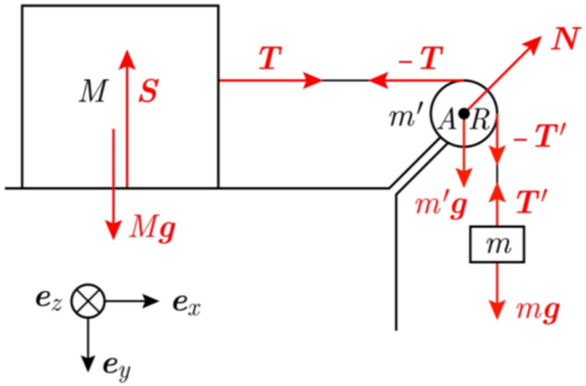
Leçon 20 – 08/05/2025

6. Rotation en deux dimensions

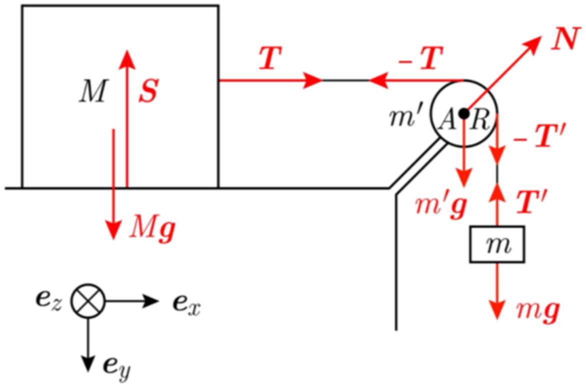
- 6.4 Théorème du moment cinétique
- 6.5 Référentiel du centre de masse
- 6.6 Théorème de l'énergie cinétique d'un solide

6.4.11 Glisseur entraîné par un contrepoids



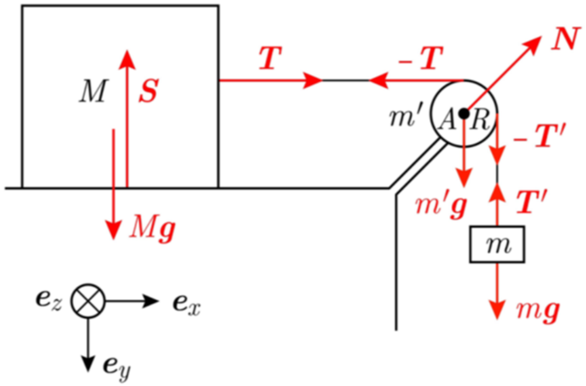
6.4.11 Glisseur entraîné par un contrepoids

On considère un glisseur de masse M sur un rail à air horizontal. Il est attaché à un fil qui coulisse sur une poulie de moment d'inertie I_A et il est entraîné par un contrepoids de masse m. On veut déterminer $\dot{\omega}_A$.



6.4.11 Glisseur entraîné par un contrepoids

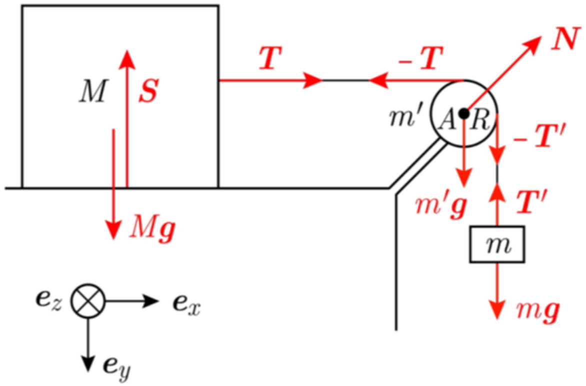
On considère un glisseur de masse M sur un rail à air horizontal. Il est attaché à un fil qui coulisse sur une poulie de moment d'inertie I_A et il est entraîné par un contrepoids de masse m. On veut déterminer $\dot{\omega}_A$.



Méthode : On considère le glisseur, le contrepoids et la poulie séparément et ensuite les liens entre les objets.

6.4.11 Glisseur entraîné par un contrepoids

On considère un glisseur de masse M sur un rail à air horizontal. Il est attaché à un fil qui coulisse sur une poulie de moment d'inertie I_A et il est entraîné par un contrepoids de masse m. On veut déterminer $\dot{\omega}_A$.



Méthode : On considère le glisseur, le contrepoids et la poulie séparément et ensuite les liens entre les objets.

1. Objet : glisseur de masse M (translation horizontale)

   Forces : poids $M\mathbf{g}$, soutien $\mathbf{S}$, tension du fil $\mathbf{T}$

   Newton : $M\mathbf{g} + \mathbf{S} + \mathbf{T} = M\mathbf{a_M}$

Selon $\mathbf{e}_x$: $T = Ma_M$

6.4.11 Glisseur entraîné par un contrepoids

6.4.11 Glisseur entraîné par un contrepoids

2. Objet : contrepoids (translation verticale)

Forces : poids $m\mathbf{g}$, tension $\mathbf{T'}$

Newton : $m\mathbf{g} + \mathbf{T'} = m\mathbf{a_m}$

Selon $\mathbf{e}_y$: $mg - T' = ma_m$

6.4.11 Glisseur entraîné par un contrepoids

2. Objet : contrepoids (translation verticale)

   Forces : poids $m\mathbf{g}$, tension $\mathbf{T'}$

   Newton : $m\mathbf{g} + \mathbf{T'} = m\mathbf{a_m}$

Selon $\mathbf{e}_y$: $mg - T' = ma_m$

3. Objet : poulie (rotation)

   Forces : poids $m'\mathbf{g}$, soutien $\mathbf{N}$, tensions $-\mathbf{T}$ et $-\mathbf{T'}$

   Rotation par rapport à A : $\underbrace{\mathbf{M_A}(m'\mathbf{g})}_{=\mathbf{0}} + \underbrace{\mathbf{M_A}(\mathbf{N})}_{=\mathbf{0}} + \mathbf{M_A}(-\mathbf{T}) + \mathbf{M_A}(-\mathbf{T'}) = I_A\dot{\boldsymbol{\omega}}_\mathbf{A}$

Selon $\mathbf{e}_z$:

$$-RT + RT' = I_A\dot{\omega}_A$$

6.4.11 Glisseur entraîné par un contrepoids

2. Objet : contrepoids (translation verticale)

   Forces : poids $m\mathbf{g}$, tension $\mathbf{T'}$

   Newton : $m\mathbf{g} + \mathbf{T'} = m\mathbf{a_m}$

Selon $\mathbf{e}_y$: $mg - T' = ma_m$

3. Objet : poulie (rotation)

   Forces : poids $m'\mathbf{g}$, soutien $\mathbf{N}$, tensions $-\mathbf{T}$ et $-\mathbf{T'}$

   Rotation par rapport à A : $\underbrace{\mathbf{M_A}(m'\mathbf{g})}_{=\mathbf{0}} + \underbrace{\mathbf{M_A}(\mathbf{N})}_{=\mathbf{0}} + \mathbf{M_A}(-\mathbf{T}) + \mathbf{M_A}(-\mathbf{T'}) = I_A \dot{\boldsymbol{\omega}}_\mathbf{A}$

Selon $\mathbf{e}_z$:

$$-RT + RT' = I_A \dot{\omega}_A$$

- Si le moment d'inertie est non-nul, i.e., $I_A \neq 0$, alors les normes des tensions sont différentes, i.e., $T \neq T'$.

6.4.11 Glisseur entraîné par un contrepoids

6.4.11 Glisseur entraîné par un contrepoids

4. Liaison glisseur-poulie : La vitesse scalaire v_M du glisseur est la même que celle d'un point sur le bord de la poulie (frottement statique) dont la vitesse angulaire est ω_A.

$$v_M = R\omega_A \Rightarrow a_M = R\dot{\omega}_A$$

6.4.11 Glisseur entraîné par un contrepoids

4. Liaison glisseur-poulie : La vitesse scalaire v_M du glisseur est la même que celle d'un point sur le bord de la poulie (frottement statique) dont la vitesse angulaire est ω_A.

$$v_M = R\omega_A \Rightarrow a_M = R\dot{\omega}_A$$

5. Liaison poulie-contrepoids : La vitesse scalaire v_m du contrepoids est la même que celle d'un point du bord de la poulie.

$$v_m = R\omega_A \Rightarrow a_m = R\dot{\omega}_A \Rightarrow a_m = a_M \equiv a$$

6.4.11 Glisseur entraîné par un contrepoids

4. Liaison glisseur-poulie : La vitesse scalaire v_M du glisseur est la même que celle d'un point sur le bord de la poulie (frottement statique) dont la vitesse angulaire est ω_A.

$$v_M = R\omega_A \Rightarrow a_M = R\dot{\omega}_A$$

5. Liaison poulie-contrepoids : La vitesse scalaire v_m du contrepoids est la même que celle d'un point du bord de la poulie.

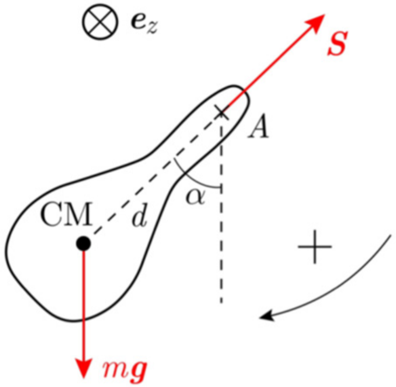
$$v_m = R\omega_A \Rightarrow a_m = R\dot{\omega}_A \Rightarrow a_m = a_M \equiv a$$

6. Résolution : $\omega \equiv \omega_A$ et $I_{CM} \equiv I_A$

$$\left.\begin{aligned} T = Ma = MR\dot{\omega} \\ mg - T' = ma = mR\dot{\omega} \\ -RT + RT' = I_{CM}\dot{\omega} \end{aligned}\right\} \Rightarrow mgR = \left(MR^2 + mR^2 + I_{CM}\right)\dot{\omega}$$

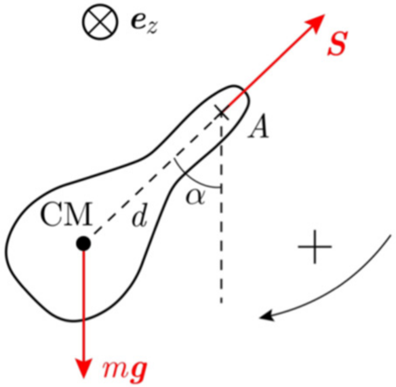
$$\boxed{\Rightarrow \dot{\omega} = \frac{mgR}{MR^2 + mR^2 + I_{CM}} \quad (6.37)}$$

6.4.12 Pendule physique



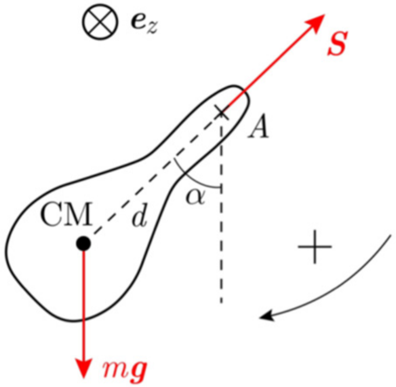
6.4.12 Pendule physique

Un pendule physique est un solide suspendu à un point fixe A.



6.4.12 Pendule physique

Un pendule physique est un solide suspendu à un point fixe A.



<u>Objet</u> : solide

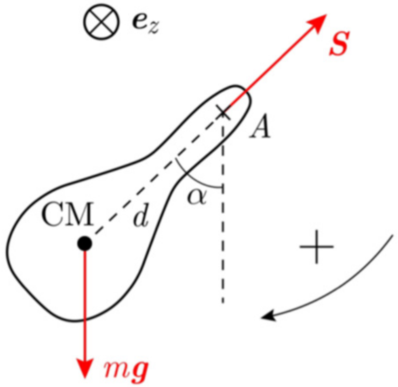
<u>Forces</u> : poids $m\mathbf{g}$, soutien $\mathbf{S}$

<u>Rotation par rapport à A</u> :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{ext}} = \mathbf{M}_{\mathbf{A}}\left(m\mathbf{g}\right) = I_A \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{A}}$$

6.4.12 Pendule physique

Un pendule physique est un solide suspendu à un point fixe *A*.



<u>Objet</u> : solide

<u>Forces</u> : poids $m\mathbf{g}$, soutien $\mathbf{S}$

<u>Rotation par rapport à *A*</u> :

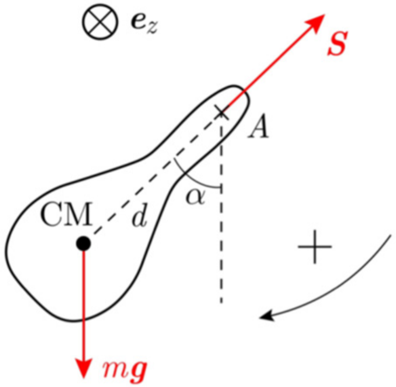
$$\mathbf{M}_\mathbf{A}^{\mathbf{ext}} = \mathbf{M}_\mathbf{A}(m\mathbf{g}) = I_A \dot{\boldsymbol{\omega}}_\mathbf{A}$$

- Selon $\mathbf{e}_z$ (donnant le sens positif pour α qui augmente) :

$$-d\sin\alpha mg = I_A \dot{\omega}_A = I_A \ddot{\alpha}$$

6.4.12 Pendule physique

Un pendule physique est un solide suspendu à un point fixe A.



Objet : solide

Forces : poids $m\mathbf{g}$, soutien $\mathbf{S}$

Rotation par rapport à A :

$$\mathbf{M}_\mathbf{A}^{\mathbf{ext}} = \mathbf{M}_\mathbf{A}\left(m\mathbf{g}\right) = I_A \dot{\boldsymbol{\omega}}_\mathbf{A}$$

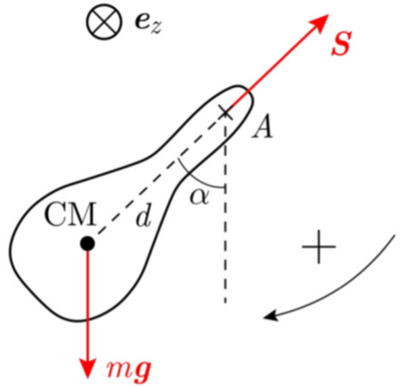
- Selon $\mathbf{e}_z$ (donnant le sens positif pour α qui augmente) :

$$-d\sin\alpha mg = I_A \dot{\omega}_A = I_A \ddot{\alpha}$$

- Soit $\Omega^2 = \dfrac{mgd}{I_A} > 0 \Rightarrow$ $\boxed{\ddot{\alpha} = -\Omega^2 \sin\alpha \quad (6.38)}$

6.4.12 Pendule physique

Un pendule physique est un solide suspendu à un point fixe A.



<u>Objet</u> : solide

<u>Forces</u> : poids $m\mathbf{g}$, soutien $\mathbf{S}$

<u>Rotation par rapport à A</u> :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{ext}} = \mathbf{M}_{\mathbf{A}}\left(m\mathbf{g}\right) = I_A \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{A}}$$

- Selon $\mathbf{e}_z$ (donnant le sens positif pour α qui augmente) :

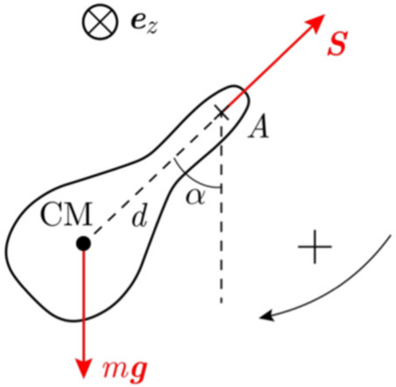
$$-d\sin\alpha mg = I_A \dot{\omega}_A = I_A \ddot{\alpha}$$

- Soit $\Omega^2 = \dfrac{mgd}{I_A} > 0 \Rightarrow$ $\boxed{\ddot{\alpha} = -\Omega^2 \sin\alpha \quad (6.38)}$
- Dans l'approximation des petits angles : $\alpha << 1 \Rightarrow \sin\alpha \approx \alpha$

$\boxed{\ddot{\alpha} = -\Omega^2 \alpha \quad (6.39)}$ (oscillateur harmonique)

6.4.12 Pendule physique

Un pendule physique est un solide suspendu à un point fixe A.



Objet : solide

Forces : poids $m\mathbf{g}$, soutien $\mathbf{S}$

Rotation par rapport à A :

$$\mathbf{M}_\mathbf{A}^{\mathbf{ext}} = \mathbf{M}_\mathbf{A}(m\mathbf{g}) = I_A \dot{\boldsymbol{\omega}}_\mathbf{A}$$

- Selon $\mathbf{e}_z$ (donnant le sens positif pour α qui augmente) :

$$-d \sin\alpha\, mg = I_A \dot{\omega}_A = I_A \ddot{\alpha}$$

- Soit $\Omega^2 = \dfrac{mgd}{I_A} > 0 \Rightarrow$ $\boxed{\ddot{\alpha} = -\Omega^2 \sin\alpha \quad (6.38)}$
- Dans l'approximation des petits angles : $\alpha << 1 \Rightarrow \sin\alpha \approx \alpha$

$\boxed{\ddot{\alpha} = -\Omega^2 \alpha \quad (6.39)}$ (oscillateur harmonique)

- Plus I_A est grand, plus la période d'oscillation est longue.

6.4.12 Pendule physique

Expérience :

6.4.12 Pendule physique

Expérience : Pendule physique

6.4.12 Pendule physique

Expérience : Pendule physique

- On constate que la période d'oscillation du pendule physique est une fonction de la position de l'axe de rotation qui détermine le moment d'inertie.

6.4.12 Pendule physique

Expérience : Pendule physique

- On constate que la période d'oscillation du pendule physique est une fonction de la position de l'axe de rotation qui détermine le moment d'inertie.

- Plus I_A est grand, plus la période d'oscillation est longue.

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I_A}{mgd}} \quad \text{et} \quad I_A = I_{\mathrm{CM}} + md^2$$

6.5 Référentiel du centre de masse

6.5 Référentiel du centre de masse

6.5 *Référentiel du centre de masse*

- Par rapport à un référentiel d'inertie muni d'une origine *O*, la 2ème loi de Newton en translation et en rotation pour un point matériel s'exprime comme :

$$\boxed{\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_\mathbf{i} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_\mathbf{O,i} = \dot{\mathbf{L}}_\mathbf{O,i} \quad (6.40)}$$

6.5 Référentiel du centre de masse

- Par rapport à un référentiel d'inertie muni d'une origine O, la 2ème loi de Newton en translation et en rotation pour un point matériel s'exprime comme :

$$\boxed{\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_\mathbf{i} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_{\mathbf{o,i}} = \dot{\mathbf{L}}_{\mathbf{o,i}} \quad (6.40)}$$

- On considère un objet formé de points matériels et on note $\mathbf{a}_{\mathbf{CM}}$ l'accélération de son centre de masse.

6.5 Référentiel du centre de masse

- Par rapport à un référentiel d'inertie muni d'une origine *O*, la 2ème loi de Newton en translation et en rotation pour un point matériel s'exprime comme :

$$\boxed{\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_\mathrm{i} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_{\mathbf{O},\mathbf{i}} = \dot{\mathbf{L}}_{\mathbf{O},\mathbf{i}} \quad (6.40)}$$

- On considère un objet formé de points matériels et on note $\mathbf{a}_{\mathbf{CM}}$ l'accélération de son centre de masse.

- On se limite au cas où le centre de masse a un mouvement rectiligne (translation) par rapport au référentiel d'inertie.

6.5 Référentiel du centre de masse

- Par rapport à un référentiel d'inertie muni d'une origine *O*, la 2ème loi de Newton en translation et en rotation pour un point matériel s'exprime comme :

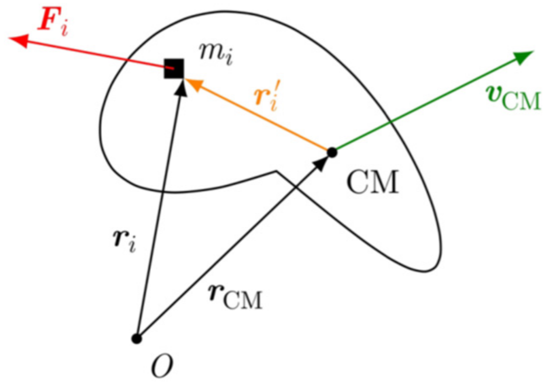
$$\boxed{\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_\mathrm{i} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_{\mathrm{o,i}} = \dot{\mathbf{L}}_{\mathrm{o,i}} \quad (6.40)}$$

- On considère un objet formé de points matériels et on note $\mathbf{a}_{\mathbf{CM}}$ l'accélération de son centre de masse.

- On se limite au cas où le centre de masse a un mouvement rectiligne (translation) par rapport au référentiel d'inertie.

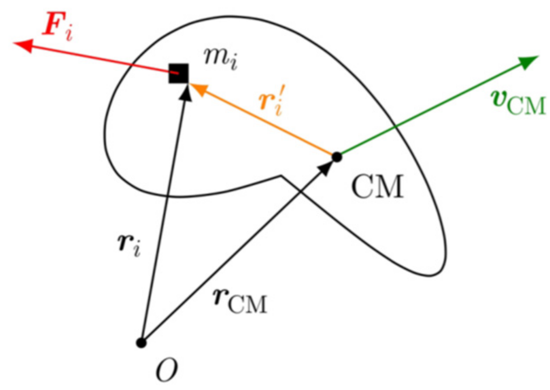
- Les grandeurs cinématiques (position, vitesse, accélération) dans le référentiel $\mathfrak{R}'$ du centre de masse sont liées aux grandeurs correspondantes dans le référentiel d'inertie $\mathfrak{R}$ par :

6.5 Référentiel du centre de masse



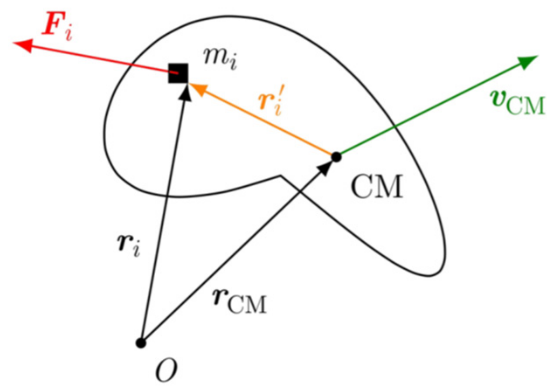
6.5 Référentiel du centre de masse

- Référentiel d'inertie : $\mathfrak{R}$



6.5 Référentiel du centre de masse

- Référentiel d'inertie : $\mathfrak{R}$
- Référentiel du centre de masse : $\mathfrak{R}'$

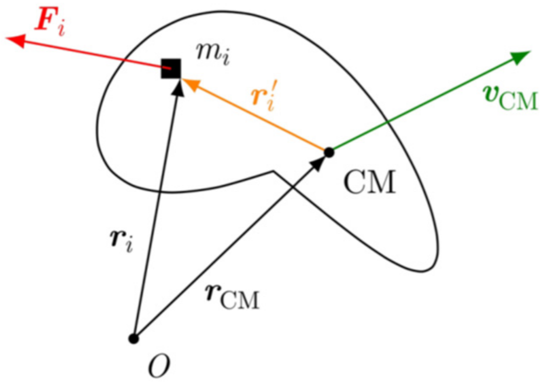


6.5 Référentiel du centre de masse

- Référentiel d'inertie : $\mathcal{R}$
- Référentiel du centre de masse : $\mathcal{R}'$

1. Position :

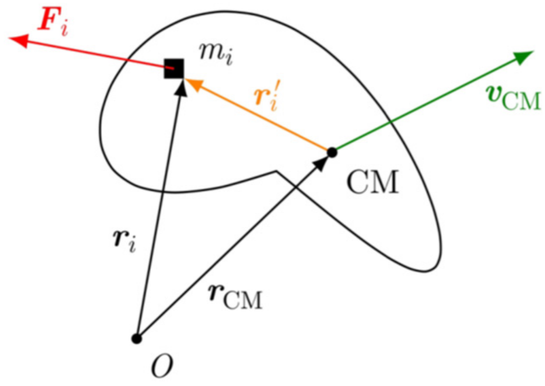
$$\boxed{\underbrace{\mathbf{r_i}}_{\in\Re} = \underbrace{\mathbf{r_{CM}}}_{\in\Re} + \underbrace{\mathbf{r_i'}}_{\in\Re'} \quad (6.41)}$$



6.5 Référentiel du centre de masse

- Référentiel d'inertie : $\mathfrak{R}$

- Référentiel du centre de masse : $\mathfrak{R}'$



1. Position :

$$\boxed{\underbrace{\mathbf{r_i}}_{\in\mathfrak{R}} = \underbrace{\mathbf{r_{CM}}}_{\in\mathfrak{R}} + \underbrace{\mathbf{r_i'}}_{\in\mathfrak{R}'} \quad (6.41)}$$

2. Vitesse :

$$\boxed{\mathbf{v_i} = \mathbf{v_{CM}} + \mathbf{v_i'} \quad (6.42)}$$

6.5 Référentiel du centre de masse

- Référentiel d'inertie : $\mathfrak{R}$
- Référentiel du centre de masse : $\mathfrak{R}'$

1. Position :

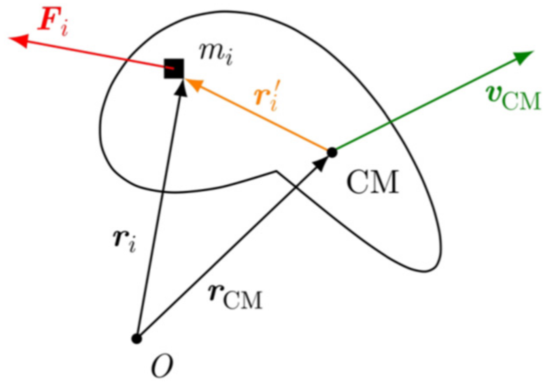
$$\boxed{\underbrace{\mathbf{r_i}}_{\in\mathfrak{R}} = \underbrace{\mathbf{r_{CM}}}_{\in\mathfrak{R}} + \underbrace{\mathbf{r_i'}}_{\in\mathfrak{R}'} \quad (6.41)}$$

2. Vitesse :

$$\boxed{\mathbf{v_i} = \mathbf{v_{CM}} + \mathbf{v_i'} \quad (6.42)}$$

3. Accélération :

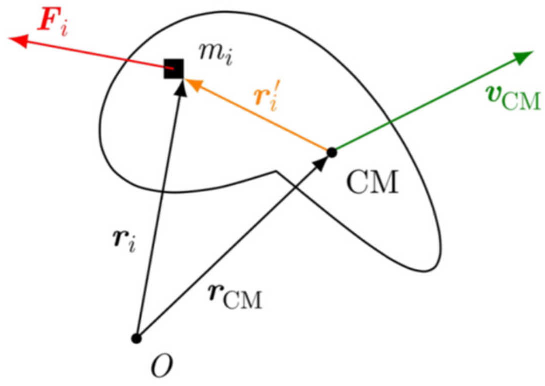
$$\boxed{\mathbf{a_i} = \mathbf{a_{CM}} + \mathbf{a_i'} \quad (6.43)}$$



6.5 Référentiel du centre de masse

- Référentiel d'inertie : $\mathfrak{R}$

- Référentiel du centre de masse : $\mathfrak{R}'$



1. Position :

$$\underbrace{\mathbf{r_i}}_{\in\mathfrak{R}} = \underbrace{\mathbf{r_{CM}}}_{\in\mathfrak{R}} + \underbrace{\mathbf{r_i'}}_{\in\mathfrak{R}'} \quad (6.41)$$

2. Vitesse :

$$\mathbf{v_i} = \mathbf{v_{CM}} + \mathbf{v_i'} \quad (6.42)$$

3. Accélération :

$$\mathbf{a_i} = \mathbf{a_{CM}} + \mathbf{a_i'} \quad (6.43)$$

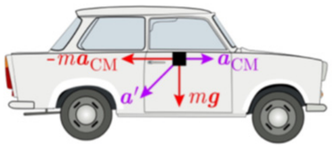
- Le centre de masse (CM) est immobile par rapport à $\mathfrak{R}'$.

$$\mathbf{r_{CM}'} = \mathbf{0};\ \mathbf{v_{CM}'} = \mathbf{0} \ \text{ et } \ \mathbf{a_{CM}'} = \mathbf{0} \quad (6.44)$$

6.5.1 Force d'inertie et 6.5.2 chute libre en voiture

Remarque :

Chute libre en voiture



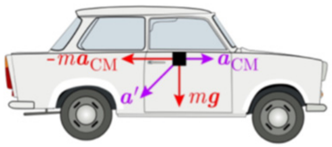
6.5.1 Force d'inertie et 6.5.2 chute libre en voiture

- 2ème loi de Newton (référentiel d'inertie $\mathcal{R}$) :

$$\boxed{\mathbf{F_i} = m_i \mathbf{a_i} \quad \text{où} \quad \mathbf{a_i} = \mathbf{a_{CM}} + \mathbf{a_i}' \quad (6.45)}$$

Remarque :

Chute libre en voiture



6.5.1 Force d'inertie et 6.5.2 chute libre en voiture

- 2$^{\text{ème}}$ loi de Newton (référentiel d'inertie $\mathfrak{R}$) :

$$\boxed{\mathbf{F_i} = m_i \mathbf{a_i} \quad \text{où} \quad \mathbf{a_i} = \mathbf{a_{CM}} + \mathbf{a_i'} \quad (6.45)}$$

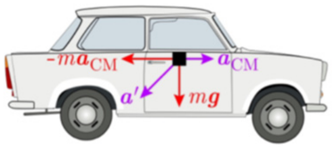
- 2$^{\text{ème}}$ loi de Newton (référentiel du centre de masse $\mathfrak{R}'$) :

$$\boxed{\mathbf{F_i} - m_i \mathbf{a_{CM}} = m_i \mathbf{a_i'} \quad (6.46)}$$

où le terme $-m_i\mathbf{a_{CM}}$ est une force appelée « force d'inertie ».

Remarque :

Chute libre en voiture



6.5.1 Force d'inertie et 6.5.2 chute libre en voiture

- 2ème loi de Newton (référentiel d'inertie $\mathfrak{R}$) :

$$\boxed{\mathbf{F_i} = m_i\mathbf{a_i} \quad \text{où} \quad \mathbf{a_i} = \mathbf{a_{CM}} + \mathbf{a_i}' \quad (6.45)}$$

- 2ème loi de Newton (référentiel du centre de masse $\mathfrak{R}'$) :

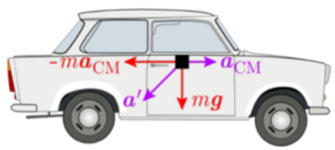
$$\boxed{\mathbf{F_i} - m_i\mathbf{a_{CM}} = m_i\mathbf{a_i}' \quad (6.46)}$$

où le terme $-m_i\mathbf{a_{CM}}$ est une force appelée « force d'inertie ».

Remarque :

Si le référentiel du centre de masse a un mouvement de rotation par rapport au référentiel d'inertie, il faut ajouter d'autres forces d'inertie (centrifuge, Coriolis, Euler).

Chute libre en voiture



6.5.1 Force d'inertie et 6.5.2 chute libre en voiture

- 2ème loi de Newton (référentiel d'inertie $\mathcal{R}$) :

$$\boxed{\mathbf{F}_\mathbf{i} = m_i \mathbf{a}_\mathbf{i} \quad \text{où} \quad \mathbf{a}_\mathbf{i} = \mathbf{a}_\mathbf{CM} + \mathbf{a}_\mathbf{i}' \quad (6.45)}$$

- 2ème loi de Newton (référentiel du centre de masse $\mathcal{R}'$) :

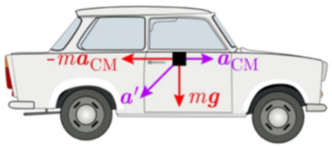
$$\boxed{\mathbf{F}_\mathbf{i} - m_i \mathbf{a}_\mathbf{CM} = m_i \mathbf{a}_\mathbf{i}' \quad (6.46)}$$

où le terme $-m_i\mathbf{a}_\mathbf{CM}$ est une force appelée « force d'inertie ».

Remarque :

Si le référentiel du centre de masse a un mouvement de rotation par rapport au référentiel d'inertie, il faut ajouter d'autres forces d'inertie (centrifuge, Coriolis, Euler).

Chute libre en voiture



Objet : masse m

Forces : poids $m\mathbf{g}$, force d'inertie $-m\mathbf{a}_\mathbf{CM}$

Référentiel : centre de masse de la voiture

Newton : $m\mathbf{g} - m\mathbf{a}_\mathbf{CM} = m\mathbf{a}' \Rightarrow$

$$\boxed{\mathbf{a}' = \mathbf{g} - \mathbf{a}_\mathbf{CM} \quad (6.47)}$$

6.5.3 Théorème du moment cinétique pour un solide

6.5.3 Théorème du moment cinétique pour un solide

- Le moment de la force $\mathbf{F_i}$ par rapport à l'origine *O* s'écrit :

$$\boxed{\mathbf{M_{O,i}} = \mathbf{r_i} \times \mathbf{F_i} = \left(\mathbf{r_{CM}} + \mathbf{r_i'}\right) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{r_{CM}} \times \mathbf{F_i} + \underbrace{\mathbf{r_i'} \times \mathbf{F}_i}_{\mathbf{M_{CM,i}}} \quad (6.48)}$$

6.5.3 Théorème du moment cinétique pour un solide

- Le moment de la force $\mathbf{F_i}$ par rapport à l'origine *O* s'écrit :

$$\boxed{\mathbf{M_{O,i}} = \mathbf{r_i} \times \mathbf{F_i} = \left(\mathbf{r_{CM}} + \mathbf{r_i'}\right) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{r_{CM}} \times \mathbf{F_i} + \underbrace{\mathbf{r_i'} \times \mathbf{F}_i}_{\mathbf{M_{CM,i}}} \quad (6.48)}$$

- La somme des moments de force (6.48) est :

$$\boxed{\mathbf{M_O^{ext}} = \sum_i \mathbf{M_{O,i}^{ext}} = \mathbf{r_{CM}} \times \sum_i \mathbf{F_i^{ext}} + \sum_i \mathbf{M_{CM,i}^{ext}} = \mathbf{r_{CM}} \times \mathbf{F^{ext}} + \mathbf{M_{CM}^{ext}} \quad (6.49)}$$

6.5.3 Théorème du moment cinétique pour un solide

- Le moment de la force $\mathbf{F_i}$ par rapport à l'origine *O* s'écrit :

$$\boxed{\mathbf{M_{O,i}} = \mathbf{r_i} \times \mathbf{F_i} = \left(\mathbf{r_{CM}} + \mathbf{r_i'}\right) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{r_{CM}} \times \mathbf{F_i} + \underbrace{\mathbf{r_i'} \times \mathbf{F}_i}_{\mathbf{M_{CM,i}}} \quad (6.48)}$$

- La somme des moments de force (6.48) est :

$$\boxed{\mathbf{M_O^{ext}} = \sum_i \mathbf{M_{O,i}^{ext}} = \mathbf{r_{CM}} \times \sum_i \mathbf{F_i^{ext}} + \sum_i \mathbf{M_{CM,i}^{ext}} = \mathbf{r_{CM}} \times \mathbf{F^{ext}} + \mathbf{M_{CM}^{ext}} \quad (6.49)}$$

- Le moment cinétique par rapport à l'origine *O* s'écrit :

$$\mathbf{L_{O,i}} = \mathbf{r_i} \times m_i \mathbf{v_i} = \left(\mathbf{r_{CM}} + \mathbf{r_i'}\right) \times m_i \left(\mathbf{v_{CM}} + \mathbf{v_i'}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \mathbf{L_{O,i}} = \mathbf{r_{CM}} \times m_i \mathbf{v_{CM}} + \mathbf{r_{CM}} \times m_i \mathbf{v_i'} + m_i \mathbf{r_i'} \times \mathbf{v_{CM}} + \underbrace{\mathbf{r_i'} \times m_i \mathbf{v_i'}}_{\mathbf{L_{CM,i}}} \quad (6.50)}$$

6.5.3 Théorème du moment cinétique pour un solide

- Le moment de la force $\mathbf{F_i}$ par rapport à l'origine *O* s'écrit :

$$\boxed{\mathbf{M_{O,i}} = \mathbf{r_i} \times \mathbf{F_i} = \left(\mathbf{r_{CM}} + \mathbf{r_i'}\right) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{r_{CM}} \times \mathbf{F_i} + \underbrace{\mathbf{r_i'} \times \mathbf{F}_i}_{\mathbf{M_{CM,i}}} \quad (6.48)}$$

- La somme des moments de force (6.48) est :

$$\boxed{\mathbf{M_O^{ext}} = \sum_i \mathbf{M_{O,i}^{ext}} = \mathbf{r_{CM}} \times \sum_i \mathbf{F_i^{ext}} + \sum_i \mathbf{M_{CM,i}^{ext}} = \mathbf{r_{CM}} \times \mathbf{F^{ext}} + \mathbf{M_{CM}^{ext}} \quad (6.49)}$$

- Le moment cinétique par rapport à l'origine *O* s'écrit :

$$\mathbf{L_{O,i}} = \mathbf{r_i} \times m_i \mathbf{v_i} = \left(\mathbf{r_{CM}} + \mathbf{r_i'}\right) \times m_i \left(\mathbf{v_{CM}} + \mathbf{v_i'}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \mathbf{L_{O,i}} = \mathbf{r_{CM}} \times m_i \mathbf{v_{CM}} + \mathbf{r_{CM}} \times m_i \mathbf{v_i'} + m_i \mathbf{r_i'} \times \mathbf{v_{CM}} + \underbrace{\mathbf{r_i'} \times m_i \mathbf{v_i'}}_{\mathbf{L_{CM,i}}} \quad (6.50)}$$

- La somme des moments cinétiques (6.50) est égale à :

$$\begin{aligned} \mathbf{L_O} &= \sum_i \mathbf{L_{O,i}} = \mathbf{r_{CM}} \times \sum_i m_i \mathbf{v_{CM}} + \mathbf{r_{CM}} \times \sum_i m_i \mathbf{v_i'} + \sum_i m_i \mathbf{r_i'} \times \mathbf{v_{CM}} + \sum_i \mathbf{L_{CM,i}} \\ &= \mathbf{r_{CM}} \times m \mathbf{v_{CM}} + \mathbf{r_{CM}} \times m \underbrace{\mathbf{v_{CM}}'}_{=\mathbf{0}} + m \underbrace{\mathbf{r_{CM}}'}_{=\mathbf{0}} \times \mathbf{v_{CM}} + \mathbf{L_{CM}} \end{aligned}$$

6.5.3 Théorème du moment cinétique pour un solide

6.5.3 Théorème du moment cinétique pour un solide

$$\boxed{\mathbf{L}_{\mathbf{O}} = \mathbf{r}_{\mathbf{CM}} \times m\mathbf{v}_{\mathbf{CM}} + \mathbf{L}_{\mathbf{CM}} \quad (6.51)}$$

6.5.3 Théorème du moment cinétique pour un solide

$$\boxed{\mathbf{L}_{\mathbf{O}} = \mathbf{r}_{\mathbf{CM}} \times m\mathbf{v}_{\mathbf{CM}} + \mathbf{L}_{\mathbf{CM}} \quad (6.51)}$$

- La dérivée temporelle de (6.51) s'écrit :

$$\dot{\mathbf{L}}_{\mathbf{O}} = \underbrace{\dot{\mathbf{r}}_{\mathbf{CM}}}_{=\mathbf{v}_{\mathbf{CM}}} \times m\mathbf{v}_{\mathbf{CM}} + \mathbf{r}_{\mathbf{CM}} \times m\dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{CM}} + \dot{\mathbf{L}}_{\mathbf{CM}}$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}}_{\mathbf{O}} = \mathbf{r}_{\mathbf{CM}} \times m\mathbf{a}_{\mathbf{CM}} + \dot{\mathbf{L}}_{\mathbf{CM}} \quad (6.52)}$$

6.5.3 *Théorème du moment cinétique pour un solide*

$$\boxed{\mathbf{L}_\mathbf{O} = \mathbf{r}_\mathbf{CM} \times m\mathbf{v}_\mathbf{CM} + \mathbf{L}_\mathbf{CM} \quad (6.51)}$$

- La dérivée temporelle de (6.51) s'écrit :

$$\dot{\mathbf{L}}_\mathbf{O} = \underbrace{\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{CM}}_{=\mathbf{v}_\mathbf{CM}} \times m\mathbf{v}_\mathbf{CM} + \mathbf{r}_\mathbf{CM} \times m\dot{\mathbf{v}}_\mathbf{CM} + \dot{\mathbf{L}}_\mathbf{CM}$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}}_\mathbf{O} = \mathbf{r}_\mathbf{CM} \times m\mathbf{a}_\mathbf{CM} + \dot{\mathbf{L}}_\mathbf{CM} \quad (6.52)}$$

- Le théorème du moment cinétique pour un solide devient :

$$\mathbf{M}_\mathbf{O}^\mathbf{ext} = \dot{\mathbf{L}}_\mathbf{O} \quad (O \text{ est un point fixe})$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_\mathbf{CM} \times \mathbf{F}^\mathbf{ext} + \mathbf{M}_\mathbf{CM}^\mathbf{ext} = \mathbf{r}_\mathbf{CM} \times m\mathbf{a}_\mathbf{CM} + \dot{\mathbf{L}}_\mathbf{CM} \quad \text{où} \quad \mathbf{F}^\mathbf{ext} = m\mathbf{a}_\mathbf{CM}$$

6.5.3 Théorème du moment cinétique pour un solide

$$\boxed{\mathbf{L}_\mathbf{O} = \mathbf{r}_\mathbf{CM} \times m\mathbf{v}_\mathbf{CM} + \mathbf{L}_\mathbf{CM} \quad (6.51)}$$

- La dérivée temporelle de (6.51) s'écrit :

$$\dot{\mathbf{L}}_\mathbf{O} = \underbrace{\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{CM}}_{=\mathbf{v}_\mathbf{CM}} \times m\mathbf{v}_\mathbf{CM} + \mathbf{r}_\mathbf{CM} \times m\dot{\mathbf{v}}_\mathbf{CM} + \dot{\mathbf{L}}_\mathbf{CM}$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}}_\mathbf{O} = \mathbf{r}_\mathbf{CM} \times m\mathbf{a}_\mathbf{CM} + \dot{\mathbf{L}}_\mathbf{CM} \quad (6.52)}$$

- Le théorème du moment cinétique pour un solide devient :

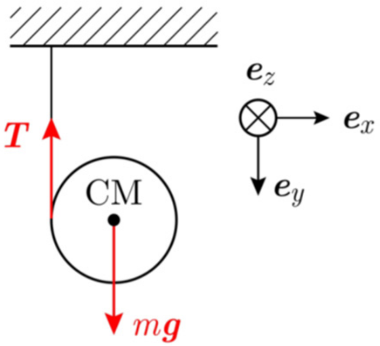
$$\mathbf{M}_\mathbf{O}^\mathbf{ext} = \dot{\mathbf{L}}_\mathbf{O} \quad (O \text{ est un point fixe})$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_\mathbf{CM} \times \mathbf{F}^\mathbf{ext} + \mathbf{M}_\mathbf{CM}^\mathbf{ext} = \mathbf{r}_\mathbf{CM} \times m\mathbf{a}_\mathbf{CM} + \dot{\mathbf{L}}_\mathbf{CM} \quad \text{où} \quad \mathbf{F}^\mathbf{ext} = m\mathbf{a}_\mathbf{CM}$$

- Ainsi, $\boxed{\mathbf{M}_\mathbf{CM}^\mathbf{ext} = \dot{\mathbf{L}}_\mathbf{CM} \quad (6.53)}$

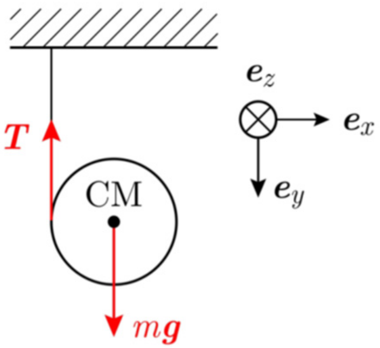
Ce théorème est valable même si le centre de masse est accéléré.

6.5.4 Yo-yo



$\boldsymbol{T}$
CM
$m\boldsymbol{g}$
$\boldsymbol{e}_z$
$\boldsymbol{e}_x$
$\boldsymbol{e}_y$

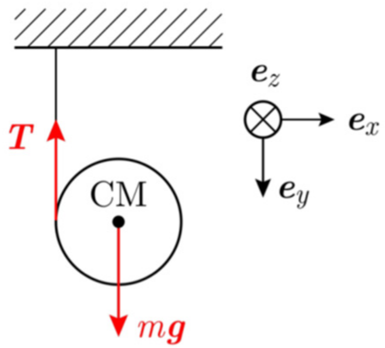
6.5.4 Yo-yo



- Objet : disque plein $\left(I_{CM} = \frac{1}{2} mR^2 \right)$
- Forces : poids $m\mathbf{g}$, tension $\mathbf{T}$
- Newton : $m\mathbf{g} + \mathbf{T} = m\mathbf{a}_{CM}$

Selon $\mathbf{e}_y$: $\boxed{mg - T = ma_{CM} \quad (6.54)}$

6.5.4 Yo-yo



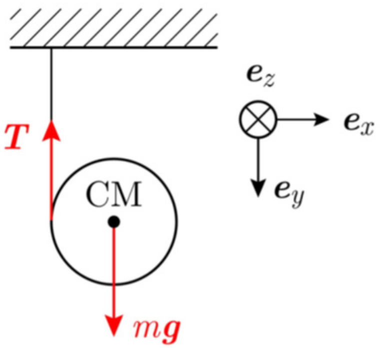
- <u>Objet</u> : disque plein $\left(I_{CM} = \frac{1}{2} mR^2 \right)$
- <u>Forces</u> : poids $m\mathbf{g}$, tension $\mathbf{T}$
- <u>Newton</u> : $m\mathbf{g} + \mathbf{T} = m\mathbf{a}_{CM}$

Selon $\mathbf{e}_y$: $\boxed{mg - T = ma_{CM} \quad (6.54)}$

- <u>Rotation</u> (par rapport au centre de masse) : $\mathbf{M}_{CM}^{ext} = \mathbf{M}_{CM}(\mathbf{T}) = I_{CM}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{CM}$

Selon $\mathbf{e}_z$: $\boxed{RT = I_{CM}\dot{\omega}_{CM} = \frac{1}{2} mR^2 \dot{\omega}_{CM} \quad (6.55)}$

6.5.4 Yo-yo



- Objet : disque plein $\left(I_{CM} = \frac{1}{2} mR^2 \right)$

- Forces : poids $m\mathbf{g}$, tension $\mathbf{T}$
- Newton : $m\mathbf{g} + \mathbf{T} = m\mathbf{a}_{\mathbf{CM}}$

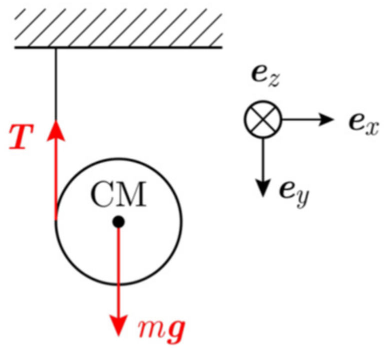
Selon $\mathbf{e}_y$: $\boxed{mg - T = ma_{CM} \quad (6.54)}$

- Rotation (par rapport au centre de masse) : $\mathbf{M}_{\mathbf{CM}}^{\mathbf{ext}} = \mathbf{M}_{\mathbf{CM}}\left(\mathbf{T}\right) = I_{CM}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{CM}}$

Selon $\mathbf{e}_z$: $\boxed{RT = I_{CM}\dot{\omega}_{CM} = \frac{1}{2} mR^2 \dot{\omega}_{CM} \quad (6.55)}$

- Liaison (le fil se déroule) : $\boxed{v_{CM} = R\omega_{CM} \Rightarrow a_{CM} = R\dot{\omega}_{CM} \quad (6.56)}$

6.5.4 Yo-yo



- Objet : disque plein $\left(I_{CM} = \frac{1}{2} mR^2 \right)$
- Forces : poids $m\mathbf{g}$, tension $\mathbf{T}$
- Newton : $m\mathbf{g} + \mathbf{T} = m\mathbf{a}_{CM}$

Selon $\mathbf{e}_y$: $\boxed{mg - T = ma_{CM} \quad (6.54)}$

- Rotation (par rapport au centre de masse) : $\mathbf{M}_{CM}^{ext} = \mathbf{M}_{CM}(\mathbf{T}) = I_{CM}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{CM}$

Selon $\mathbf{e}_z$: $\boxed{RT = I_{CM}\dot{\omega}_{CM} = \frac{1}{2} mR^2 \dot{\omega}_{CM} \quad (6.55)}$

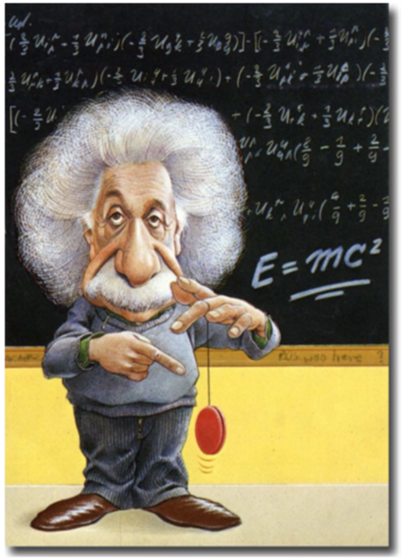
- Liaison (le fil se déroule) : $\boxed{v_{CM} = R\omega_{CM} \Rightarrow a_{CM} = R\dot{\omega}_{CM} \quad (6.56)}$

- Résolution : Soit $\omega \equiv \omega_{CM}$ alors $a \equiv a_{CM} = R\dot{\omega}$

$$\left.\begin{array}{r} mg - T = mR\dot{\omega} \\ T = \frac{1}{2} mR\dot{\omega} \end{array}\right\} \Rightarrow mg = \frac{3}{2} mR\dot{\omega} \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{2g}{3R} \qquad \boxed{\Rightarrow a = \frac{2}{3} g \text{ et } T = \frac{1}{3} mg \quad (6.57)}$$

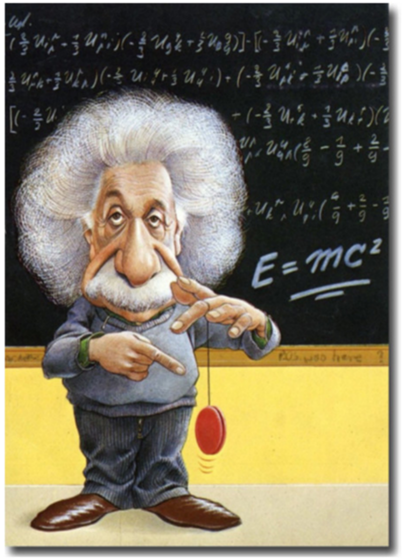
6.5.4 Yo-yo

Expérience :



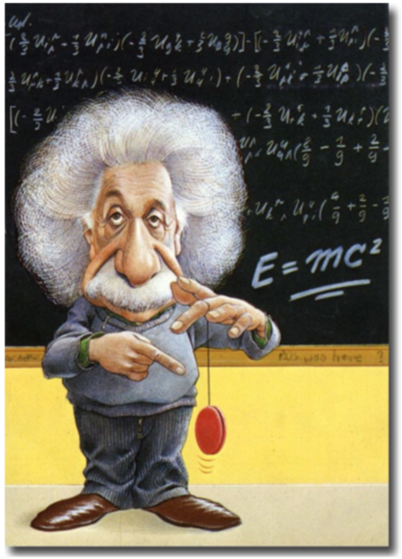
6.5.4 Yo-yo

Expérience : Yo-yo



6.5.4 Yo-yo

Expérience : Yo-yo



- L'accélération du centre de masse d'un yo-yo est égale à $\frac{2}{3}g$, si le yo-yo est considéré comme un cylindre plein.

- La tension dans le fil vaut 1/3 du poids du yo-yo.

6.5.4 Yo-yo

Expérience :

6.5.4 Yo-yo

Expérience : Roue de Maxwell (yo-yo)

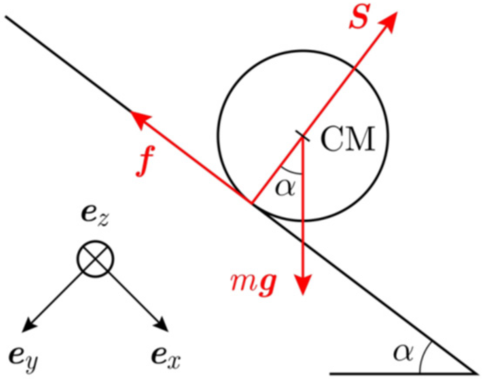
6.5.4 Yo-yo

Expérience : Roue de Maxwell (yo-yo)

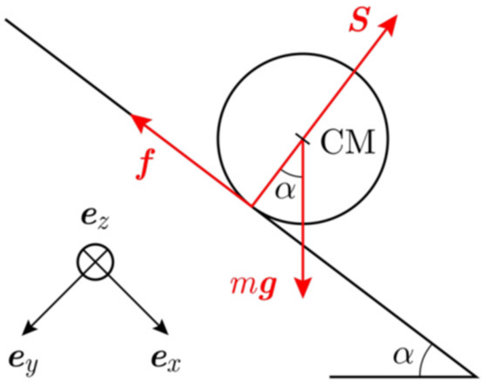
- L'accélération $a = \frac{2}{3} g$ de la roue de Maxwell est déterminée expérimentalement à l'aide de capteurs de vitesse connaissant la distance verticale qui les sépare.

- À l'aide de capteurs de force fixés aux points de suspension des fils, on montre que la tension $T = \frac{1}{3} mg$.

6.5.5 Cylindre roulant sans glisser



6.5.5 Cylindre roulant sans glisser

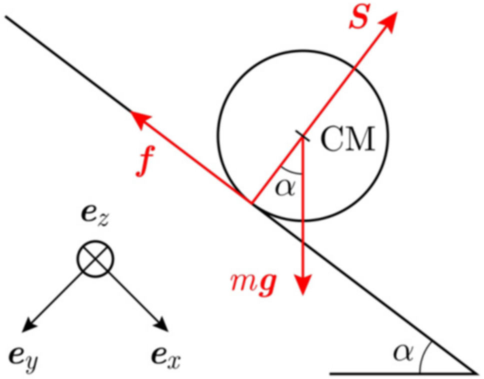


- <u>Objet</u> : cylindre
- <u>Forces</u> : poids $m\mathbf{g}$, soutien $\mathbf{S}$, frottement $\mathbf{f}$
- <u>Newton</u> : $m\mathbf{g} + \mathbf{S} + \mathbf{f} = m\mathbf{a}$

Selon $\mathbf{e}_x$: $\boxed{mg\sin\alpha - f = ma \quad (6.58)}$

Selon $\mathbf{e}_y$: $mg\cos\alpha - S = 0$

6.5.5 Cylindre roulant sans glisser



- Objet : cylindre
- Forces : poids $m\mathbf{g}$, soutien $\mathbf{S}$, frottement $\mathbf{f}$
- Newton : $m\mathbf{g} + \mathbf{S} + \mathbf{f} = m\mathbf{a}$

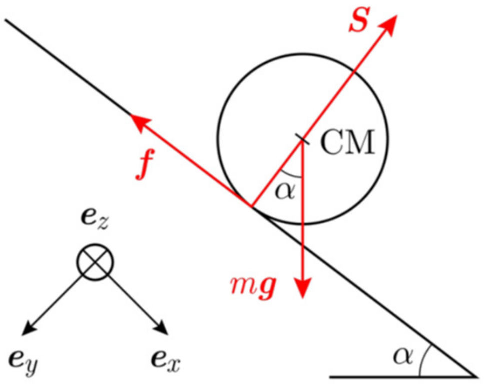
Selon $\mathbf{e}_x$: $\boxed{mg\sin\alpha - f = ma \quad (6.58)}$

Selon $\mathbf{e}_y$: $mg\cos\alpha - S = 0$

- Rotation (par rapport au centre de masse) : $\mathbf{M}_{\mathbf{CM}}^{\mathbf{ext}} = \mathbf{M}_{\mathbf{CM}}(\mathbf{f}) = I_{CM}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{CM}}$

Selon $\mathbf{e}_z$: $\boxed{Rf = I_{\mathrm{CM}}\dot{\omega}_{\mathrm{CM}} \quad (6.59)}$

6.5.5 Cylindre roulant sans glisser



- Objet : cylindre
- Forces : poids $m\mathbf{g}$, soutien $\mathbf{S}$, frottement $\mathbf{f}$
- Newton : $m\mathbf{g} + \mathbf{S} + \mathbf{f} = m\mathbf{a}$

Selon $\mathbf{e}_x$: $\boxed{mg\sin\alpha - f = ma \quad (6.58)}$

Selon $\mathbf{e}_y$: $mg\cos\alpha - S = 0$

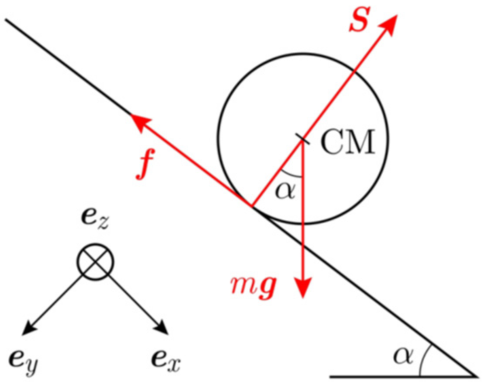
- Rotation (par rapport au centre de masse) : $\mathbf{M}_{\mathbf{CM}}^{\mathbf{ext}} = \mathbf{M}_{\mathbf{CM}}(\mathbf{f}) = I_{CM}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{CM}}$

Selon $\mathbf{e}_z$: $\boxed{Rf = I_{\mathrm{CM}}\dot{\omega}_{\mathrm{CM}} \quad (6.59)}$

- Liaison (le cylindre roule sans glisser : vitesse du point de contact nulle) :

$\boxed{v = R\omega_{\mathrm{CM}} \Rightarrow a = R\dot{\omega}_{\mathrm{CM}} \quad (6.60)}$

6.5.5 Cylindre roulant sans glisser



- <u>Objet</u> : cylindre
- <u>Forces</u> : poids $m\mathbf{g}$, soutien $\mathbf{S}$, frottement $\mathbf{f}$
- <u>Newton</u> : $m\mathbf{g} + \mathbf{S} + \mathbf{f} = m\mathbf{a}$

Selon $\mathbf{e}_x$: $\boxed{mg\sin\alpha - f = ma \quad (6.58)}$

Selon $\mathbf{e}_y$: $mg\cos\alpha - S = 0$

- <u>Rotation</u> (par rapport au centre de masse) : $\mathbf{M}_{\mathbf{CM}}^{\mathbf{ext}} = \mathbf{M}_{\mathbf{CM}}(\mathbf{f}) = I_{CM}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{CM}}$

Selon $\mathbf{e}_z$: $\boxed{Rf = I_{\mathrm{CM}}\dot{\omega}_{\mathrm{CM}} \quad (6.59)}$

- <u>Liaison</u> (le cylindre roule sans glisser : vitesse du point de contact nulle) :

$$\boxed{v = R\omega_{\mathrm{CM}} \Rightarrow a = R\dot{\omega}_{\mathrm{CM}} \quad (6.60)}$$

- <u>Résolution</u> : Soit $\omega \equiv \omega_{CM}$ alors $a = R\dot{\omega}$ $\quad \Rightarrow a_{\text{cyl. plein}} > a_{\text{cyl. creux}}$ (masse identique)

$$\left.\begin{aligned} mg\sin\alpha - f &= mR\dot{\omega} \\ Rf &= I_{\mathrm{CM}}\dot{\omega} \end{aligned}\right\} \Rightarrow mgR\sin\alpha = \left(mR^2 + I_{\mathrm{CM}}\right)\dot{\omega} \quad \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{mgR\sin\alpha}{mR^2 + I_{\mathrm{CM}}} \Rightarrow a = \frac{g\sin\alpha}{1 + I_{\mathrm{CM}}/mR^2}$$

6.5.5 Cylindre roulant sans glisser

Expérience :

6.5.5 Cylindre roulant sans glisser

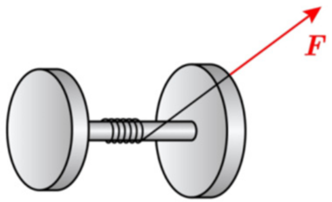
Expérience : Cylindres plein et creux

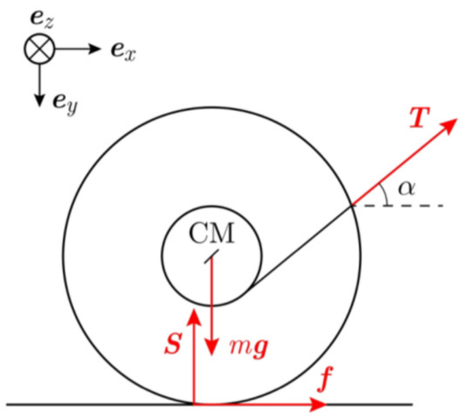
6.5.5 Cylindre roulant sans glisser

Expérience : Cylindres plein et creux

- Deux cylindres de masse et de rayon égaux sont lâchés initialement au repos et roulent sans glisser sur un plan incliné. Le cylindre plein a un moment d'inertie plus faible et donc une accélération plus grande que le cylindre creux. Il arrive donc en premier en bas du plan incliné.

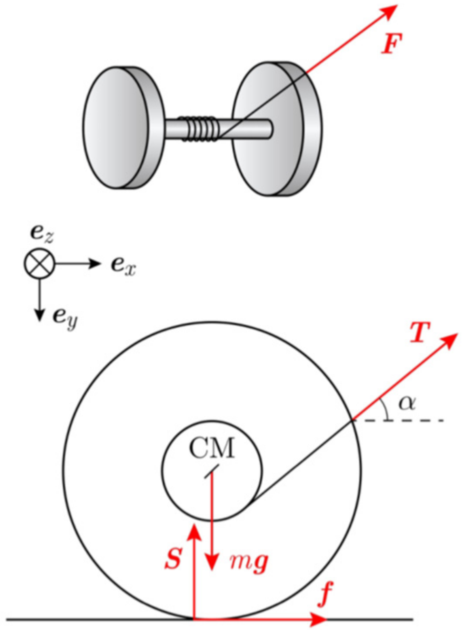
6.5.6 Haltère tiré par un fil





Remarque :

6.5.6 Haltère tiré par un fil

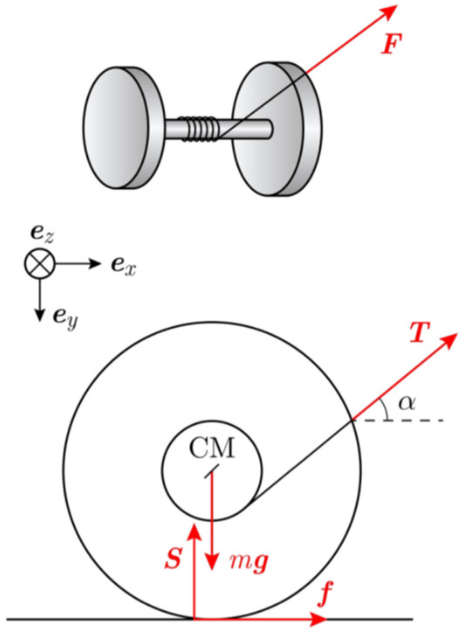


- L'haltère est formé d'une poignée, d'un cylindre de rayon r, et de deux disques de rayon R (où $R >> r$). Son moment d'inertie est la somme des moments d'inertie.

  $I_{CM} = I_{CM}(\text{poignée}) + 2I_{CM}(\text{disque})$

Remarque :

6.5.6 Haltère tiré par un fil



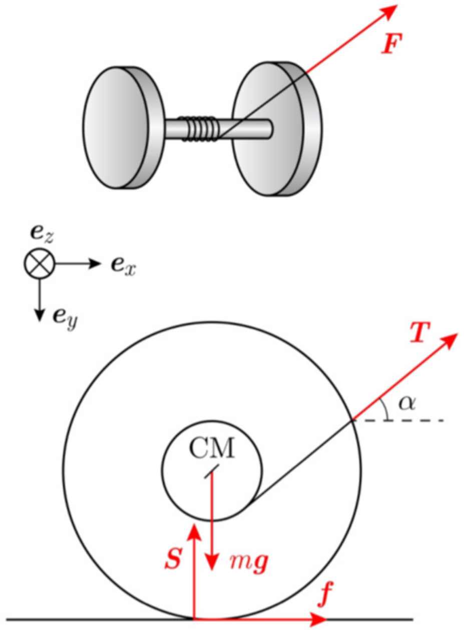
- L'haltère est formé d'une poignée, d'un cylindre de rayon r, et de deux disques de rayon R (où $R >> r$). Son moment d'inertie est la somme des moments d'inertie.
  $I_{CM} = I_{CM}(\text{poignée}) + 2I_{CM}(\text{disque})$

- Objet : haltère
- Forces : poids $m\mathbf{g}$, soutien $\mathbf{S}$, frottement $\mathbf{f}$, tension $\mathbf{T}$
- Newton :

$$\boxed{m\mathbf{g} + \mathbf{S} + \mathbf{f} + \mathbf{T} = m\mathbf{a}_{CM} \quad (6.61)}$$

Remarque :

6.5.6 Haltère tiré par un fil



- L'haltère est formé d'une poignée, d'un cylindre de rayon r, et de deux disques de rayon R (où $R >> r$). Son moment d'inertie est la somme des moments d'inertie.
  $I_{CM} = I_{CM}(\text{poignée}) + 2I_{CM}(\text{disque})$

- Objet : haltère
- Forces : poids $m\mathbf{g}$, soutien $\mathbf{S}$, frottement $\mathbf{f}$, tension $\mathbf{T}$
- Newton :

$$\boxed{m\mathbf{g} + \mathbf{S} + \mathbf{f} + \mathbf{T} = m\mathbf{a}_{\mathbf{CM}} \quad (6.61)}$$

Remarque :

On ne peut pas a priori donner le sens du frottement $\mathbf{f}$ qui est horizontal $\mathbf{f} = f\mathbf{e}_x$ où $f \in \mathbb{R}$

Selon $\mathbf{e}_x$: $\boxed{f + T\cos\alpha = ma_{CM} \quad (6.62)}$

Selon $\mathbf{e}_y$: $\boxed{mg - S - T\sin\alpha = 0 \quad (6.63)}$

6.5.6 Haltère tiré par un fil

6.5.6 Haltère tiré par un fil

- Rotation (par rapport au centre de masse) : $\mathbf{M}_{\mathbf{CM}}^{\mathbf{ext}} = \mathbf{M}_{\mathbf{CM}}(\mathbf{f}) + \mathbf{M}_{\mathbf{CM}}(\mathbf{T}) = I_{CM}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{CM}}$

Selon $\mathbf{e}_z$: $\boxed{-Rf - rT = I_{\mathrm{CM}}\dot{\omega}_{\mathrm{CM}} \quad (6.64)}$

6.5.6 Haltère tiré par un fil

- Rotation (par rapport au centre de masse) : $\mathbf{M}_{\mathbf{CM}}^{\mathbf{ext}} = \mathbf{M}_{\mathbf{CM}}(\mathbf{f}) + \mathbf{M}_{\mathbf{CM}}(\mathbf{T}) = I_{CM}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{CM}}$

Selon $\mathbf{e}_z$: $\boxed{-Rf - rT = I_{\mathrm{CM}}\dot{\omega}_{\mathrm{CM}} \quad (6.64)}$

- Liaison (l'haltère roule sans glisser : vitesse du point de contact nulle) :

$$v_{\mathrm{CM}} = R\omega_{\mathrm{CM}} \Rightarrow a_{\mathrm{CM}} = R\dot{\omega}_{\mathrm{CM}}$$

6.5.6 Haltère tiré par un fil

- Rotation (par rapport au centre de masse) : $\mathbf{M}_{\mathbf{CM}}^{\mathbf{ext}} = \mathbf{M}_{\mathbf{CM}}(\mathbf{f}) + \mathbf{M}_{\mathbf{CM}}(\mathbf{T}) = I_{CM}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{CM}}$

Selon $\mathbf{e}_z$: $\boxed{-Rf - rT = I_{\text{CM}}\dot{\omega}_{\text{CM}} \quad (6.64)}$

- Liaison (l'haltère roule sans glisser : vitesse du point de contact nulle) :

$$v_{\text{CM}} = R\omega_{\text{CM}} \Rightarrow a_{\text{CM}} = R\dot{\omega}_{\text{CM}}$$

- Résolution : Soit $\omega \equiv \omega_{CM}$ et $a \equiv a_{\text{CM}} = R\dot{\omega}$

$$\left.\begin{array}{r} f + T\cos\alpha = mR\dot{\omega} \\ -Rf - rT = I_{\text{CM}}\dot{\omega} \end{array}\right\} \Rightarrow (R\cos\alpha - r)T = \left(mR^2 + I_{\text{CM}}\right)\dot{\omega} \qquad \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{R\cos\alpha - r}{mR^2 + I_{\text{CM}}}T \quad \text{et} \quad \boxed{a = R\dot{\omega} = \frac{\cos\alpha - \frac{r}{R}}{m + \frac{I_{\text{CM}}}{R^2}}T \quad (6.65)}$$

6.5.6 Haltère tiré par un fil

- Rotation (par rapport au centre de masse) : $\mathbf{M}_{\mathbf{CM}}^{\mathbf{ext}} = \mathbf{M}_{\mathbf{CM}}(\mathbf{f}) + \mathbf{M}_{\mathbf{CM}}(\mathbf{T}) = I_{CM}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{CM}}$

Selon $\mathbf{e}_z$: $\boxed{-Rf - rT = I_{\mathrm{CM}}\dot{\omega}_{\mathrm{CM}} \quad (6.64)}$

- Liaison (l'haltère roule sans glisser : vitesse du point de contact nulle) :

$$v_{\mathrm{CM}} = R\omega_{\mathrm{CM}} \Rightarrow a_{\mathrm{CM}} = R\dot{\omega}_{\mathrm{CM}}$$

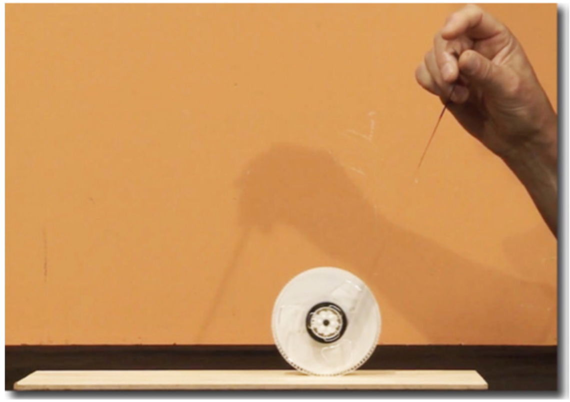
- Résolution : Soit $\omega \equiv \omega_{CM}$ et $a \equiv a_{\mathrm{CM}} = R\dot{\omega}$

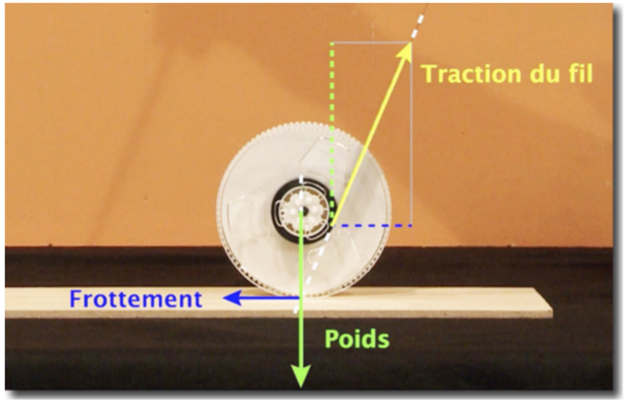
$$\left.\begin{aligned} f + T\cos\alpha &= mR\dot{\omega} \\ -Rf - rT &= I_{\mathrm{CM}}\dot{\omega} \end{aligned}\right\} \Rightarrow (R\cos\alpha - r)T = \left(mR^2 + I_{\mathrm{CM}}\right)\dot{\omega} \quad \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{R\cos\alpha - r}{mR^2 + I_{\mathrm{CM}}}T \text{ et } \boxed{a = R\dot{\omega} = \frac{\cos\alpha - \frac{r}{R}}{m + \frac{I_{\mathrm{CM}}}{R^2}}T \quad (6.65)}$$

- Discussion :
- Si $\cos\alpha > \frac{r}{R}$, l'haltère accélère vers la droite ($a > 0$).
- Si $\cos\alpha < \frac{r}{R}$, l'haltère accélère vers la gauche ($a < 0$).
- Si $\cos\alpha = \frac{r}{R}$, l'haltère est immobile ($a = 0$).

6.5.6 Haltère tiré par un fil

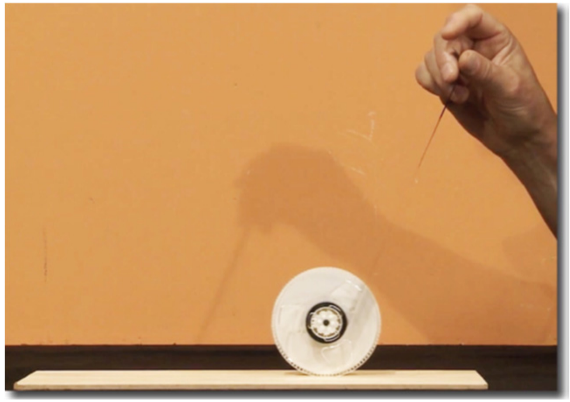
Expérience :

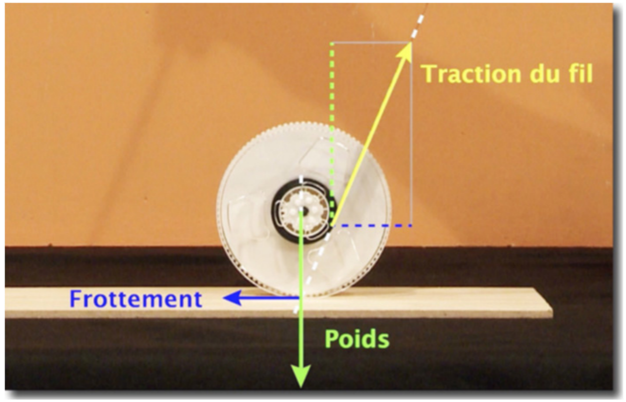




6.5.6 Haltère tiré par un fil

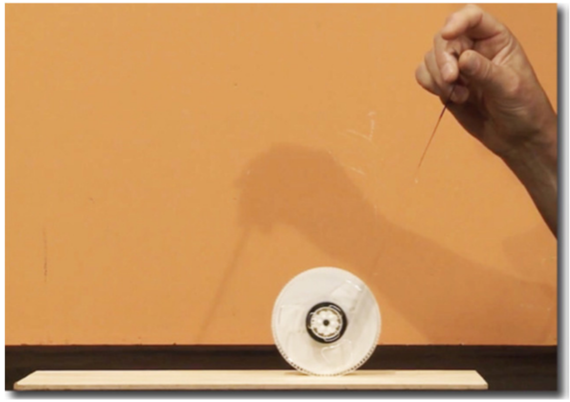
Expérience : Roulement d'une bobine tirée par un fil

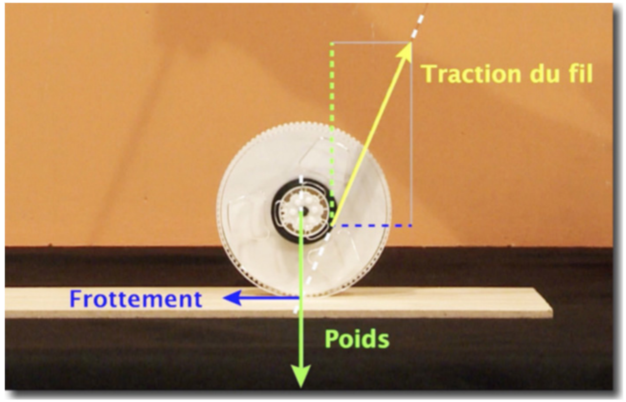




6.5.6 *Haltère tiré par un fil*

Expérience : Roulement d'une bobine tirée par un fil





- Si l'angle α entre le fil de la bobine et la verticale est tel que $\alpha < \arccos(r/R)$, la bobine se déplace vers la droite.

- Si $\alpha > \arccos(r/R)$, la bobine se déplace vers la gauche.

- Si $\alpha = \arccos(r/R)$, la bobine tourne sur place. Cet angle est tel que le fil se trouve dans le prolongement du point de contact entre la bobine et la surface horizontale.

6.6 Théorème de l'énergie cinétique d'un solide

6.6.1 Théorème de l'énergie cinétique du centre de masse

6.6.1 Théorème de l'énergie cinétique du centre de masse

- Le théorème de l'énergie cinétique associée au mouvement du centre de masse d'un corps d'une position initiale $\mathbf{r_1}$ à une position finale $\mathbf{r_2}$ s'écrit :

$$\boxed{E_{\text{cin,CM}}(2) - E_{\text{cin,CM}}(1) = W_{1\to 2}^{\text{ext}} \quad (6.66)}$$

où $E_{\text{cin,CM}} = \frac{1}{2} m v_{\text{CM}}^2$ et $W_{1\to 2}^{\text{ext}} = \int_1^2 \mathbf{F}^{\mathbf{ext}} \cdot d\mathbf{r}_{\mathbf{CM}}$

avec $\mathbf{F}^{\mathbf{ext}}$ la résultante des forces extérieures.

6.6.1 Théorème de l'énergie cinétique du centre de masse

- Le théorème de l'énergie cinétique associée au mouvement du centre de masse d'un corps d'une position initiale $\mathbf{r_1}$ à une position finale $\mathbf{r_2}$ s'écrit :

$$\boxed{E_{\text{cin,CM}}(2) - E_{\text{cin,CM}}(1) = W_{1\to2}^{\text{ext}} \quad (6.66)}$$

où $E_{\text{cin,CM}} = \frac{1}{2} m v_{\text{CM}}^2$ et $W_{1\to2}^{\text{ext}} = \int_1^2 \mathbf{F}^{\mathbf{ext}} \cdot d\mathbf{r}_{\mathbf{CM}}$

avec $\mathbf{F}^{\mathbf{ext}}$ la résultante des forces extérieures.

- La dérivée temporelle de l'énergie cinétique du centre de masse s'écrit :

$$\boxed{\dot{E}_{\text{cin,CM}} = \mathbf{F}^{\mathbf{ext}} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{CM}} \quad (6.67)}$$

6.6.2 Théorème de l'énergie cinétique d'un corps

6.6.2 Théorème de l'énergie cinétique d'un corps

- Un corps est un ensemble de points matériels.

- L'énergie cinétique du corps s'écrit :

$$\boxed{E_{\text{cin}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (6.68)}$$

6.6.2 Théorème de l'énergie cinétique d'un corps

- Un corps est un ensemble de points matériels.

- L'énergie cinétique du corps s'écrit :

$$\boxed{E_{\text{cin}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (6.68)}$$

- La variation d'énergie cinétique est due au travail des forces qui s'exercent sur chaque point matériel.

$$\boxed{\dot{E}_{\text{cin}} = \sum_i \mathbf{F_i} \cdot \mathbf{v_i} = \sum_i \mathbf{F_i^{ext}} \cdot \mathbf{v_i} + \sum_i \mathbf{F_i^{int}} \cdot \mathbf{v_i} \quad (6.69)}$$

Ainsi, $\boxed{dE_{\text{cin}} = \sum_i \mathbf{F_i^{ext}} \cdot d\mathbf{r_i} + \sum_i \mathbf{F_i^{int}} \cdot d\mathbf{r_i} = \delta W^{\text{ext}} + \delta W^{\text{int}} \quad (6.70)}$

6.6.2 Théorème de l'énergie cinétique d'un corps

- Un corps est un ensemble de points matériels.

- L'énergie cinétique du corps s'écrit :

$$\boxed{E_{\text{cin}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (6.68)}$$

- La variation d'énergie cinétique est due au travail des forces qui s'exercent sur chaque point matériel.

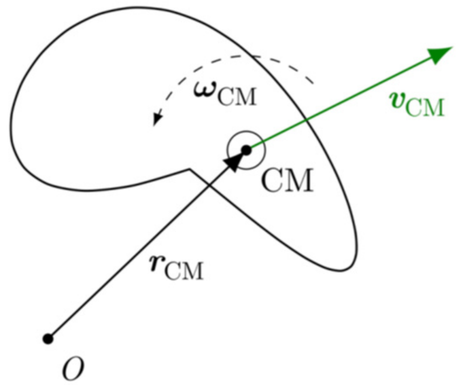
$$\boxed{\dot{E}_{\text{cin}} = \sum_i \mathbf{F_i} \cdot \mathbf{v_i} = \sum_i \mathbf{F_i^{ext}} \cdot \mathbf{v_i} + \sum_i \mathbf{F_i^{int}} \cdot \mathbf{v_i} \quad (6.69)}$$

Ainsi, $\boxed{dE_{\text{cin}} = \sum_i \mathbf{F_i^{ext}} \cdot d\mathbf{r_i} + \sum_i \mathbf{F_i^{int}} \cdot d\mathbf{r_i} = \delta W^{\text{ext}} + \delta W^{\text{int}} \quad (6.70)}$

- La variation d'énergie cinétique (totale) du corps est donnée par le travail des forces intérieures et extérieures.

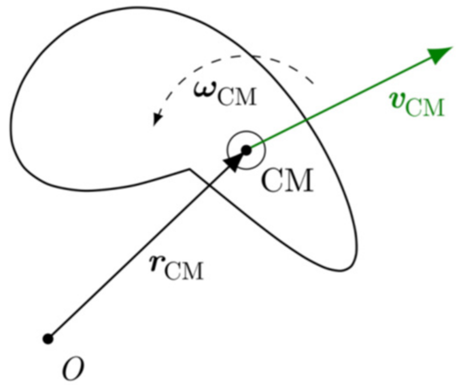
$$\boxed{E_{\text{cin}}(2) - E_{\text{cin}}(1) = W_{1\to 2}^{\text{ext}} + W_{1\to 2}^{\text{int}} \quad (6.71)}$$

6.6.3 Énergie cinétique d'un solide indéformable



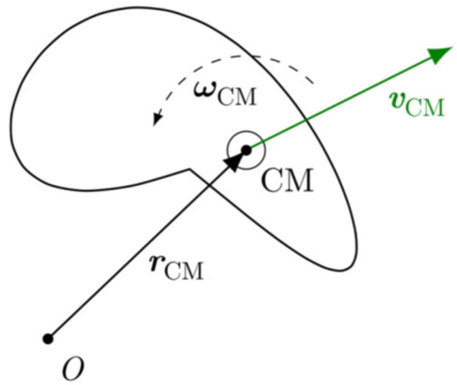
6.6.3 Énergie cinétique d'un solide indéformable

- Le mouvement d'un solide indéformable est caractérisé par la vitesse $\mathbf{v}_{CM}$ du CM et la vitesse angulaire de rotation autour du centre de masse ω_{CM}.



6.6.3 Énergie cinétique d'un solide indéformable

- Le mouvement d'un solide indéformable est caractérisé par la vitesse $\mathbf{v}_{\mathbf{CM}}$ du CM et la vitesse angulaire de rotation autour du centre de masse $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{CM}}$.

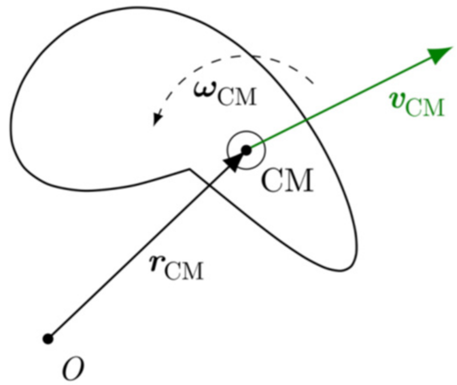


- La vitesse d'un point matériel du solide s'écrit :

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{\mathbf{CM}} + \mathbf{v}_i' = \mathbf{v}_{\mathbf{CM}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{CM}} \times \mathbf{r}_i' \quad \text{où} \quad \mathbf{v}_i' = \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{CM}} \times \mathbf{r}_i'$$

car le point matériel de masse m_i a un mouvement circulaire autour du centre de masse.

6.6.3 Énergie cinétique d'un solide indéformable



- Le mouvement d'un solide indéformable est caractérisé par la vitesse $\mathbf{v_{CM}}$ du CM et la vitesse angulaire de rotation autour du centre de masse $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{CM}}$.

- La vitesse d'un point matériel du solide s'écrit :

$$\mathbf{v_i} = \mathbf{v_{CM}} + \mathbf{v_i'} = \mathbf{v_{CM}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{CM}} \times \mathbf{r_i'} \quad \text{où} \quad \mathbf{v_i'} = \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{CM}} \times \mathbf{r_i'}$$

car le point matériel de masse m_i a un mouvement circulaire autour du centre de masse.

- Son énergie cinétique s'écrit :

$$E_{\text{cin}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\mathbf{v_{CM}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{CM}} \times \mathbf{r_i'} \right)^2$$

6.6.3 Énergie cinétique d'un solide indéformable

6.6.3 Énergie cinétique d'un solide indéformable

Ainsi, $E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}\sum_i m_i\left(v_{\text{CM}}^2 + 2\mathbf{v_{CM}}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{CM}}\times\mathbf{r_i'}\right) + \omega_{\text{CM}}^2 r_i'^2\right)$

$$= \frac{1}{2}mv_{\text{CM}}^2 + \mathbf{v_{CM}}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{CM}}\times m\underbrace{\mathbf{r_{CM}'}}_{=\mathbf{0}}\right) + \frac{1}{2}\left(\underbrace{\sum_i m_i r_i'^2}_{=I_{\text{CM}}}\right)\omega_{\text{CM}}^2$$

$$= \frac{1}{2}mv_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega_{\text{CM}}^2$$

6.6.3 Énergie cinétique d'un solide indéformable

Ainsi, $E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(v_{\text{CM}}^2 + 2\mathbf{v}_{\mathbf{CM}} \cdot \left(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{CM}} \times \mathbf{r}_{\mathbf{i}}'\right) + \omega_{\text{CM}}^2 r_i'^2\right)$

$$= \frac{1}{2} m v_{\text{CM}}^2 + \mathbf{v}_{\mathbf{CM}} \cdot \left(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{CM}} \times m \underbrace{\mathbf{r}_{\mathbf{CM}}'}_{=\mathbf{0}}\right) + \frac{1}{2}\left(\underbrace{\sum_i m_i r_i'^2}_{=I_{\text{CM}}}\right)\omega_{\text{CM}}^2$$

$$= \frac{1}{2} m v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega_{\text{CM}}^2$$

- L'énergie cinétique est la somme de l'énergie cinétique du centre de masse $E_{\text{cin,CM}}$ et de l'énergie cinétique de rotation propre $E_{\text{cin,rot}}$ du solide autour du centre de masse :

$$\boxed{E_{\text{cin}} = E_{\text{cin,CM}} + E_{\text{cin,rot}} \quad (6.72)}$$

où $\boxed{E_{\text{cin,CM}} = \frac{1}{2} m v_{\text{CM}}^2 \quad (6.73)}$ et $\boxed{E_{\text{cin,rot}} = \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega_{\text{CM}}^2 \quad (6.74)}$