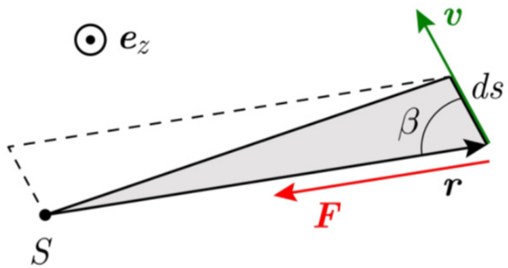
Leçon 19 – 06/05/2025

6. Rotation en deux dimensions

- 6.4 Théorème du moment cinétique
- 6.5 Référentiel du centre de masse

6.4.6 Lois de Kepler

En effet, c'est une conséquence du théorème du moment cinétique :

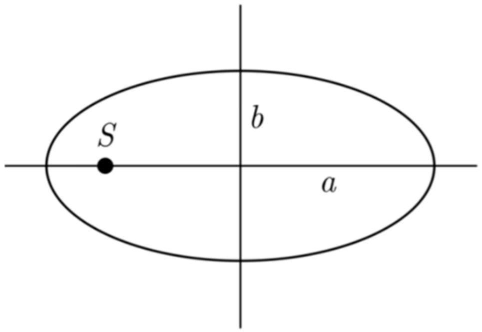


- $\mathbf{M_S} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{L_S} = L_S\mathbf{e}_z = \mathbf{cste}$
- $L_S = r\sin\beta\, mv = \text{cste}$
- $dA = (1/2) r ds \sin\beta$

Ainsi, la vitesse aréolaire s'écrit :

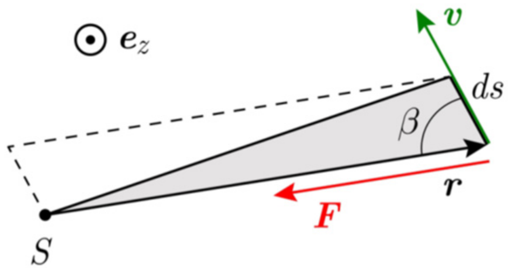
$$\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r \frac{ds}{dt} \sin\beta = \frac{1}{2} rv\sin\beta = \frac{L_s}{2m} = \text{cste}$$

<u>3ème loi de Kepler</u> :



6.4.6 Lois de Kepler

En effet, c'est une conséquence du théorème du moment cinétique :

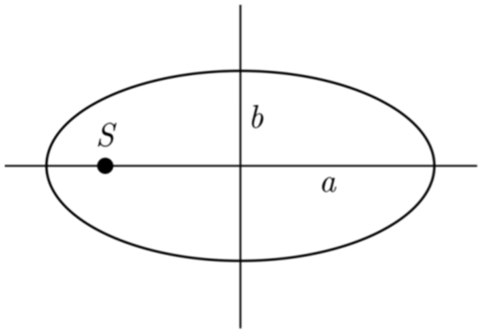


- $\mathbf{M_S} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{L_S} = L_S\mathbf{e}_z = \mathbf{cste}$
- $L_S = r\sin\beta\, mv = \text{cste}$
- $dA = (1/2)rds\,\sin\beta$

Ainsi, la vitesse aréolaire s'écrit :

$$\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r \frac{ds}{dt} \sin\beta = \frac{1}{2} rv\sin\beta = \frac{L_s}{2m} = \text{cste}$$

<u>3ème loi de Kepler</u> :



Le rapport de la période de révolution T de la planète au carré divisée par le demi-grand axe a de l'ellipse au cube est une constante.

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \text{cste} \quad (6.19)}$$

6.4.6 Lois de Kepler

Expérience :

6.4.6 Lois de Kepler

Expérience : Force centrale et 2ème loi de Kepler

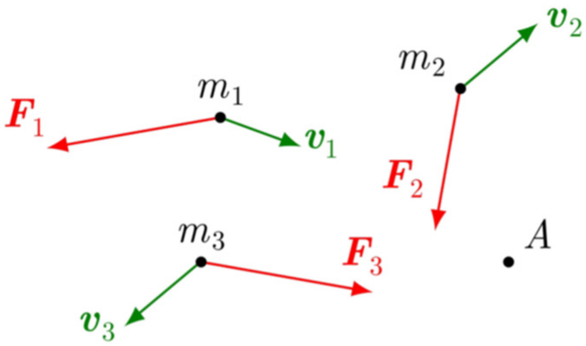
6.4.6 Lois de Kepler

Expérience : Force centrale et 2ème loi de Kepler

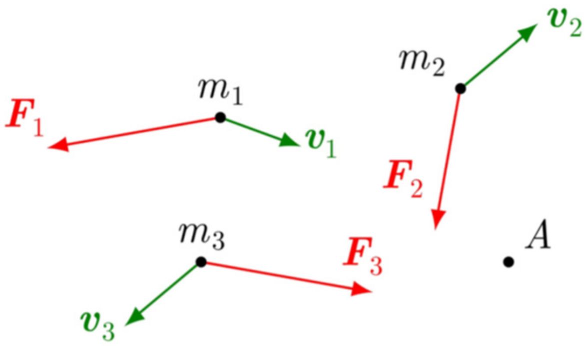
- La force de gravitation, comme la tension du fil attaché au puck, est une force centrale dirigée en tout temps vers un point fixe, à savoir le soleil.

- Les aires balayées durant des intervalles de temps égaux sont égales.

6.4.7 Système de points matériels (objet)



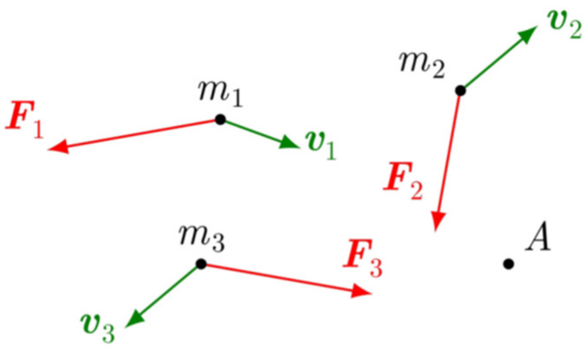
6.4.7 Système de points matériels (objet)



2ème loi de Newton (translation)

$$\boxed{\mathbf{F_i} = \dot{\mathbf{P}}_\mathbf{i} = m_i \mathbf{a_i} \quad (6.20)}$$

6.4.7 Système de points matériels (objet)



2

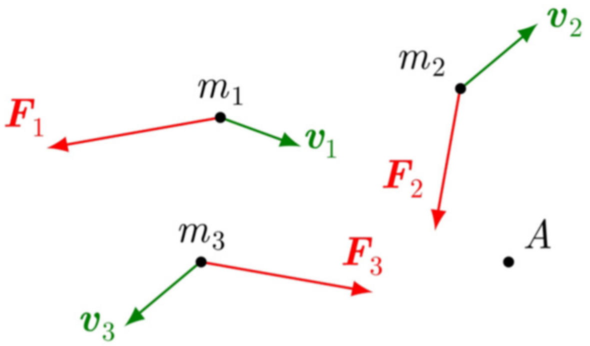
2$^{\text{ème}}$ loi de Newton (translation)

$$\boxed{\mathbf{F_i} = \dot{\mathbf{P}}_\mathbf{i} = m_i \mathbf{a_i} \quad (6.20)}$$

2$^{\text{ème}}$ loi de Newton (rotation)

$$\boxed{\mathbf{M_{A,i}} = \dot{\mathbf{L}}_\mathbf{A,i} \quad (6.21)}$$

6.4.7 Système de points matériels (objet)



<u>$2^{ème}$ loi de Newton</u> (translation)

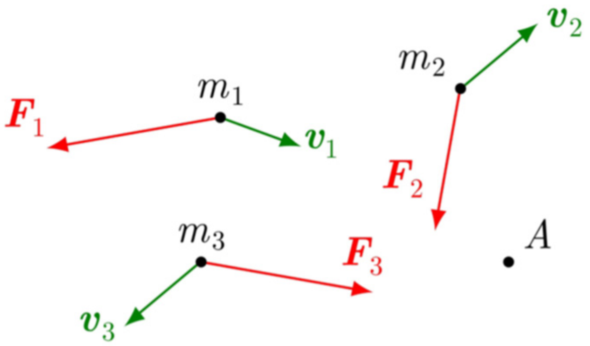
$$\boxed{\mathbf{F_i} = \dot{\mathbf{P}}_\mathbf{i} = m_i \mathbf{a_i} \quad (6.20)}$$

<u>$2^{ème}$ loi de Newton</u> (rotation)

$$\boxed{\mathbf{M_{A,i}} = \dot{\mathbf{L}}_\mathbf{A,i} \quad (6.21)}$$

- La quantité de mouvement **P** et le moment cinétique $\mathbf{L_A}$ par rapport au point *A* sont des grandeurs extensives.

6.4.7 Système de points matériels (objet)



<u>2ème loi de Newton</u> (translation)

$$\boxed{\mathbf{F_i} = \dot{\mathbf{P}}_\mathbf{i} = m_i \mathbf{a_i} \quad (6.20)}$$

<u>2ème loi de Newton</u> (rotation)

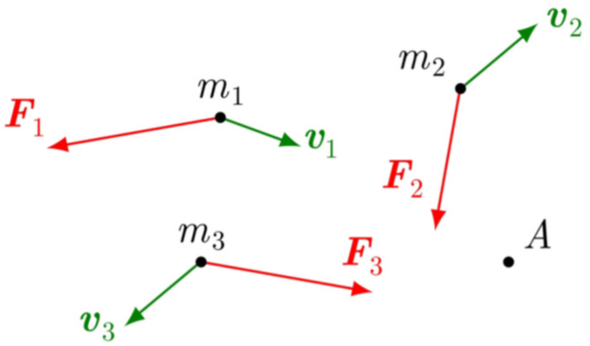
$$\boxed{\mathbf{M_{A,i}} = \dot{\mathbf{L}}_\mathbf{A,i} \quad (6.21)}$$

- La quantité de mouvement $\mathbf{P}$ et le moment cinétique $\mathbf{L_A}$ par rapport au point A sont des grandeurs extensives.

- La quantité de mouvement totale de l'objet est :

$$\boxed{\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{P_i} \quad (6.22)}$$

6.4.7 Système de points matériels (objet)



<u>2ème loi de Newton</u> (translation)

$$\boxed{\mathbf{F_i} = \dot{\mathbf{P}}_\mathbf{i} = m_i \mathbf{a_i} \quad (6.20)}$$

<u>2ème loi de Newton</u> (rotation)

$$\boxed{\mathbf{M_{A,i}} = \dot{\mathbf{L}}_\mathbf{A,i} \quad (6.21)}$$

- La quantité de mouvement **P** et le moment cinétique $\mathbf{L_A}$ par rapport au point *A* sont des grandeurs extensives.

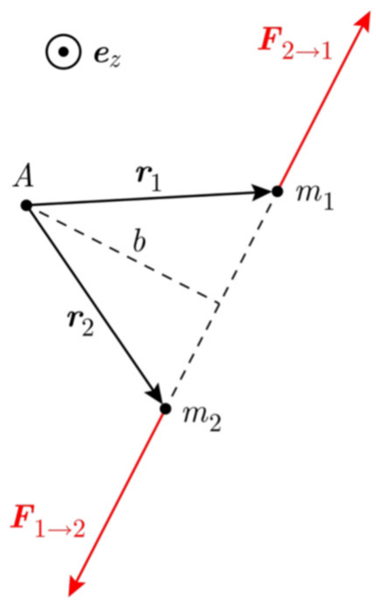
- La quantité de mouvement totale de l'objet est :

$$\boxed{\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{P_i} \quad (6.22)}$$

- Le moment cinétique total de l'objet par rapport au point *A* est :

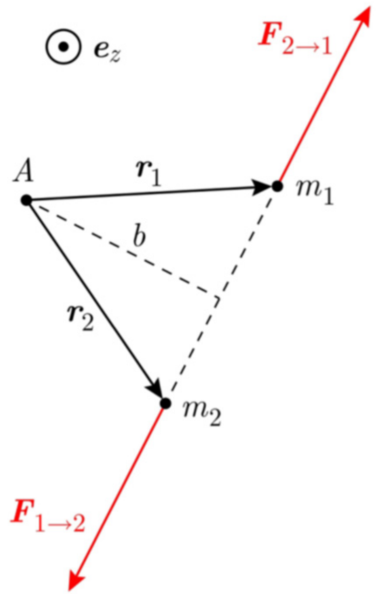
$$\boxed{\mathbf{L_A} = \sum_i \mathbf{L_{A,i}} \quad (6.23)}$$

6.4.7 Système de points matériels (objet)



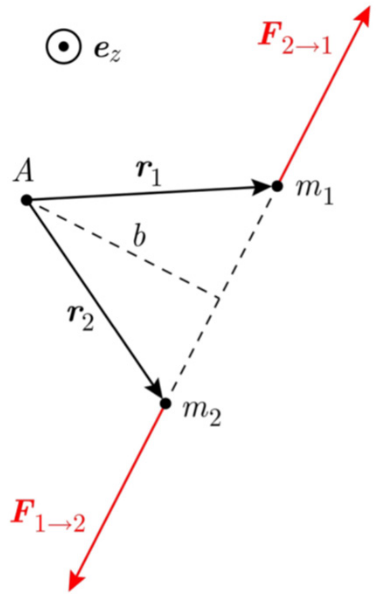
6.4.7 Système de points matériels (objet)

- On applique la 3ème loi de Newton (action-réaction).



6.4.7 Système de points matériels (objet)

- On applique la 3ème loi de Newton (action-réaction).

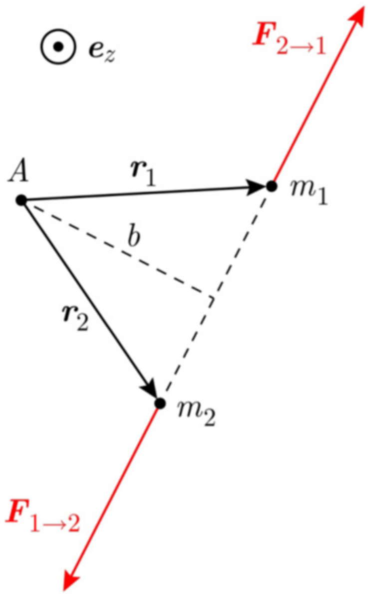


- Les forces intérieures s'annulent deux à deux :

$\mathbf{F}_{1\to2} = -\,\mathbf{F}_{2\to1}$ ou $\mathbf{F}_{1\to2} + \mathbf{F}_{2\to1} = \mathbf{0}$

6.4.7 Système de points matériels (objet)

- On applique la 3ème loi de Newton (action-réaction).



- Les forces intérieures s'annulent deux à deux :

$\mathbf{F}_{1\to2} = -\mathbf{F}_{2\to1}$ ou $\mathbf{F}_{1\to2} + \mathbf{F}_{2\to1} = \mathbf{0}$

- Les moments des forces intérieures s'annulent aussi deux à deux :

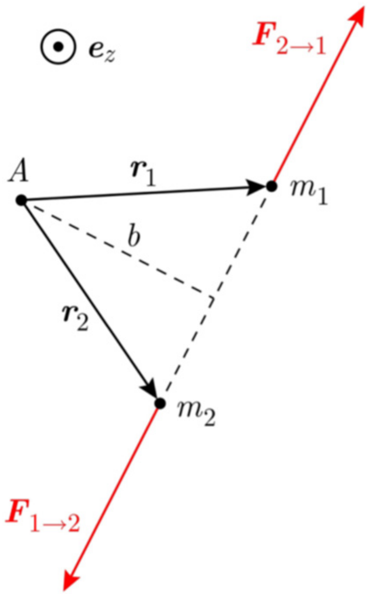
$\mathbf{M}_\mathbf{A}(\mathbf{F}_{1\to2}) + \mathbf{M}_\mathbf{A}(\mathbf{F}_{2\to1}) = \mathbf{0}$

En effet,

$\mathbf{M}_\mathbf{A}(\mathbf{F}_{2\to1}) = b||\mathbf{F}_{2\to1}||\mathbf{e}_z$ et $\mathbf{M}_\mathbf{A}(\mathbf{F}_{1\to2}) = -b||\mathbf{F}_{1\to2}||\mathbf{e}_z$ où $||\mathbf{F}_{2\to1}|| = ||\mathbf{F}_{1\to2}||$

6.4.7 *Système de points matériels (objet)*

- On applique la 3ème loi de Newton (action-réaction).



- Les forces intérieures s'annulent deux à deux :

$\mathbf{F}_{1\to2} = - \mathbf{F}_{2\to1}$ ou $\mathbf{F}_{1\to2} + \mathbf{F}_{2\to1} = \mathbf{0}$

- Les moments des forces intérieures s'annulent aussi deux à deux :

$\mathbf{M}_\mathbf{A}(\mathbf{F}_{1\to2}) + \mathbf{M}_\mathbf{A}(\mathbf{F}_{2\to1}) = \mathbf{0}$

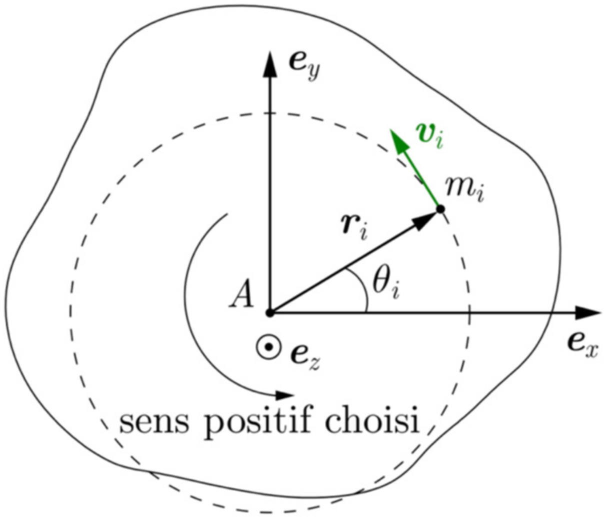
En effet,

$\mathbf{M}_\mathbf{A}(\mathbf{F}_{2\to1}) = b\|\mathbf{F}_{2\to1}\|\mathbf{e}_z$ et $\mathbf{M}_\mathbf{A}(\mathbf{F}_{1\to2}) = -b\|\mathbf{F}_{1\to2}\|\mathbf{e}_z$ où $\|\mathbf{F}_{2\to1}\| = \|\mathbf{F}_{1\to2}\|$

- Ainsi, seules les forces extérieures et les moments de forces extérieures déterminent le mouvement d'un objet :

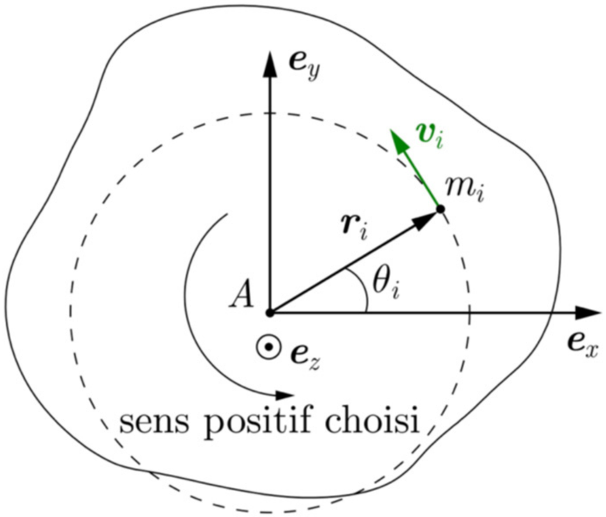
$$\boxed{\mathbf{F}^{\text{ext}} = \dot{\mathbf{P}} = m\mathbf{a}_{\mathbf{CM}} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_\mathbf{A}^{\text{ext}} = \dot{\mathbf{L}}_\mathbf{A} \quad (6.24)}$$

6.4.8 Solide indéformable



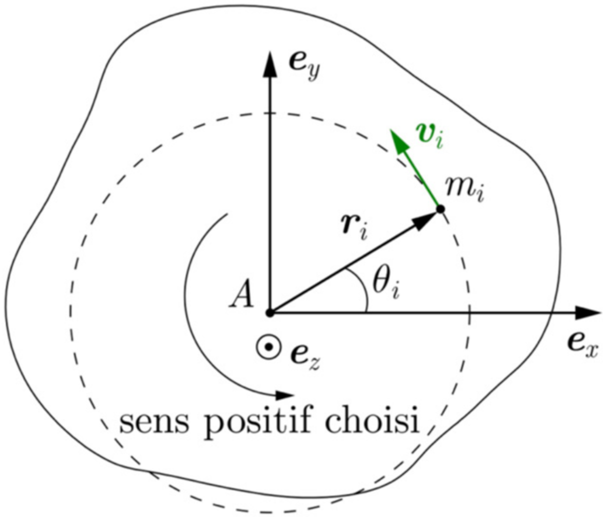
6.4.8 Solide indéformable

On considère un objet solide indéformable en rotation autour d'un axe passant par un point A. Les positions relatives des parties de masse m_i ne changent pas (« tout bouge ensemble »).



6.4.8 Solide indéformable

On considère un objet solide indéformable en rotation autour d'un axe passant par un point A. Les positions relatives des parties de masse m_i ne changent pas (« tout bouge ensemble »).

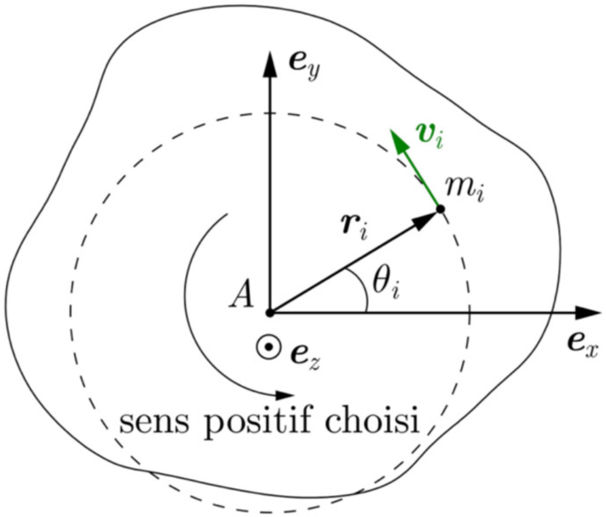


- La dérivée temporelle de l'angle θ_i repérant la masse m_i est identique pour tous les m_i. C'est la vitesse angulaire de rotation ω_A du solide autour du point A :

$$\boxed{\dot{\theta}_i = \omega_A \quad \forall\, i \quad (6.25)}$$

6.4.8 Solide indéformable

On considère un objet solide indéformable en rotation autour d'un axe passant par un point A. Les positions relatives des parties de masse m_i ne changent pas (« tout bouge ensemble »).



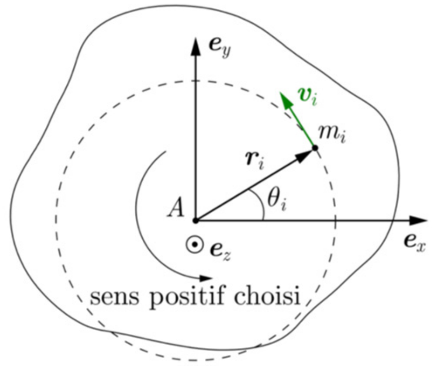
- La dérivée temporelle de l'angle θ_i repérant la masse m_i est identique pour tous les m_i. C'est la vitesse angulaire de rotation ω_A du solide autour du point A :

$$\boxed{\dot{\theta}_i = \omega_A \quad \forall\, i \quad (6.25)}$$

- La vitesse scalaire de m_i (d'abscisse curviligne $s_i = r_i\ \theta_i$) est :

$$v_i = \dot{s}_i = r_i \dot{\theta}_i = r_i \omega_A$$

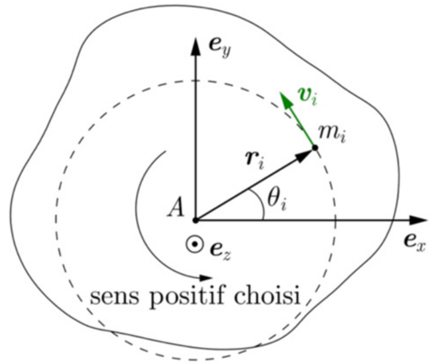
6.4.8 Solide indéformable



6.4.8 *Solide indéformable*

- Le moment cinétique de la masse m_i par rapport à A s'écrit :

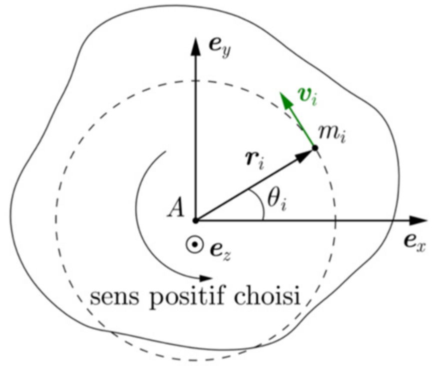
$$\mathbf{L_{A,i}} = L_{A,i}\mathbf{e}_z \quad \text{où } L_{A,i} = r_i m_i v_i = m_i r_i^2 \omega_A$$



6.4.8 Solide indéformable

- Le moment cinétique de la masse m_i par rapport à A s'écrit :

$$\mathbf{L_{A,i}} = L_{A,i}\mathbf{e}_z \quad \text{où } L_{A,i} = r_i m_i v_i = m_i r_i^2 \omega_A$$



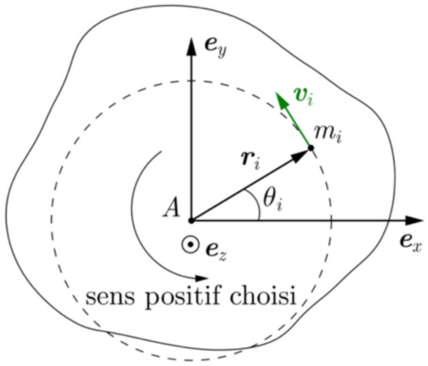
- Le moment cinétique du solide par rapport à A s'écrit :

$$\boxed{\mathbf{L_A} = \sum_i \mathbf{L_{A,i}} = \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega_A \mathbf{e}_z \equiv I_A \omega_A \mathbf{e}_z \quad (6.26)}$$

6.4.8 Solide indéformable

- Le moment cinétique de la masse m_i par rapport à A s'écrit :

$$\mathbf{L_{A,i}} = L_{A,i}\mathbf{e}_z \quad \text{où } L_{A,i} = r_i m_i v_i = m_i r_i^2 \omega_A$$



- Le moment cinétique du solide par rapport à A s'écrit :

$$\boxed{\mathbf{L_A} = \sum_i \mathbf{L_{A,i}} = \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega_A \mathbf{e}_z \equiv I_A \omega_A \mathbf{e}_z \quad (6.26)}$$

- Le moment d'inertie du solide par rapport à un axe de symétrie passant par A est défini comme :

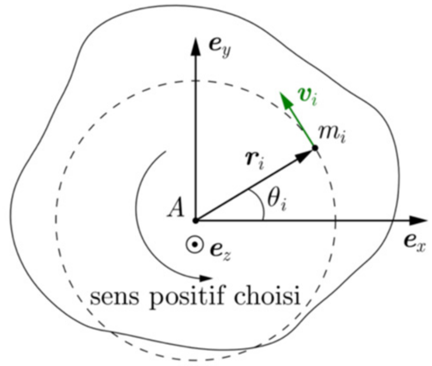
$$\boxed{I_A = \sum_i m_i r_i^2 \quad (6.27)}$$

- Unité physique (SI) : [kg.m^2]

6.4.8 Solide indéformable

- Le moment cinétique de la masse m_i par rapport à A s'écrit :

$$\mathbf{L_{A,i}} = L_{A,i}\mathbf{e}_z \quad \text{où } L_{A,i} = r_i m_i v_i = m_i r_i^2 \omega_A$$



- Le moment cinétique du solide par rapport à A s'écrit :

$$\boxed{\mathbf{L_A} = \sum_i \mathbf{L_{A,i}} = \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega_A \mathbf{e}_z \equiv I_A \omega_A \mathbf{e}_z \quad (6.26)}$$

- Le moment d'inertie du solide par rapport à un axe de symétrie passant par A est défini comme :

$$\boxed{I_A = \sum_i m_i r_i^2 \quad (6.27)}$$

- Unité physique (SI) : [kg.m^2]

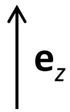
C'est une caractéristique du solide dépendant de sa masse et de la répartition de celle-ci : plus la masse est éloignée de l'axe de rotation, plus le moment d'inertie est grand.

6.4.8 Solide indéformable

Expérience :

1.

2.



6.4.8 Solide indéformable

Expérience : Tabouret tournant

1.

2.

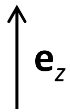
$\mathbf{e}_z$

6.4.8 Solide indéformable

Expérience : Tabouret tournant

1.

2.

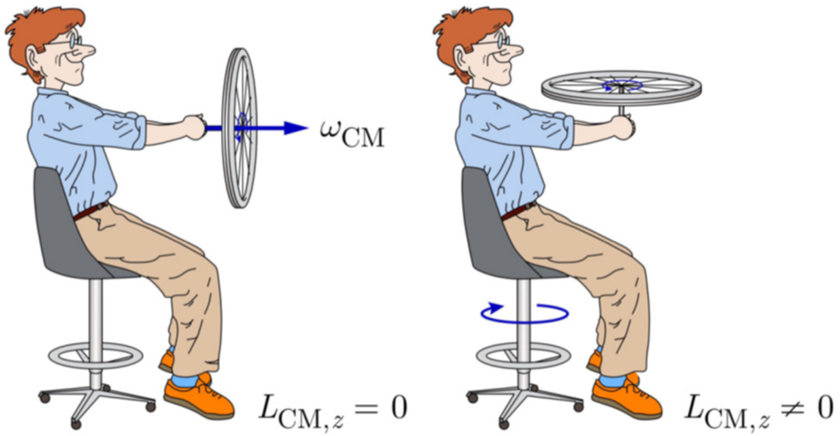


- En l'absence de moment de forces extérieures, $\mathbf{M}_{\mathbf{CM}}^{\mathbf{ext}} = \mathbf{0}$, le moment cinétique $\mathbf{L}_{\mathbf{CM}}$ de l'étudiant est conservé : $\mathbf{L}_{\mathbf{CM}} = I_{\mathrm{CM}}\,\omega_{\mathrm{CM}}\mathbf{e}_z = \mathbf{cste}$.

- Ainsi, s'il éloigne les haltères de son corps (1→2), son moment d'inertie I_{CM} augmente et sa vitesse angulaire ω_{CM} diminue et vice versa.

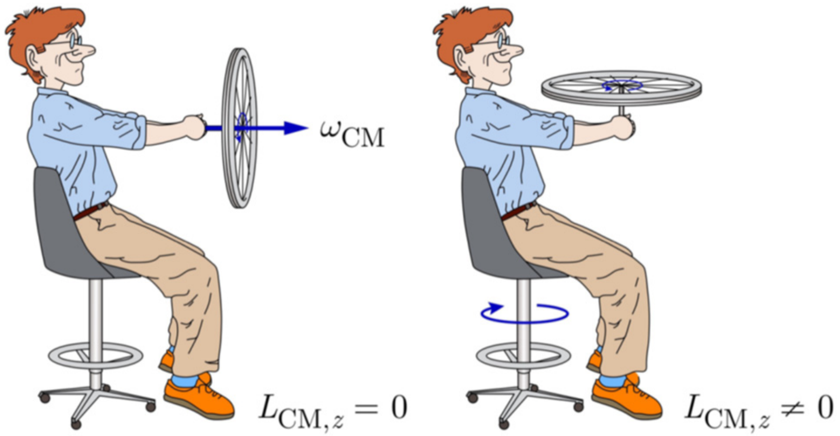
6.4.8 Solide indéformable

Expérience :



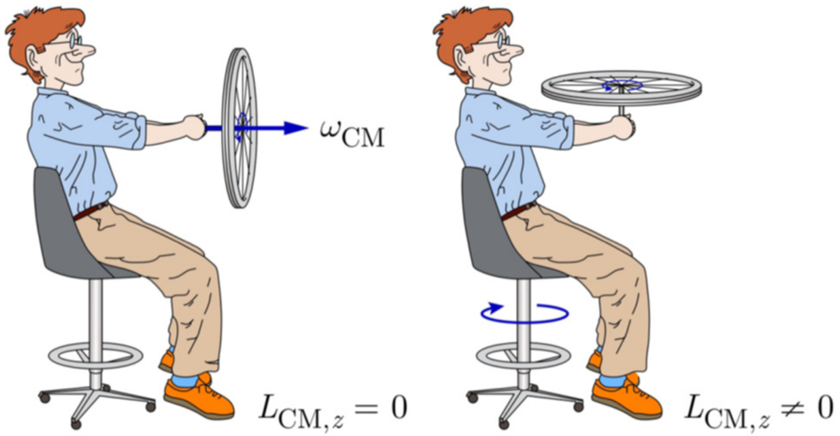
6.4.8 Solide indéformable

Expérience : Roue de vélo sur un tabouret



6.4.8 *Solide indéformable*

Expérience : Roue de vélo sur un tabouret



- Un étudiant assis sur un tabouret déplace une roue en rotation rapide d'une position initiale où la roue tourne dans un plan vertical à une position finale où la roue tourne dans un plan horizontal. En position finale, l'étudiant tourne dans le sens inverse de la roue pour que la composante verticale du moment cinétique $L_{CM,z}$ reste nulle.

6.4.8 Solide indéformable

Remarque :

6.4.8 Solide indéformable

- Vitesse angulaire vectorielle $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}}$: on associe à la rotation le vecteur $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}}$ parallèle à l'axe de rotation, de sens donné par la règle du tire-bouchon et de norme ω_A (unité (SI) : [rad.s^{-1}]).

Remarque :

6.4.8 Solide indéformable

- Vitesse angulaire vectorielle $\boldsymbol{\omega_A}$: on associe à la rotation le vecteur $\boldsymbol{\omega_A}$ parallèle à l'axe de rotation, de sens donné par la règle du tire-bouchon et de norme ω_A (unité (SI) : [rad.s^{-1}]).

Remarque :

La vitesse de la partie m_i en mouvement circulaire autour de A s'écrit alors :

$$\boxed{\mathbf{v_i} = \boldsymbol{\omega_A} \times \mathbf{r}_i \quad (6.28)}$$

6.4.8 Solide indéformable

- Vitesse angulaire vectorielle $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}}$: on associe à la rotation le vecteur $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}}$ parallèle à l'axe de rotation, de sens donné par la règle du tire-bouchon et de norme ω_A (unité (SI) : [rad.s^{-1}]).

Remarque :

La vitesse de la partie m_i en mouvement circulaire autour de A s'écrit alors :

$$\boxed{\mathbf{v}_{\mathbf{i}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}} \times \mathbf{r}_i \quad (6.28)}$$

- Pour une rotation autour d'un axe de symétrie de l'objet :

$$\boxed{\mathbf{L}_{\mathbf{A}} = I_A \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}} \quad (6.29)} \qquad \boxed{\mathbf{M}_{\mathbf{A}} = I_A \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{A}} \quad (6.30)}$$

6.4.8 Solide indéformable

- Vitesse angulaire vectorielle $\boldsymbol{\omega}_\mathbf{A}$: on associe à la rotation le vecteur $\boldsymbol{\omega}_\mathbf{A}$ parallèle à l'axe de rotation, de sens donné par la règle du tire-bouchon et de norme ω_A (unité (SI) : [rad.s^{-1}]).

Remarque :

La vitesse de la partie m_i en mouvement circulaire autour de A s'écrit alors :

$$\boxed{\mathbf{v}_\mathbf{i} = \boldsymbol{\omega}_\mathbf{A} \times \mathbf{r}_i \quad (6.28)}$$

- Pour une rotation autour d'un axe de symétrie de l'objet :

$$\boxed{\mathbf{L}_\mathbf{A} = I_A \boldsymbol{\omega}_\mathbf{A} \quad (6.29)} \qquad \boxed{\mathbf{M}_\mathbf{A} = I_A \dot{\boldsymbol{\omega}}_\mathbf{A} \quad (6.30)}$$

où $\dot{\boldsymbol{\omega}}_\mathbf{A}$ est le vecteur accélération angulaire du solide autour de l'axe passant par A.

6.4.8 Solide indéformable

- Vitesse angulaire vectorielle $\boldsymbol{\omega}_\mathbf{A}$: on associe à la rotation le vecteur $\boldsymbol{\omega}_\mathbf{A}$ parallèle à l'axe de rotation, de sens donné par la règle du tire-bouchon et de norme ω_A (unité (SI) : [rad.s^{-1}]).

Remarque :

La vitesse de la partie m_i en mouvement circulaire autour de A s'écrit alors :

$$\boxed{\mathbf{v}_\mathbf{i} = \boldsymbol{\omega}_\mathbf{A} \times \mathbf{r}_i \quad (6.28)}$$

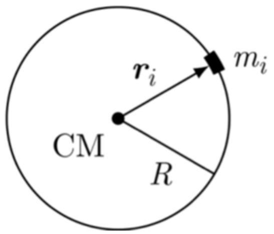
- Pour une rotation autour d'un axe de symétrie de l'objet :

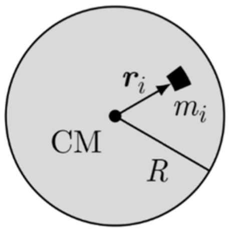
$$\boxed{\mathbf{L}_\mathbf{A} = I_A \boldsymbol{\omega}_\mathbf{A} \quad (6.29)} \qquad \boxed{\mathbf{M}_\mathbf{A} = I_A \dot{\boldsymbol{\omega}}_\mathbf{A} \quad (6.30)}$$

où $\dot{\boldsymbol{\omega}}_\mathbf{A}$ est le vecteur accélération angulaire du solide autour de l'axe passant par A.

<u>Translation</u>	Analogie	<u>Rotation</u>
$\mathbf{F}^\mathbf{ext} = m\dot{\mathbf{v}}_\mathbf{CM}$	$\longleftrightarrow$	$\mathbf{M}_\mathbf{A}^\mathbf{ext} = I_A \dot{\boldsymbol{\omega}}_\mathbf{A}$
$m =$ masse d'inertie		$I_A =$ moment d'inertie

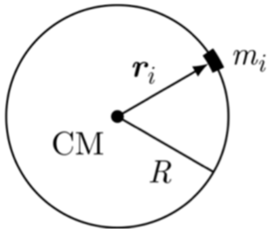
6.4.9 Moments d'inertie

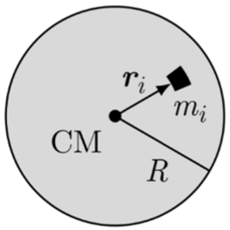




6.4.9 Moments d'inertie

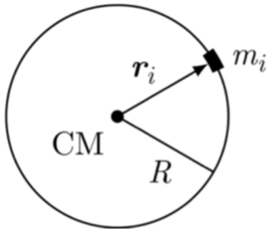
1. Anneau (cercle) ou cylindre creux par rapport à l'axe de symétrie passant par le centre de masse :



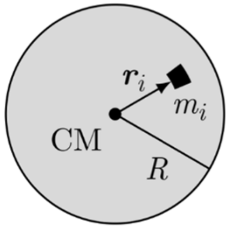


6.4.9 Moments d'inertie

1. Anneau (cercle) ou cylindre creux par rapport à l'axe de symétrie passant par le centre de masse :

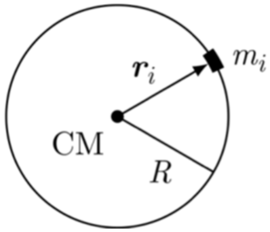


- $||\mathbf{r_i}|| = R \;\; \forall\, i$
- $$\boxed{I_{CM} = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i R^2 = mR^2 \quad (6.31)}$$



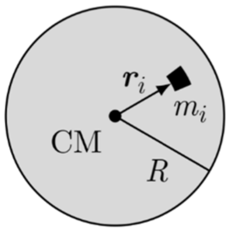
6.4.9 Moments d'inertie

1. Anneau (cercle) ou cylindre creux par rapport à l'axe de symétrie passant par le centre de masse :



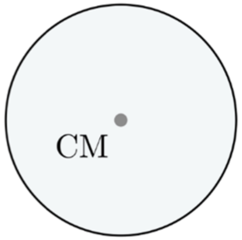
- $\|\mathbf{r_i}\| = R \ \ \forall\ i$
- $$I_{\mathrm{CM}} = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i R^2 = mR^2 \quad (6.31)$$

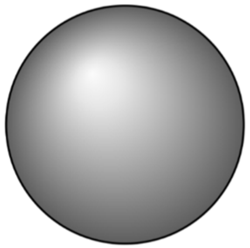
2. Disque ou cylindre plein par rapport à l'axe de symétrie passant par le centre de masse :

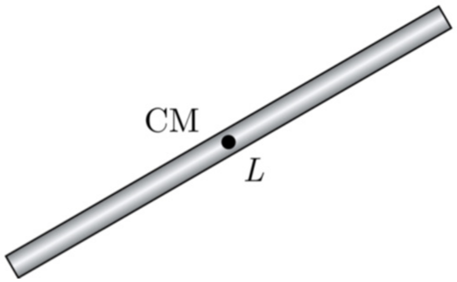


- $$I_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{2} mR^2 \quad (6.32)$$

6.4.9 Moments d’inertie

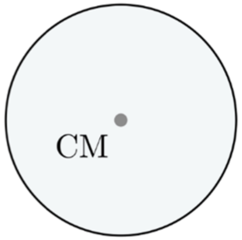




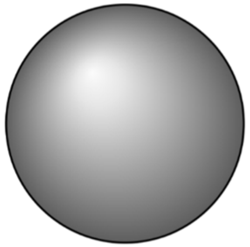


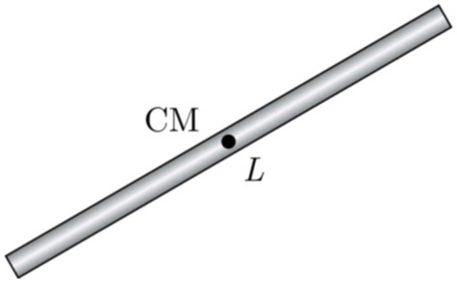
6.4.9 Moments d'inertie

3. Sphère creuse par rapport à un axe de symétrie passant par le centre de masse :



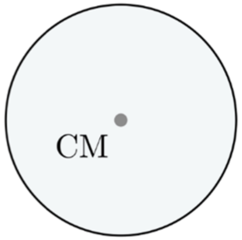
- $$I_{CM} = \frac{2}{3} mR^2 \quad (6.33)$$





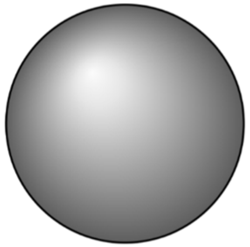
6.4.9 Moments d'inertie

3. Sphère creuse par rapport à un axe de symétrie passant par le centre de masse :

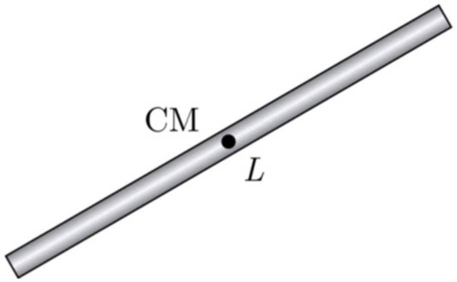


- $$I_{CM} = \frac{2}{3} mR^2 \quad (6.33)$$

4. Boule par rapport à un axe de symétrie passant par le centre de masse :

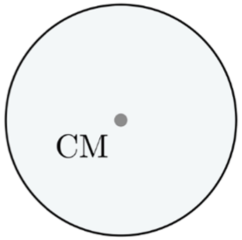


- $$I_{CM} = \frac{2}{5} mR^2 \quad (6.34)$$



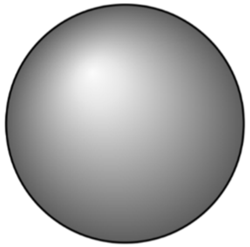
6.4.9 Moments d'inertie

3. Sphère creuse par rapport à un axe de symétrie passant par le centre de masse :



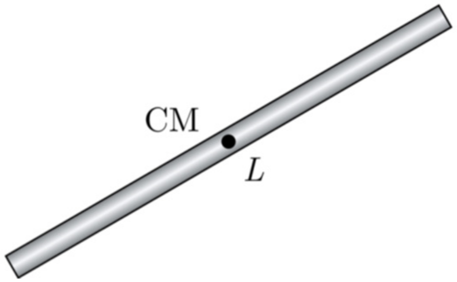
- $$I_{\text{CM}} = \frac{2}{3} mR^2 \quad (6.33)$$

4. Boule par rapport à un axe de symétrie passant par le centre de masse :



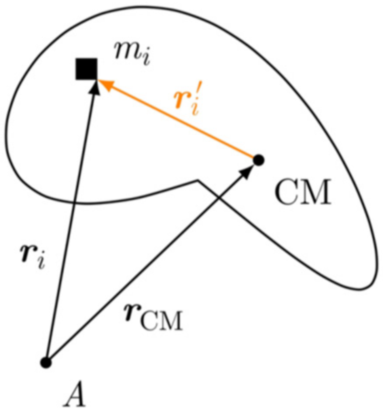
- $$I_{\text{CM}} = \frac{2}{5} mR^2 \quad (6.34)$$

5. Tige mince par rapport à un axe de symétrie passant par le centre de masse :



- $$I_{\text{CM}} = \frac{1}{12} mL^2 \quad (6.35)$$

6.4.9 Moments d'inertie

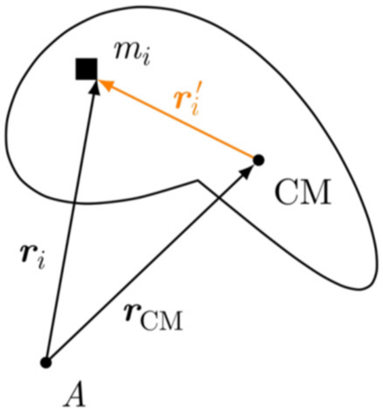


Jakob Steiner

6.4.9 Moments d'inertie

6. <u>Règle de Steiner</u> :

Connaissant I_{CM} par rapport à un axe passant par le CM, on cherche à déterminer I_A par rapport à un axe parallèle passant par A.

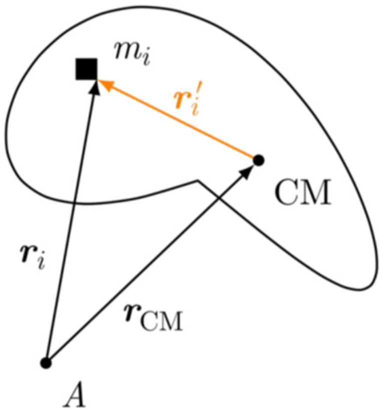


Jakob Steiner

6.4.9 Moments d'inertie

6. Règle de Steiner :

Connaissant I_{CM} par rapport à un axe passant par le CM, on cherche à déterminer I_A par rapport à un axe parallèle passant par A.



- $\mathbf{r_i} = \mathbf{r_{CM}} + \mathbf{r_i'}$ où $\mathbf{r_{CM}} \equiv \mathbf{d}$
- $r_i^2 = (\mathbf{d} + \mathbf{r_i'}) \cdot (\mathbf{d} + \mathbf{r_i'}) = d^2 + 2\mathbf{d} \cdot \mathbf{r_i'} + r_i'^2$
- $I_A = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i d^2 + 2\mathbf{d} \cdot \sum_i m_i \mathbf{r_i'} + \sum_i m_i r_i'^2$

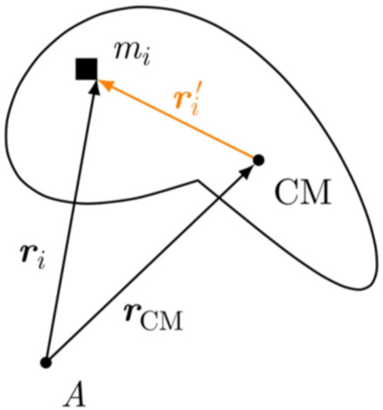
$$= md^2 + 2\mathbf{d} \cdot m \underbrace{\mathbf{r_{CM}'}}_{=\mathbf{0}} + I_{CM}$$

Jakob Steiner

6.4.9 Moments d'inertie

6. <u>Règle de Steiner</u> :

Connaissant I_{CM} par rapport à un axe passant par le CM, on cherche à déterminer I_A par rapport à un axe parallèle passant par A.



- $\mathbf{r_i} = \mathbf{r_{CM}} + \mathbf{r_i'}$ où $\mathbf{r_{CM}} \equiv \mathbf{d}$
- $r_i^2 = (\mathbf{d} + \mathbf{r_i'}) \cdot (\mathbf{d} + \mathbf{r_i'}) = d^2 + 2\mathbf{d} \cdot \mathbf{r_i'} + r_i'^2$
- $I_A = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i d^2 + 2\mathbf{d} \cdot \sum_i m_i \mathbf{r_i'} + \sum_i m_i r_i'^2$

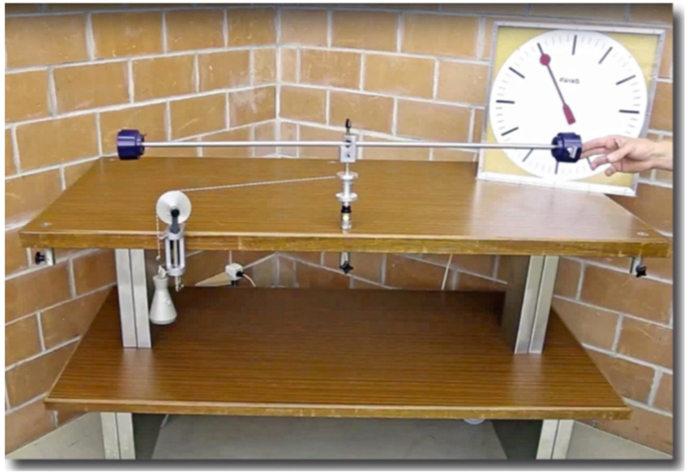
$$= md^2 + 2\mathbf{d} \cdot m \underbrace{\mathbf{r_{CM}'}}_{=\mathbf{0}} + I_{CM}$$

Jakob Steiner

$$\boxed{I_A = I_{CM} + md^2 \quad (6.36)}$$

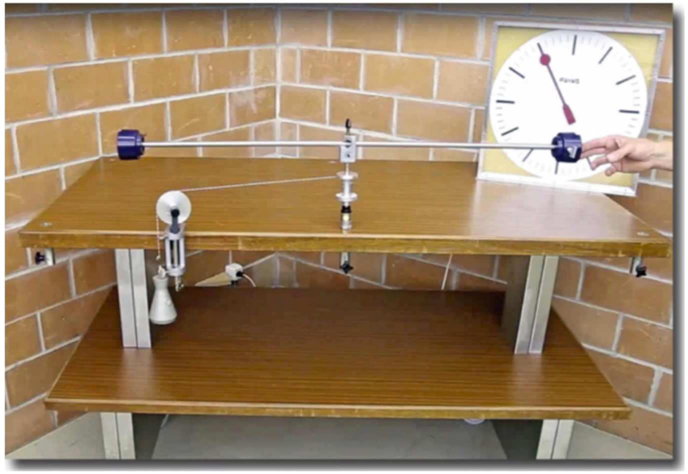
6.4.9 Moments d'inertie

Expérience :



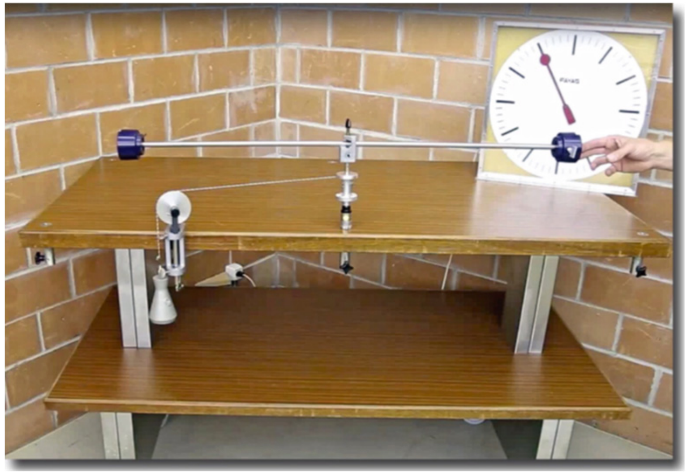
6.4.9 Moments d'inertie

Expérience : Moment d'inertie variable



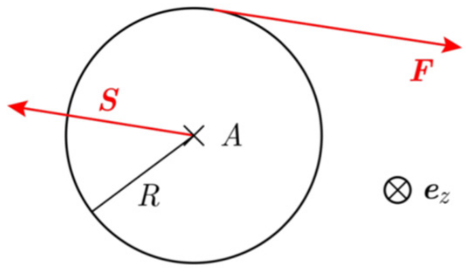
6.4.9 Moments d'inertie

Expérience : Moment d'inertie variable



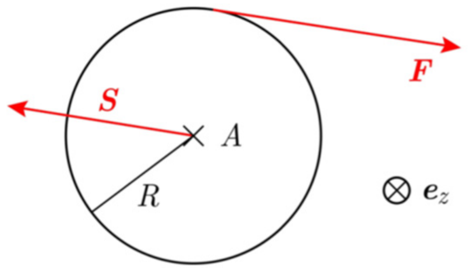
- En variant l'écartement des deux masses sur la barre, on modifie le moment d'inertie. Plus les masses sont proches de l'axe de rotation, plus le moment d'inertie I_{CM} est petit et plus l'accélération angulaire $\dot{\omega}_{\mathrm{CM}}$ est grande, et vice versa, car $\mathbf{M}_{\mathbf{CM}}^{\mathbf{ext}} = I_{\mathrm{CM}}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{CM}} = \mathbf{cste}$

6.4.10 Fil enroulé sur une roue d'axe vertical



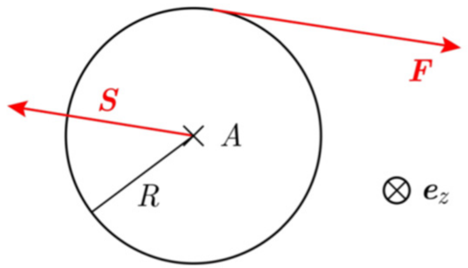
6.4.10 Fil enroulé sur une roue d'axe vertical

On considère un fil de masse négligeable enroulé sur une roue de rayon R et d'axe vertical fixe. On tire sur le fil avec une force **F** constante. On veut déterminer $\dot{\omega}_A$.



6.4.10 *Fil enroulé sur une roue d'axe vertical*

On considère un fil de masse négligeable enroulé sur une roue de rayon R et d'axe vertical fixe. On tire sur le fil avec une force **F** constante. On veut déterminer $\dot{\omega}_A$.



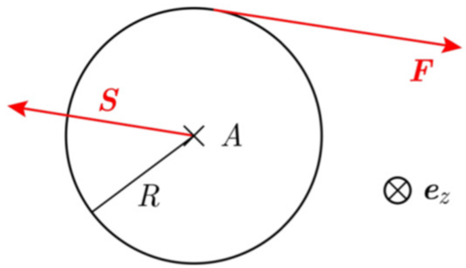
<u>Objet</u> : roue de masse m et de rayon R

<u>Forces horizontales</u> : **F** et soutien **S**

<u>Translation</u> (CM immobile) : $\mathbf{F} + \mathbf{S} = \mathbf{0}$

6.4.10 *Fil enroulé sur une roue d'axe vertical*

On considère un fil de masse négligeable enroulé sur une roue de rayon R et d'axe vertical fixe. On tire sur le fil avec une force **F** constante. On veut déterminer $\dot{\omega}_A$.



<u>Objet</u> : roue de masse m et de rayon R

<u>Forces horizontales</u> : **F** et soutien **S**

<u>Translation</u> (CM immobile) : **F** + **S** = **0**

<u>Rotation</u> (par rapport à $A \equiv$ CM) : $\mathbf{M_A}(\mathbf{F}) = \dot{\mathbf{L}}_\mathbf{A} = I_A \dot{\boldsymbol{\omega}}_\mathbf{A}$

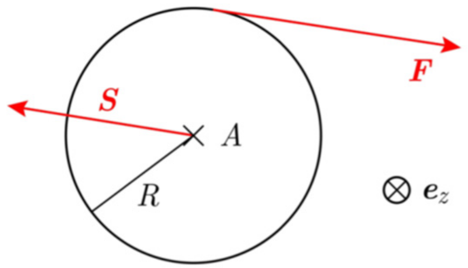
Selon $\mathbf{e}_z$: $RF = I_A \dot{\omega}_A \Rightarrow \dot{\omega}_A = \dfrac{RF}{I_A}$

1. <u>Anneau</u> : $\dot{\omega}_A = \dfrac{RF}{mR^2} = \dfrac{F}{mR}$ (même masse m et rayon R)

2. <u>Disque</u> : $\dot{\omega}_A = \dfrac{RF}{\frac{1}{2}mR^2} = \dfrac{2F}{mR}$

6.4.10 Fil enroulé sur une roue d'axe vertical

On considère un fil de masse négligeable enroulé sur une roue de rayon R et d'axe vertical fixe. On tire sur le fil avec une force **F** constante. On veut déterminer $\dot{\omega}_A$.



<u>Objet</u> : roue de masse m et de rayon R

<u>Forces horizontales</u> : **F** et soutien **S**

<u>Translation</u> (CM immobile) : **F** + **S** = **0**

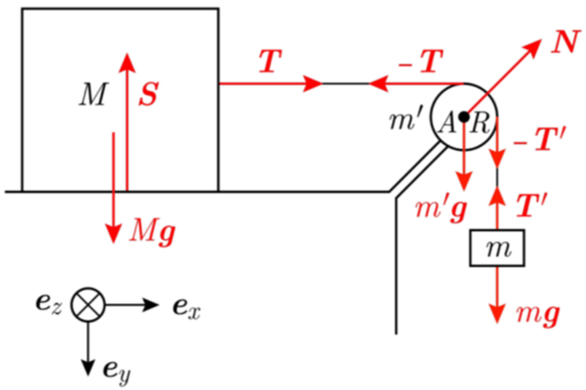
<u>Rotation</u> (par rapport à $A \equiv$ CM) : $\mathbf{M_A}(\mathbf{F}) = \dot{\mathbf{L}}_\mathbf{A} = I_A \dot{\boldsymbol{\omega}}_\mathbf{A}$

Selon $\mathbf{e}_z$: $RF = I_A \dot{\omega}_A \Rightarrow \dot{\omega}_A = \dfrac{RF}{I_A}$

1. <u>Anneau</u> : $\dot{\omega}_A = \dfrac{RF}{mR^2} = \dfrac{F}{mR}$ (même masse m et rayon R)

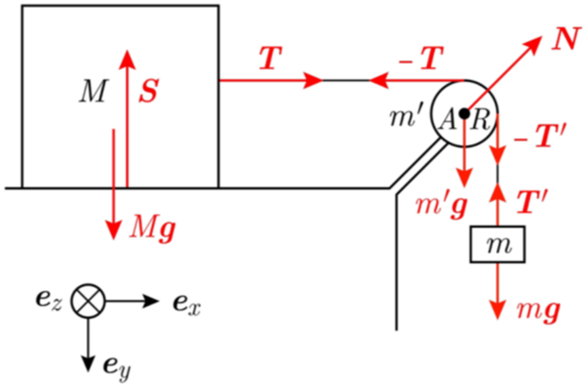
2. <u>Disque</u> : $\dot{\omega}_A = \dfrac{RF}{\frac{1}{2}mR^2} = \dfrac{2F}{mR}$ L'accélération angulaire du disque vaut deux fois celle de l'anneau.

6.4.11 Glisseur entraîné par un contrepoids



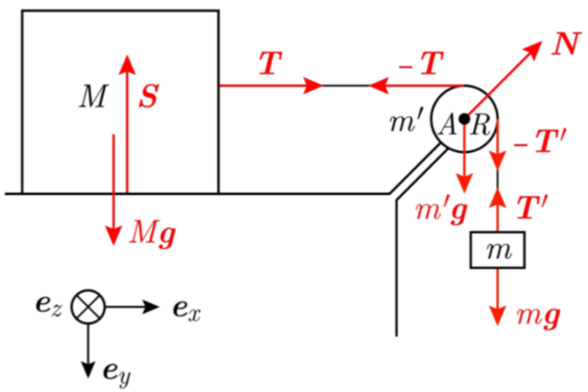
6.4.11 Glisseur entraîné par un contrepoids

On considère un glisseur de masse M sur un rail à air horizontal. Il est attaché à un fil qui coulisse sur une poulie de moment d'inertie I_A et il est entraîné par un contrepoids de masse m. On veut déterminer $\dot{\omega}_A$.



6.4.11 Glisseur entraîné par un contrepoids

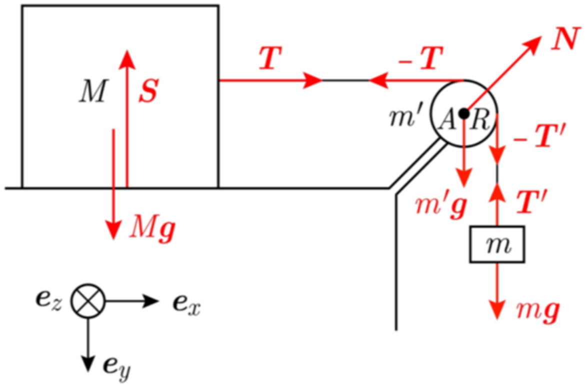
On considère un glisseur de masse M sur un rail à air horizontal. Il est attaché à un fil qui coulisse sur une poulie de moment d'inertie I_A et il est entraîné par un contrepoids de masse m. On veut déterminer $\dot{\omega}_A$.



Méthode : On considère le glisseur, le contrepoids et la poulie séparément et ensuite les liens entre les objets.

6.4.11 Glisseur entraîné par un contrepoids

On considère un glisseur de masse M sur un rail à air horizontal. Il est attaché à un fil qui coulisse sur une poulie de moment d'inertie I_A et il est entraîné par un contrepoids de masse m. On veut déterminer $\dot{\omega}_A$.



Méthode : On considère le glisseur, le contrepoids et la poulie séparément et ensuite les liens entre les objets.

1. Objet : glisseur de masse M (translation horizontale)

Forces : poids $M\mathbf{g}$, soutien $\mathbf{S}$, tension du fil $\mathbf{T}$

Newton : $M\mathbf{g} + \mathbf{S} + \mathbf{T} = M\mathbf{a}_\mathbf{M}$

Selon $\mathbf{e}_x$: $T = Ma_M$

6.4.11 Glisseur entraîné par un contrepoids

6.4.11 Glisseur entraîné par un contrepoids

2. <u>Objet</u> : contrepoids (translation verticale)

<u>Forces</u> : poids $m\mathbf{g}$, tension $\mathbf{T'}$

<u>Newton</u> : $m\mathbf{g} + \mathbf{T'} = m\mathbf{a_m}$

Selon $\mathbf{e}_y$: $mg - T' = ma_m$

6.4.11 Glisseur entraîné par un contrepoids

2. Objet : contrepoids (translation verticale)

Forces : poids $m\mathbf{g}$, tension $\mathbf{T'}$

Newton : $m\mathbf{g} + \mathbf{T'} = m\mathbf{a_m}$

Selon $\mathbf{e}_y$: $mg - T' = ma_m$

3. Objet : poulie (rotation)

Forces : poids $m'\mathbf{g}$, soutien $\mathbf{N}$, tensions $-\mathbf{T}$ et $-\mathbf{T'}$

Rotation par rapport à A : $\underbrace{\mathbf{M_A}(m'\mathbf{g})}_{=\mathbf{0}} + \underbrace{\mathbf{M_A}(\mathbf{N})}_{=\mathbf{0}} + \mathbf{M_A}(-\mathbf{T}) + \mathbf{M_A}(-\mathbf{T'}) = I_A\dot{\boldsymbol{\omega}}_\mathbf{A}$

Selon $\mathbf{e}_z$:

$$-RT + RT' = I_A\dot{\omega}_A$$

6.4.11 Glisseur entraîné par un contrepoids

2. Objet : contrepoids (translation verticale)

Forces : poids $m\mathbf{g}$, tension $\mathbf{T'}$

Newton : $m\mathbf{g} + \mathbf{T'} = m\mathbf{a_m}$

Selon $\mathbf{e}_y$: $mg - T' = ma_m$

3. Objet : poulie (rotation)

Forces : poids $m'\mathbf{g}$, soutien $\mathbf{N}$, tensions $-\mathbf{T}$ et $-\mathbf{T'}$

Rotation par rapport à A : $\underbrace{\mathbf{M_A}\left(m'\mathbf{g}\right)}_{=\mathbf{0}} + \underbrace{\mathbf{M_A}\left(\mathbf{N}\right)}_{=\mathbf{0}} + \mathbf{M_A}\left(-\mathbf{T}\right) + \mathbf{M_A}\left(-\mathbf{T'}\right) = I_A \dot{\boldsymbol{\omega}}_\mathbf{A}$

Selon $\mathbf{e}_z$:

$$-RT + RT' = I_A \dot{\omega}_A$$

- Si le moment d'inertie est non-nul, i.e., $I_A \neq 0$, alors les normes des tensions sont différentes, i.e., $T \neq T'$.

6.4.11 Glisseur entraîné par un contrepoids

6.4.11 Glisseur entraîné par un contrepoids

4. Liaison glisseur-poulie : La vitesse scalaire v_M du glisseur est la même que celle d'un point sur le bord de la poulie (frottement statique) dont la vitesse angulaire est ω_A.

$$v_M = R\omega_A \Rightarrow a_M = R\dot{\omega}_A$$

6.4.11 Glisseur entraîné par un contrepoids

4. Liaison glisseur-poulie : La vitesse scalaire v_M du glisseur est la même que celle d'un point sur le bord de la poulie (frottement statique) dont la vitesse angulaire est ω_A.

$$v_M = R\omega_A \Rightarrow a_M = R\dot{\omega}_A$$

5. Liaison poulie-contrepoids : La vitesse scalaire v_m du contrepoids est la même que celle d'un point du bord de la poulie.

$$v_m = R\omega_A \Rightarrow a_m = R\dot{\omega}_A \Rightarrow a_m = a_M \equiv a$$

6.4.11 Glisseur entraîné par un contrepoids

4. Liaison glisseur-poulie : La vitesse scalaire v_M du glisseur est la même que celle d'un point sur le bord de la poulie (frottement statique) dont la vitesse angulaire est ω_A.

$$v_M = R\omega_A \Rightarrow a_M = R\dot{\omega}_A$$

5. Liaison poulie-contrepoids : La vitesse scalaire v_m du contrepoids est la même que celle d'un point du bord de la poulie.

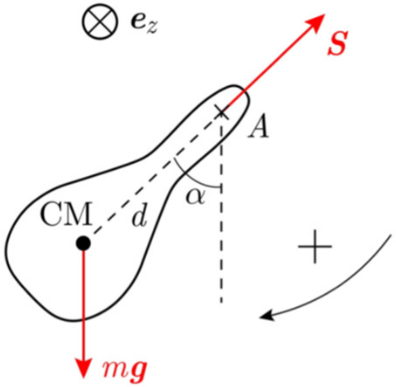
$$v_m = R\omega_A \Rightarrow a_m = R\dot{\omega}_A \Rightarrow a_m = a_M \equiv a$$

6. Résolution : $\omega \equiv \omega_A$ et $I_{CM} \equiv I_A$

$$\left.\begin{array}{r} T = Ma = MR\dot{\omega} \\ mg - T' = ma = mR\dot{\omega} \\ -RT + RT' = I_{CM}\dot{\omega} \end{array}\right\} \Rightarrow mgR = \left(MR^2 + mR^2 + I_{CM}\right)\dot{\omega}$$

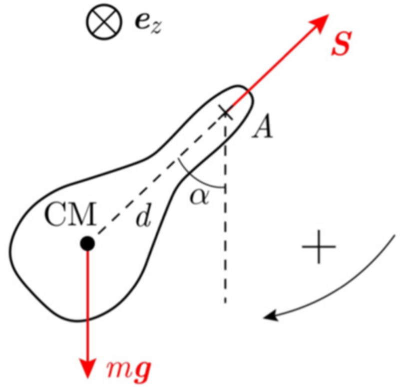
$$\boxed{\Rightarrow \dot{\omega} = \frac{mgR}{MR^2 + mR^2 + I_{CM}} \quad (6.37)}$$

6.4.12 Pendule physique



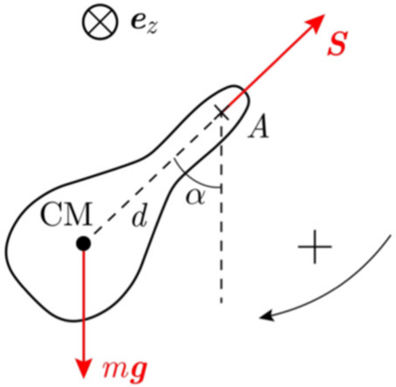
6.4.12 Pendule physique

Un pendule physique est un solide suspendu à un point fixe A.



6.4.12 Pendule physique

Un pendule physique est un solide suspendu à un point fixe A.



Objet : solide

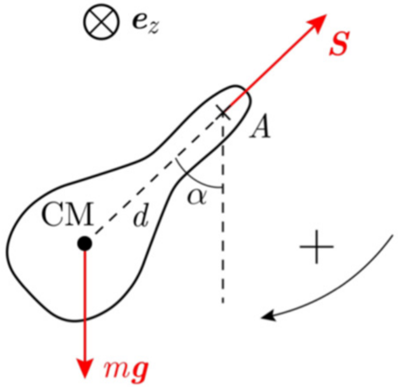
Forces : poids $m\mathbf{g}$, soutien $\mathbf{S}$

Rotation par rapport à A :

$$\mathbf{M}_\mathbf{A}^{\mathbf{ext}} = \mathbf{M}_\mathbf{A}\left(m\mathbf{g}\right) = I_A\dot{\boldsymbol{\omega}}_\mathbf{A}$$

6.4.12 Pendule physique

Un pendule physique est un solide suspendu à un point fixe A.



Objet : solide

Forces : poids $m\mathbf{g}$, soutien $\mathbf{S}$

Rotation par rapport à A :

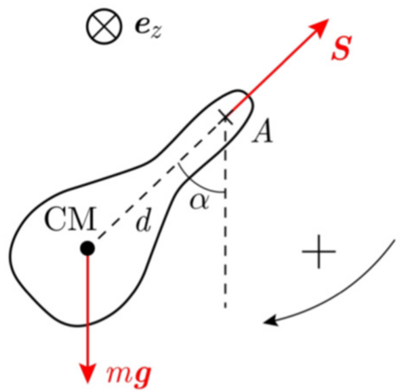
$$\mathbf{M}_\mathbf{A}^{\mathbf{ext}} = \mathbf{M}_\mathbf{A}\left(m\mathbf{g}\right) = I_A \dot{\boldsymbol{\omega}}_\mathbf{A}$$

- Selon $\mathbf{e}_z$ (donnant le sens positif pour α qui augmente) :

$$-d\sin\alpha mg = I_A \dot{\omega}_A = I_A \ddot{\alpha}$$

6.4.12 Pendule physique

Un pendule physique est un solide suspendu à un point fixe A.



Objet : solide

Forces : poids $m\mathbf{g}$, soutien $\mathbf{S}$

Rotation par rapport à A :

$$\mathbf{M}_\mathbf{A}^{\mathbf{ext}} = \mathbf{M}_\mathbf{A}(m\mathbf{g}) = I_A \dot{\boldsymbol{\omega}}_\mathbf{A}$$

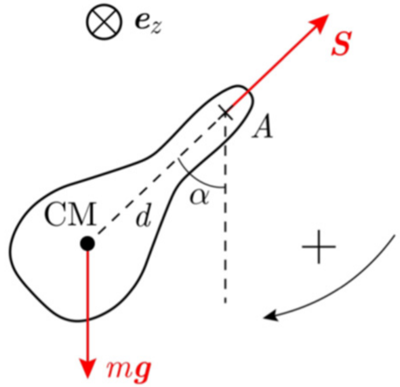
- Selon $\mathbf{e}_z$ (donnant le sens positif pour α qui augmente) :

$$-d\sin\alpha mg = I_A \dot{\omega}_A = I_A \ddot{\alpha}$$

- Soit $\Omega^2 = \dfrac{mgd}{I_A} > 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\alpha} = -\Omega^2 \sin\alpha \quad (6.38)}$

6.4.12 Pendule physique

Un pendule physique est un solide suspendu à un point fixe A.



Objet : solide

Forces : poids $m\mathbf{g}$, soutien $\mathbf{S}$

Rotation par rapport à A :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{ext}} = \mathbf{M}_{\mathbf{A}}\left(m\mathbf{g}\right) = I_A \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{A}}$$

- Selon $\mathbf{e}_z$ (donnant le sens positif pour α qui augmente) :

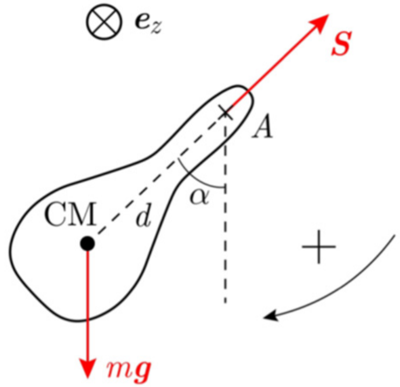
$$-d\sin\alpha mg = I_A \dot{\omega}_A = I_A \ddot{\alpha}$$

- Soit $\Omega^2 = \dfrac{mgd}{I_A} > 0 \Rightarrow$ $\boxed{\ddot{\alpha} = -\Omega^2 \sin\alpha \quad (6.38)}$
- Dans l'approximation des petits angles : $\alpha << 1 \Rightarrow \sin\alpha \approx \alpha$

$\boxed{\ddot{\alpha} = -\Omega^2 \alpha \quad (6.39)}$ (oscillateur harmonique)

6.4.12 Pendule physique

Un pendule physique est un solide suspendu à un point fixe A.



Objet : solide

Forces : poids $m\mathbf{g}$, soutien $\mathbf{S}$

Rotation par rapport à A :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{ext}} = \mathbf{M}_{\mathbf{A}}\left(m\mathbf{g}\right) = I_A \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{A}}$$

- Selon $\mathbf{e}_z$ (donnant le sens positif pour α qui augmente) :

$$-d\sin\alpha mg = I_A\dot{\omega}_A = I_A\ddot{\alpha}$$

- Soit $\Omega^2 = \dfrac{mgd}{I_A} > 0 \Rightarrow$ $\boxed{\ddot{\alpha} = -\Omega^2\sin\alpha \quad (6.38)}$
- Dans l'approximation des petits angles : $\alpha << 1 \Rightarrow \sin\alpha \approx \alpha$

$\boxed{\ddot{\alpha} = -\Omega^2\alpha \quad (6.39)}$ (oscillateur harmonique)

- Plus I_A est grand, plus la période d'oscillation est longue.

6.4.12 Pendule physique

Expérience :

6.4.12 Pendule physique

Expérience : Pendule physique

6.4.12 Pendule physique

Expérience : Pendule physique

- On constate que la période d'oscillation du pendule physique est une fonction de la position de l'axe de rotation qui détermine le moment d'inertie.

6.4.12 Pendule physique

Expérience : Pendule physique

- On constate que la période d'oscillation du pendule physique est une fonction de la position de l'axe de rotation qui détermine le moment d'inertie.

- Plus I_A est grand, plus la période d'oscillation est longue.

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I_A}{mgd}} \quad \text{et} \quad I_A = I_{CM} + md^2$$

6.5 Référentiel du centre de masse

6.5 Référentiel du centre de masse

6.5 Référentiel du centre de masse

- Par rapport à un référentiel d'inertie muni d'une origine *O*, la 2ème loi de Newton en translation et en rotation pour un point matériel s'exprime comme :

$$\boxed{\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_\mathbf{i} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_{\mathbf{O,i}} = \dot{\mathbf{L}}_{\mathbf{O,i}} \quad (6.40)}$$

6.5 Référentiel du centre de masse

- Par rapport à un référentiel d'inertie muni d'une origine *O*, la 2ème loi de Newton en translation et en rotation pour un point matériel s'exprime comme :

$$\boxed{\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_\mathbf{i} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_{\mathbf{O,i}} = \dot{\mathbf{L}}_{\mathbf{O,i}} \quad (6.40)}$$

- On considère un objet formé de points matériels et on note $\mathbf{a}_{\mathbf{CM}}$ l'accélération de son centre de masse.

6.5 Référentiel du centre de masse

- Par rapport à un référentiel d'inertie muni d'une origine *O*, la 2ème loi de Newton en translation et en rotation pour un point matériel s'exprime comme :

$$\boxed{\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_\mathbf{i} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_{\mathbf{o,i}} = \dot{\mathbf{L}}_{\mathbf{o,i}} \quad (6.40)}$$

- On considère un objet formé de points matériels et on note $\mathbf{a}_{\mathbf{CM}}$ l'accélération de son centre de masse.

- On se limite au cas où le centre de masse a un mouvement rectiligne (translation) par rapport au référentiel d'inertie.

6.5 Référentiel du centre de masse

- Par rapport à un référentiel d'inertie muni d'une origine *O*, la 2ème loi de Newton en translation et en rotation pour un point matériel s'exprime comme :

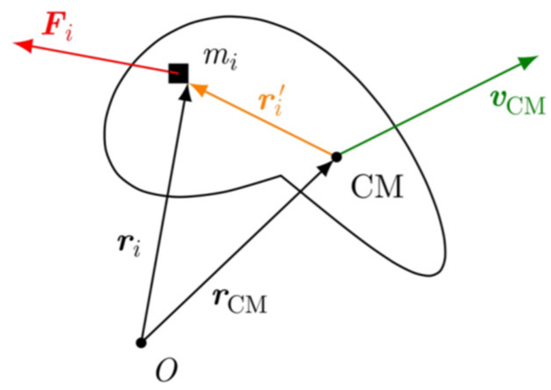
$$\boxed{\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_\mathrm{i} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_{\mathbf{o,i}} = \dot{\mathbf{L}}_{\mathbf{o,i}} \quad (6.40)}$$

- On considère un objet formé de points matériels et on note $\mathbf{a}_{\mathbf{CM}}$ l'accélération de son centre de masse.

- On se limite au cas où le centre de masse a un mouvement rectiligne (translation) par rapport au référentiel d'inertie.

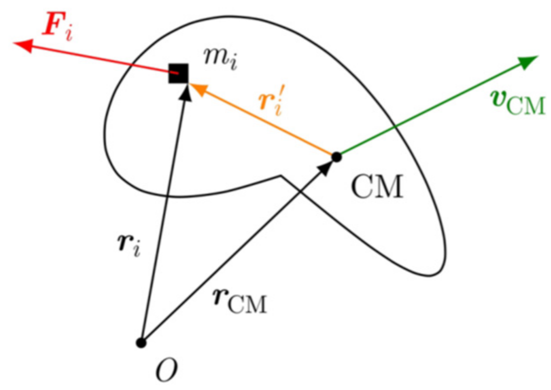
- Les grandeurs cinématiques (position, vitesse, accélération) dans le référentiel $\mathfrak{R}'$ du centre de masse sont liées aux grandeurs correspondantes dans le référentiel d'inertie $\mathfrak{R}$ par :

6.5 Référentiel du centre de masse



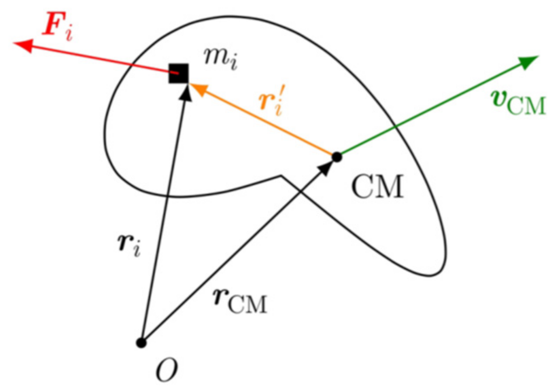
6.5 Référentiel du centre de masse

- Référentiel d'inertie : $\mathfrak{R}$



6.5 Référentiel du centre de masse

- Référentiel d'inertie : $\mathfrak{R}$
- Référentiel du centre de masse : $\mathfrak{R}'$

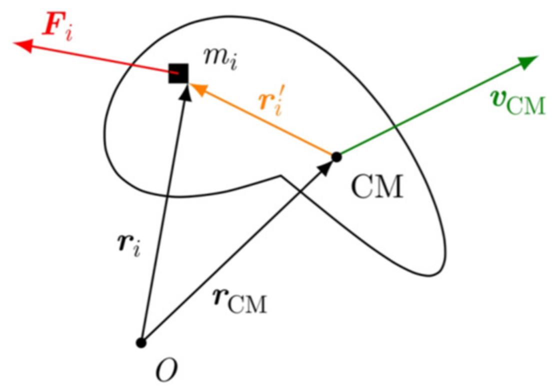


6.5 Référentiel du centre de masse

- Référentiel d'inertie : $\mathcal{R}$
- Référentiel du centre de masse : $\mathcal{R}'$

1. <u>Position</u> :

$$\boxed{\underbrace{\mathbf{r_i}}_{\in\Re} = \underbrace{\mathbf{r_{CM}}}_{\in\Re} + \underbrace{\mathbf{r_i'}}_{\in\Re'} \quad (6.41)}$$



6.5 Référentiel du centre de masse

- Référentiel d'inertie : $\mathfrak{R}$

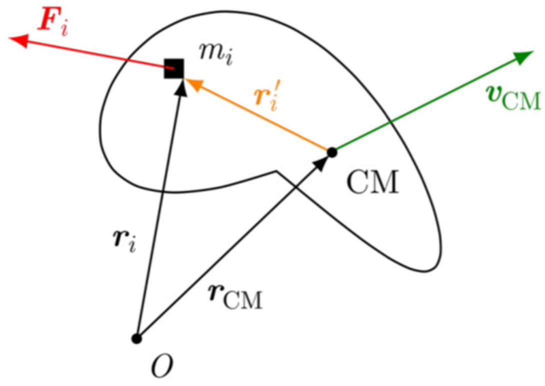
- Référentiel du centre de masse : $\mathfrak{R}'$

1. Position :

$$\boxed{\underbrace{\mathbf{r_i}}_{\in\mathfrak{R}} = \underbrace{\mathbf{r_{CM}}}_{\in\mathfrak{R}} + \underbrace{\mathbf{r_i'}}_{\in\mathfrak{R}'} \quad (6.41)}$$

2. Vitesse :

$$\boxed{\mathbf{v_i} = \mathbf{v_{CM}} + \mathbf{v_i'} \quad (6.42)}$$



6.5 Référentiel du centre de masse

- Référentiel d'inertie : $\mathfrak{R}$

- Référentiel du centre de masse : $\mathfrak{R}'$

1. Position :

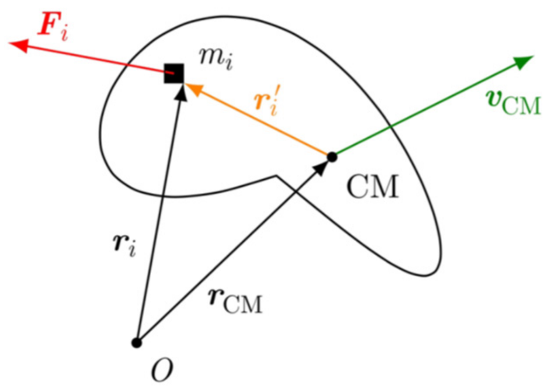
$$\boxed{\underbrace{\mathbf{r_i}}_{\in\mathfrak{R}} = \underbrace{\mathbf{r_{CM}}}_{\in\mathfrak{R}} + \underbrace{\mathbf{r_i'}}_{\in\mathfrak{R}'} \quad (6.41)}$$

2. Vitesse :

$$\boxed{\mathbf{v_i} = \mathbf{v_{CM}} + \mathbf{v_i'} \quad (6.42)}$$

3. Accélération :

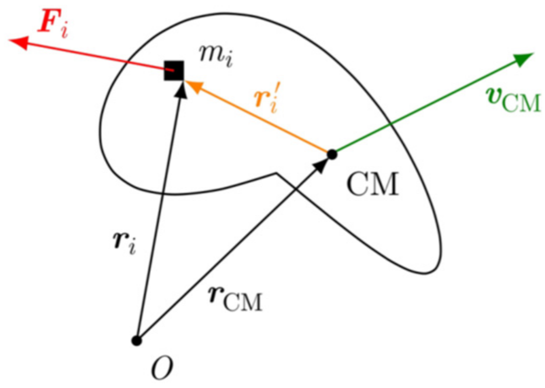
$$\boxed{\mathbf{a_i} = \mathbf{a_{CM}} + \mathbf{a_i'} \quad (6.43)}$$



6.5 Référentiel du centre de masse

- Référentiel d'inertie : $\mathfrak{R}$

- Référentiel du centre de masse : $\mathfrak{R}'$



1. Position :

$$\boxed{\underbrace{\mathbf{r_i}}_{\in\mathfrak{R}} = \underbrace{\mathbf{r_{CM}}}_{\in\mathfrak{R}} + \underbrace{\mathbf{r_i'}}_{\in\mathfrak{R}'} \quad (6.41)}$$

2. Vitesse :

$$\boxed{\mathbf{v_i} = \mathbf{v_{CM}} + \mathbf{v_i'} \quad (6.42)}$$

3. Accélération :

$$\boxed{\mathbf{a_i} = \mathbf{a_{CM}} + \mathbf{a_i'} \quad (6.43)}$$

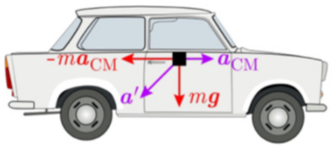
- Le centre de masse (CM) est immobile par rapport à $\mathfrak{R}'$.

$$\boxed{\mathbf{r_{CM}'} = \mathbf{0}; \ \mathbf{v_{CM}'} = \mathbf{0} \ \text{ et } \ \mathbf{a_{CM}'} = \mathbf{0} \quad (6.44)}$$

6.5.1 Force d'inertie et 6.5.2 chute libre en voiture

Remarque :

Chute libre en voiture



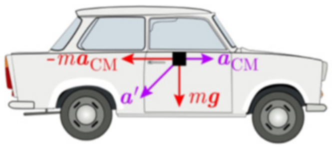
6.5.1 Force d'inertie et 6.5.2 chute libre en voiture

- $2^{\text{ème}}$ loi de Newton (référentiel d'inertie $\mathfrak{R}$) :

$$\boxed{\mathbf{F_i} = m_i \mathbf{a_i} \quad \text{où} \quad \mathbf{a_i} = \mathbf{a_{CM}} + \mathbf{a_i'} \quad (6.45)}$$

Remarque :

Chute libre en voiture



6.5.1 Force d'inertie et 6.5.2 chute libre en voiture

- 2ème loi de Newton (référentiel d'inertie $\mathfrak{R}$) :

$$\boxed{\mathbf{F_i} = m_i \mathbf{a_i} \quad \text{où} \quad \mathbf{a_i} = \mathbf{a_{CM}} + \mathbf{a_i}' \quad (6.45)}$$

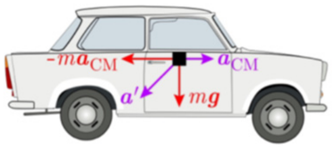
- 2ème loi de Newton (référentiel du centre de masse $\mathfrak{R}'$) :

$$\boxed{\mathbf{F_i} - m_i \mathbf{a_{CM}} = m_i \mathbf{a_i}' \quad (6.46)}$$

où le terme $-m_i\mathbf{a_{CM}}$ est une force appelée « force d'inertie ».

Remarque :

Chute libre en voiture



6.5.1 Force d'inertie et 6.5.2 chute libre en voiture

- 2ème loi de Newton (référentiel d'inertie $\mathcal{R}$) :

$$\boxed{\mathbf{F_i} = m_i \mathbf{a_i} \quad \text{où} \quad \mathbf{a_i} = \mathbf{a_{CM}} + \mathbf{a_i'} \quad (6.45)}$$

- 2ème loi de Newton (référentiel du centre de masse $\mathcal{R}'$) :

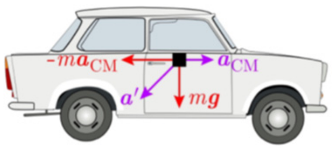
$$\boxed{\mathbf{F_i} - m_i \mathbf{a_{CM}} = m_i \mathbf{a_i'} \quad (6.46)}$$

où le terme $-m_i\mathbf{a_{CM}}$ est une force appelée « force d'inertie ».

Remarque :

Si le référentiel du centre de masse a un mouvement de rotation par rapport au référentiel d'inertie, il faut ajouter d'autres forces d'inertie (centrifuge, Coriolis, Euler).

Chute libre en voiture



6.5.1 Force d'inertie et 6.5.2 chute libre en voiture

- 2ème loi de Newton (référentiel d'inertie $\mathfrak{R}$) :

$$\boxed{\mathbf{F}_\mathbf{i} = m_i \mathbf{a}_\mathbf{i} \quad \text{où} \quad \mathbf{a}_\mathbf{i} = \mathbf{a}_\mathbf{CM} + \mathbf{a}_\mathbf{i}' \quad (6.45)}$$

- 2ème loi de Newton (référentiel du centre de masse $\mathfrak{R}'$) :

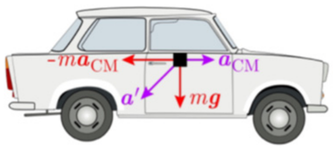
$$\boxed{\mathbf{F}_\mathbf{i} - m_i \mathbf{a}_\mathbf{CM} = m_i \mathbf{a}_\mathbf{i}' \quad (6.46)}$$

où le terme $-m_i\mathbf{a}_\mathbf{CM}$ est une force appelée « force d'inertie ».

Remarque :

Si le référentiel du centre de masse a un mouvement de rotation par rapport au référentiel d'inertie, il faut ajouter d'autres forces d'inertie (centrifuge, Coriolis, Euler).

Chute libre en voiture



Objet : masse m

Forces : poids $m\mathbf{g}$, force d'inertie $-m\mathbf{a}_\mathbf{CM}$

Référentiel : centre de masse de la voiture

Newton : $m\mathbf{g} - m\mathbf{a}_\mathbf{CM} = m\mathbf{a}' \Rightarrow$

$$\boxed{\mathbf{a}' = \mathbf{g} - \mathbf{a}_\mathbf{CM} \quad (6.47)}$$

6.5.3 Théorème du moment cinétique pour un solide

6.5.3 Théorème du moment cinétique pour un solide

- Le moment de la force $\mathbf{F_i}$ par rapport à l'origine *O* s'écrit :

$$\boxed{\mathbf{M_{O,i}} = \mathbf{r_i} \times \mathbf{F_i} = \left(\mathbf{r_{CM}} + \mathbf{r_i'}\right) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{r_{CM}} \times \mathbf{F_i} + \underbrace{\mathbf{r_i'} \times \mathbf{F}_i}_{\mathbf{M_{CM,i}}} \quad (6.48)}$$

6.5.3 Théorème du moment cinétique pour un solide

- Le moment de la force $\mathbf{F_i}$ par rapport à l'origine *O* s'écrit :

$$\boxed{\mathbf{M_{O,i}} = \mathbf{r_i} \times \mathbf{F_i} = \left(\mathbf{r_{CM}} + \mathbf{r_i'}\right) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{r_{CM}} \times \mathbf{F_i} + \underbrace{\mathbf{r_i'} \times \mathbf{F}_i}_{\mathbf{M_{CM,i}}} \quad (6.48)}$$

- La somme des moments de force (6.48) est :

$$\boxed{\mathbf{M_O^{ext}} = \sum_i \mathbf{M_{O,i}^{ext}} = \mathbf{r_{CM}} \times \sum_i \mathbf{F_i^{ext}} + \sum_i \mathbf{M_{CM,i}^{ext}} = \mathbf{r_{CM}} \times \mathbf{F^{ext}} + \mathbf{M_{CM}^{ext}} \quad (6.49)}$$

6.5.3 *Théorème du moment cinétique pour un solide*

- Le moment de la force $\mathbf{F_i}$ par rapport à l'origine *O* s'écrit :

$$\boxed{\mathbf{M_{O,i}} = \mathbf{r_i} \times \mathbf{F_i} = \left(\mathbf{r_{CM}} + \mathbf{r_i'}\right) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{r_{CM}} \times \mathbf{F_i} + \underbrace{\mathbf{r_i'} \times \mathbf{F}_i}_{\mathbf{M_{CM,i}}} \quad (6.48)}$$

- La somme des moments de force (6.48) est :

$$\boxed{\mathbf{M_O^{ext}} = \sum_i \mathbf{M_{O,i}^{ext}} = \mathbf{r_{CM}} \times \sum_i \mathbf{F_i^{ext}} + \sum_i \mathbf{M_{CM,i}^{ext}} = \mathbf{r_{CM}} \times \mathbf{F^{ext}} + \mathbf{M_{CM}^{ext}} \quad (6.49)}$$

- Le moment cinétique par rapport à l'origine *O* s'écrit :

$$\mathbf{L_{O,i}} = \mathbf{r_i} \times m_i \mathbf{v_i} = \left(\mathbf{r_{CM}} + \mathbf{r_i'}\right) \times m_i \left(\mathbf{v_{CM}} + \mathbf{v_i'}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \mathbf{L_{O,i}} = \mathbf{r_{CM}} \times m_i \mathbf{v_{CM}} + \mathbf{r_{CM}} \times m_i \mathbf{v_i'} + m_i \mathbf{r_i'} \times \mathbf{v_{CM}} + \underbrace{\mathbf{r_i'} \times m_i \mathbf{v_i'}}_{\mathbf{L_{CM,i}}} \quad (6.50)}$$

6.5.3 *Théorème du moment cinétique pour un solide*

- Le moment de la force $\mathbf{F_i}$ par rapport à l'origine *O* s'écrit :

$$\boxed{\mathbf{M_{O,i}} = \mathbf{r_i} \times \mathbf{F_i} = \left(\mathbf{r_{CM}} + \mathbf{r_i'}\right) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{r_{CM}} \times \mathbf{F_i} + \underbrace{\mathbf{r_i'} \times \mathbf{F}_i}_{\mathbf{M_{CM,i}}} \quad (6.48)}$$

- La somme des moments de force (6.48) est :

$$\boxed{\mathbf{M_O^{ext}} = \sum_i \mathbf{M_{O,i}^{ext}} = \mathbf{r_{CM}} \times \sum_i \mathbf{F_i^{ext}} + \sum_i \mathbf{M_{CM,i}^{ext}} = \mathbf{r_{CM}} \times \mathbf{F^{ext}} + \mathbf{M_{CM}^{ext}} \quad (6.49)}$$

- Le moment cinétique par rapport à l'origine *O* s'écrit :

$$\mathbf{L_{O,i}} = \mathbf{r_i} \times m_i \mathbf{v_i} = \left(\mathbf{r_{CM}} + \mathbf{r_i'}\right) \times m_i \left(\mathbf{v_{CM}} + \mathbf{v_i'}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \mathbf{L_{O,i}} = \mathbf{r_{CM}} \times m_i \mathbf{v_{CM}} + \mathbf{r_{CM}} \times m_i \mathbf{v_i'} + m_i \mathbf{r_i'} \times \mathbf{v_{CM}} + \underbrace{\mathbf{r_i'} \times m_i \mathbf{v_i'}}_{\mathbf{L_{CM,i}}} \quad (6.50)}$$

- La somme des moments cinétiques (6.50) est égale à :

$$\mathbf{L_O} = \sum_i \mathbf{L_{O,i}} = \mathbf{r_{CM}} \times \sum_i m_i \mathbf{v_{CM}} + \mathbf{r_{CM}} \times \sum_i m_i \mathbf{v_i'} + \sum_i m_i \mathbf{r_i'} \times \mathbf{v_{CM}} + \sum_i \mathbf{L_{CM,i}}$$

$$= \mathbf{r_{CM}} \times m \mathbf{v_{CM}} + \mathbf{r_{CM}} \times m \underbrace{\mathbf{v_{CM}}'}_{=0} + m \underbrace{\mathbf{r_{CM}}'}_{=0} \times \mathbf{v_{CM}} + \mathbf{L_{CM}}$$

6.5.3 Théorème du moment cinétique pour un solide

6.5.3 Théorème du moment cinétique pour un solide

$$\boxed{\mathbf{L_O} = \mathbf{r_{CM}} \times m\mathbf{v_{CM}} + \mathbf{L_{CM}} \quad (6.51)}$$

6.5.3 Théorème du moment cinétique pour un solide

$$\boxed{\mathbf{L_O} = \mathbf{r_{CM}} \times m\mathbf{v_{CM}} + \mathbf{L_{CM}} \quad (6.51)}$$

- La dérivée temporelle de (6.51) s'écrit :

$$\dot{\mathbf{L}}_\mathbf{O} = \underbrace{\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{CM}}_{=\mathbf{v_{CM}}} \times m\mathbf{v_{CM}} + \mathbf{r_{CM}} \times m\dot{\mathbf{v}}_\mathbf{CM} + \dot{\mathbf{L}}_\mathbf{CM}$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}}_\mathbf{O} = \mathbf{r_{CM}} \times m\mathbf{a_{CM}} + \dot{\mathbf{L}}_\mathbf{CM} \quad (6.52)}$$

6.5.3 *Théorème du moment cinétique pour un solide*

$$\boxed{\mathbf{L}_\mathbf{O} = \mathbf{r}_\mathbf{CM} \times m\mathbf{v}_\mathbf{CM} + \mathbf{L}_\mathbf{CM} \quad (6.51)}$$

- La dérivée temporelle de (6.51) s'écrit :

$$\dot{\mathbf{L}}_\mathbf{O} = \underbrace{\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{CM}}_{=\mathbf{v}_\mathbf{CM}} \times m\mathbf{v}_\mathbf{CM} + \mathbf{r}_\mathbf{CM} \times m\dot{\mathbf{v}}_\mathbf{CM} + \dot{\mathbf{L}}_\mathbf{CM}$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}}_\mathbf{O} = \mathbf{r}_\mathbf{CM} \times m\mathbf{a}_\mathbf{CM} + \dot{\mathbf{L}}_\mathbf{CM} \quad (6.52)}$$

- Le théorème du moment cinétique pour un solide devient :

$$\mathbf{M}_\mathbf{O}^\mathbf{ext} = \dot{\mathbf{L}}_\mathbf{O} \quad (O \text{ est un point fixe})$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_\mathbf{CM} \times \mathbf{F}^\mathbf{ext} + \mathbf{M}_\mathbf{CM}^\mathbf{ext} = \mathbf{r}_\mathbf{CM} \times m\mathbf{a}_\mathbf{CM} + \dot{\mathbf{L}}_\mathbf{CM} \quad \text{où} \quad \mathbf{F}^\mathbf{ext} = m\mathbf{a}_\mathbf{CM}$$

6.5.3 Théorème du moment cinétique pour un solide

$$\boxed{\mathbf{L}_{\mathbf{O}} = \mathbf{r}_{\mathbf{CM}} \times m\mathbf{v}_{\mathbf{CM}} + \mathbf{L}_{\mathbf{CM}} \quad (6.51)}$$

- La dérivée temporelle de (6.51) s'écrit :

$$\dot{\mathbf{L}}_{\mathbf{O}} = \underbrace{\dot{\mathbf{r}}_{\mathbf{CM}}}_{=\mathbf{v}_{\mathbf{CM}}} \times m\mathbf{v}_{\mathbf{CM}} + \mathbf{r}_{\mathbf{CM}} \times m\dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{CM}} + \dot{\mathbf{L}}_{\mathbf{CM}}$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}}_{\mathbf{O}} = \mathbf{r}_{\mathbf{CM}} \times m\mathbf{a}_{\mathbf{CM}} + \dot{\mathbf{L}}_{\mathbf{CM}} \quad (6.52)}$$

- Le théorème du moment cinétique pour un solide devient :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{O}}^{\mathbf{ext}} = \dot{\mathbf{L}}_{\mathbf{O}} \quad (O \text{ est un point fixe})$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_{\mathbf{CM}} \times \mathbf{F}^{\mathbf{ext}} + \mathbf{M}_{\mathbf{CM}}^{\mathbf{ext}} = \mathbf{r}_{\mathbf{CM}} \times m\mathbf{a}_{\mathbf{CM}} + \dot{\mathbf{L}}_{\mathbf{CM}} \quad \text{où} \quad \mathbf{F}^{\mathbf{ext}} = m\mathbf{a}_{\mathbf{CM}}$$

- Ainsi, $\boxed{\mathbf{M}_{\mathbf{CM}}^{\mathbf{ext}} = \dot{\mathbf{L}}_{\mathbf{CM}} \quad (6.53)}$

Ce théorème est valable même si le centre de masse est accéléré.