 = mgh \Rightarrow v^2 = \frac{2gh}{1 + \frac{I_{\text{CM}}}{mR^2}} < 2gh \quad (6.90)$$

Remarque :

## 6.6.6 Roue qui roule sans glisser sur un plan incliné

---

Ainsi,  $W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{f}) = 0$  (6.87)

De plus,  $W_{1 \rightarrow 2}(m\mathbf{g}) = mgh$  (6.88)

- Donc, la relation (6.85) devient :

$$\frac{1}{2}mv_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega_{\text{CM}}^2 = mgh \quad (6.89)$$

- Avec la liaison,

$$v \equiv v_{\text{CM}} = R\omega_{\text{CM}}$$

On obtient une relation entre  $v$  et  $h$  :

$$\frac{1}{2}\left(m + \frac{I_{\text{CM}}}{R^2}\right)v^2 = mgh \Rightarrow v^2 = \frac{2gh}{1 + \frac{I_{\text{CM}}}{mR^2}} < 2gh \quad (6.90)$$

**Remarque :**

Cette vitesse est la même que celle du contrepoids de l'exemple précédent.

## 6.6.6 *Roue qui roule sans glisser sur un plan incliné*

---

Expérience :



## 6.6.6 *Roue qui roule sans glisser sur un plan incliné*

---

Expérience : Anagyre



## 6.6.6 Roue qui roule sans glisser sur un plan incliné

---

Expérience : Anagyre



- L'anagyre est un demi-ellipsoïde qui est coupé de manière légèrement asymétrique.
- Lorsqu'on tourne l'anagyre dans le bon sens, l'axe de rotation est un axe de symétrie et le mouvement de rotation a lieu normalement.
- Lorsqu'on tourne l'anagyre dans le mauvais sens, l'axe de rotation n'est pas un axe de symétrie. L'anagyre fait alors demi-tour.