

Leçon 18 – 01/05/2025

6. Rotation en deux dimensions

- 6.3 Statique
- 6.4 Théorème du moment cinétique

6.3 Statique

Expérience :



6.3 Statique

Expérience : Barre fixée à un disque et contrepoids



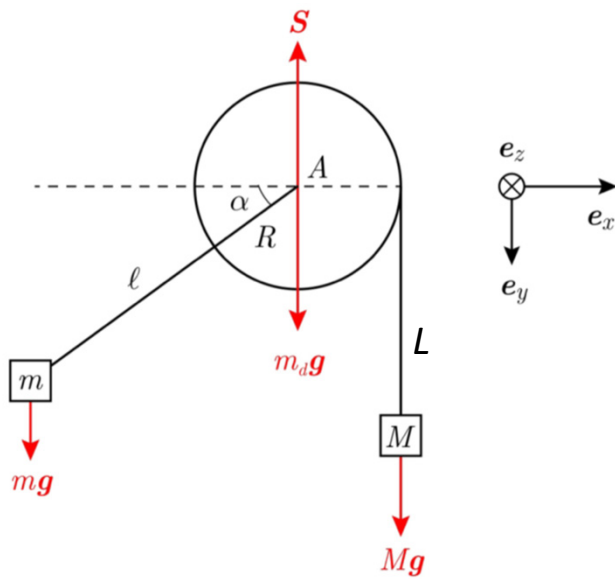
6.3 Statique

Expérience : Barre fixée à un disque et contrepoids



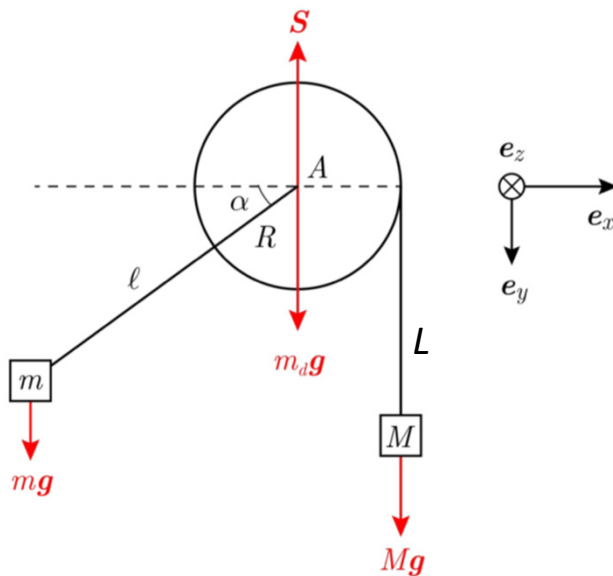
- L'état d'équilibre entre la barre fixée à un disque et le contrepoids est modifié lorsque l'on déplace le poids le long de la barre.

6.3.1 Disque, masse et contrepoids



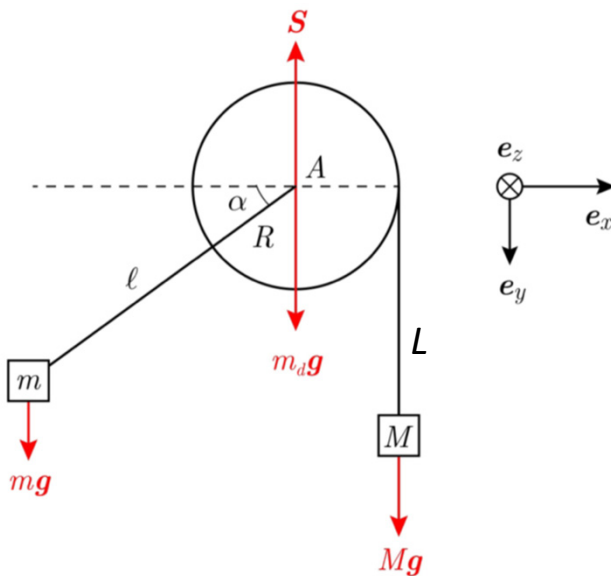
6.3.1 Disque, masse et contrepoids

Un disque de masse m_d et de rayon R tourne autour de son centre de masse A . Une barre de longueur l et de masse négligeable est fixée sur le disque. Une masse m se trouve à l'extrémité de la barre. Un contrepoids de masse M est attaché à un fil de masse négligeable enroulé autour du disque. Le système est à l'équilibre.



6.3.1 Disque, masse et contrepoids

Un disque de masse m_d et de rayon R tourne autour de son centre de masse A . Une barre de longueur l et de masse négligeable est fixée sur le disque. Une masse m se trouve à l'extrémité de la barre. Un contrepoids de masse M est attaché à un fil de masse négligeable enroulé autour du disque. Le système est à l'équilibre.



- Objet : disque + masse + contrepoids
 - Forces extérieures : poids $(m+M+m_d)\mathbf{g}$, soutien (en A) \mathbf{S}
 - Loi du mouvement : (équilibre)
- $\mathbf{F}^{\text{ext}} = (m+M+m_d)\mathbf{g} + \mathbf{S} = \mathbf{0}$
- Rotation autour de A : (équilibre)

$$\mathbf{M}_A^{\text{ext}} = \mathbf{M}_A(m\mathbf{g}) + \mathbf{M}_A(M\mathbf{g}) + \mathbf{M}_A(m_d\mathbf{g}) + \mathbf{M}_A(\mathbf{S}) = \mathbf{0}$$

6.3.1 Disque, masse et contrepoids

Remarques :

6.3.1 Disque, masse et contrepoids

Choix du repère : \otimes \mathbf{e}_z entrant

- $\mathbf{M}_A(m\mathbf{g}) = \mathbf{r}_m \times m\mathbf{g} = (-l\cos\alpha\mathbf{e}_x + l\sin\alpha\mathbf{e}_y) \times mg\mathbf{e}_y = -l\cos\alpha m g \mathbf{e}_z$
- $\mathbf{M}_A(M\mathbf{g}) = \mathbf{r}_M \times M\mathbf{g} = (R\mathbf{e}_x + L\mathbf{e}_y) \times Mg\mathbf{e}_y = RMg\mathbf{e}_z$
- $\mathbf{M}_A(m_d\mathbf{g}) = \mathbf{r}_A \times m_d\mathbf{g} = \mathbf{AA} \times m_d\mathbf{g} = \mathbf{0}$ où $\mathbf{AA} = \mathbf{0}$
- $\mathbf{M}_A(\mathbf{S}) = \mathbf{r}_A \times \mathbf{S} = \mathbf{AA} \times \mathbf{S} = \mathbf{0}$

Remarques :

6.3.1 Disque, masse et contrepoids

Choix du repère : $\otimes \mathbf{e}_z$ entrant

- $\mathbf{M}_A(m\mathbf{g}) = \mathbf{r}_m \times m\mathbf{g} = (-l\cos\alpha\mathbf{e}_x + l\sin\alpha\mathbf{e}_y) \times mg\mathbf{e}_y = -l\cos\alpha mg\mathbf{e}_z$
- $\mathbf{M}_A(M\mathbf{g}) = \mathbf{r}_M \times M\mathbf{g} = (R\mathbf{e}_x + L\mathbf{e}_y) \times Mg\mathbf{e}_y = RMg\mathbf{e}_z$
- $\mathbf{M}_A(m_d\mathbf{g}) = \mathbf{r}_A \times m_d\mathbf{g} = \mathbf{AA} \times m_d\mathbf{g} = \mathbf{0}$ où $\mathbf{AA} = \mathbf{0}$
- $\mathbf{M}_A(\mathbf{S}) = \mathbf{r}_A \times \mathbf{S} = \mathbf{AA} \times \mathbf{S} = \mathbf{0}$

Rotation autour de A :

- Selon \mathbf{e}_z : $-l\cos\alpha mg + RMg = 0$

Ainsi, $\cos\alpha = \frac{RM}{lm} > 0$ (6.10)

Remarques :

6.3.1 Disque, masse et contrepoids

Choix du repère : $\otimes \mathbf{e}_z$ entrant

- $\mathbf{M}_A(m\mathbf{g}) = \mathbf{r}_m \times m\mathbf{g} = (-l\cos\alpha\mathbf{e}_x + l\sin\alpha\mathbf{e}_y) \times mg\mathbf{e}_y = -l\cos\alpha mg\mathbf{e}_z$
- $\mathbf{M}_A(M\mathbf{g}) = \mathbf{r}_M \times M\mathbf{g} = (R\mathbf{e}_x + L\mathbf{e}_y) \times Mg\mathbf{e}_y = RMg\mathbf{e}_z$
- $\mathbf{M}_A(m_d\mathbf{g}) = \mathbf{r}_A \times m_d\mathbf{g} = \mathbf{AA} \times m_d\mathbf{g} = \mathbf{0}$ où $\mathbf{AA} = \mathbf{0}$
- $\mathbf{M}_A(\mathbf{S}) = \mathbf{r}_A \times \mathbf{S} = \mathbf{AA} \times \mathbf{S} = \mathbf{0}$

Rotation autour de A :

- Selon \mathbf{e}_z : $-l\cos\alpha mg + RMg = 0$

Ainsi, $\cos\alpha = \frac{RM}{lm} > 0$ (6.10)

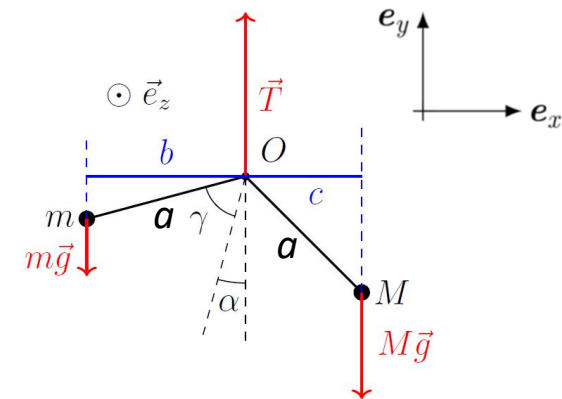
Remarques :

1. Pour que l'équilibre existe ($\cos\alpha \leq 1$), il faut que $\frac{RM}{lm} \leq 1 \Leftrightarrow l \geq \frac{RM}{m}$ ainsi, l doit être assez grand.
2. Il y a deux types de solution pour α : l'équilibre est stable pour $\alpha \geq 0$ et instable pour $\alpha < 0$.

6.3.1 Disque, masse et contrepoids et 6.3.2 cintre suspendu

Remarque :

Cintre suspendu d'angle d'ouverture 2γ

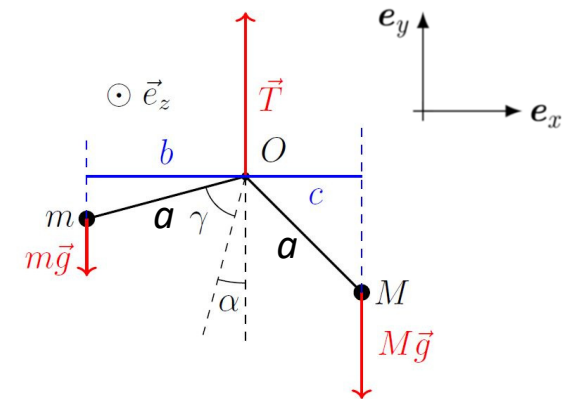


6.3.1 Disque, masse et contrepoids et 6.3.2 cintre suspendu

3. Pour $m \rightarrow +\infty$, on a $\cos \alpha \rightarrow 0$ et $\alpha \rightarrow \pi/2$ (équilibre stable).

Remarque :

Cintre suspendu d'angle d'ouverture 2γ



6.3.1 Disque, masse et contrepoids et 6.3.2 cintre suspendu

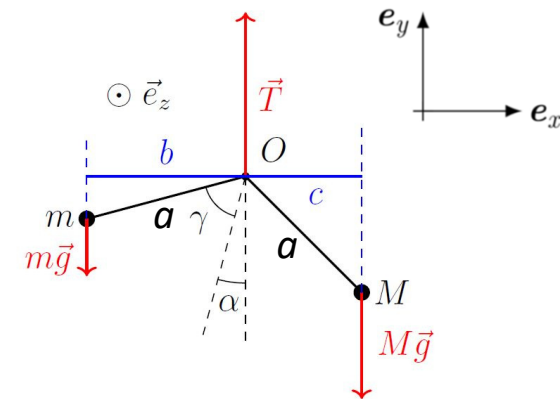
3. Pour $m \rightarrow +\infty$, on a $\cos \alpha \rightarrow 0$ et $\alpha \rightarrow \pi/2$ (équilibre stable).

Remarque :

On montre facilement que le moment du poids de toutes les parties d'un objet est égal à celui du poids total de l'objet appliqué au centre de masse :

$$\sum_i \mathbf{M}_A(m_i \mathbf{g}) = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{g} = \left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i \right) \times \mathbf{g} = m \mathbf{r}_{\text{CM}} \times \mathbf{g} \quad \boxed{\sum_i \mathbf{M}_A(m_i \mathbf{g}) = \mathbf{r}_{\text{CM}} \times m \mathbf{g} = \mathbf{M}_A(m \mathbf{g}) \quad (6.11)}$$

Cintre suspendu d'angle d'ouverture 2γ



6.3.1 Disque, masse et contrepoids et 6.3.2 cintre suspendu

3. Pour $m \rightarrow +\infty$, on a $\cos \alpha \rightarrow 0$ et $\alpha \rightarrow \pi/2$ (équilibre stable).

Remarque :

On montre facilement que le moment du poids de toutes les parties d'un objet est égal à celui du poids total de l'objet appliqué au centre de masse :

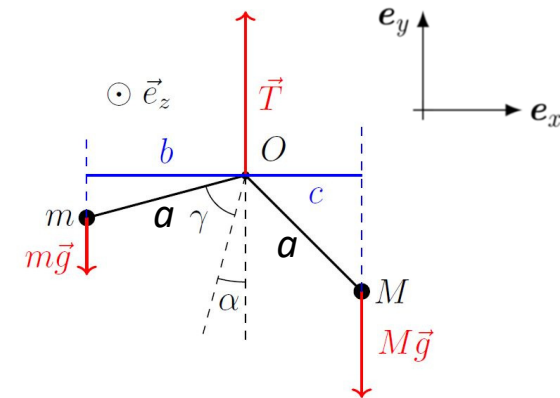
$$\sum_i \mathbf{M}_A(m_i \mathbf{g}) = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{g} = \left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i \right) \times \mathbf{g} = m \mathbf{r}_{\text{CM}} \times \mathbf{g} \quad \boxed{\sum_i \mathbf{M}_A(m_i \mathbf{g}) = \mathbf{r}_{\text{CM}} \times m \mathbf{g} = \mathbf{M}_A(m \mathbf{g}) \quad (6.11)}$$

Cintre suspendu d'angle d'ouverture 2γ

Objet : cintre d'angle d'ouverture 2γ avec deux masses m et M

($\gamma < \pi/2$ et $\alpha < \pi/2$)

Rotation autour de O : (équilibre) $\mathbf{M}_O^{\text{ext}} = \sum_i \mathbf{M}_{O,i} = \mathbf{0}$



6.3.1 Disque, masse et contrepoids et 6.3.2 cintre suspendu

3. Pour $m \rightarrow +\infty$, on a $\cos \alpha \rightarrow 0$ et $\alpha \rightarrow \pi/2$ (équilibre stable).

Remarque :

On montre facilement que le moment du poids de toutes les parties d'un objet est égal à celui du poids total de l'objet appliqué au centre de masse :

$$\sum_i \mathbf{M}_A(m_i \mathbf{g}) = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{g} = \left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i \right) \times \mathbf{g} = m \mathbf{r}_{\text{CM}} \times \mathbf{g} \quad \boxed{\sum_i \mathbf{M}_A(m_i \mathbf{g}) = \mathbf{r}_{\text{CM}} \times m \mathbf{g} = \mathbf{M}_A(m \mathbf{g}) \quad (6.11)}$$

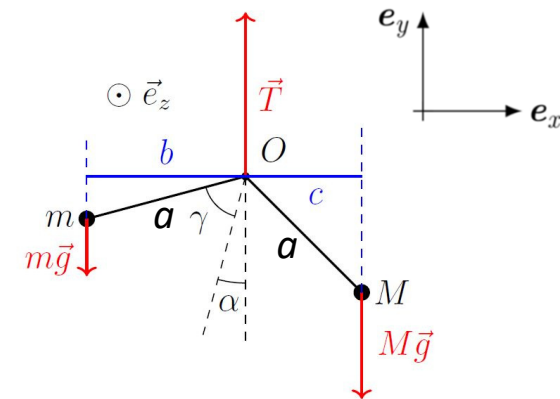
Cintre suspendu d'angle d'ouverture 2γ

Objet : cintre d'angle d'ouverture 2γ avec deux masses m et M

($\gamma < \pi/2$ et $\alpha < \pi/2$)

Rotation autour de O : (équilibre) $\mathbf{M}_O^{\text{ext}} = \sum_i \mathbf{M}_{O,i} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{M}_O^{\text{ext}} = \mathbf{M}_O(m \mathbf{g}) + \mathbf{M}_O(M \mathbf{g}) + \mathbf{M}_O(\mathbf{T}) = \mathbf{0}$$



6.3.1 Disque, masse et contrepoids et 6.3.2 cintre suspendu

3. Pour $m \rightarrow +\infty$, on a $\cos \alpha \rightarrow 0$ et $\alpha \rightarrow \pi/2$ (équilibre stable).

Remarque :

On montre facilement que le moment du poids de toutes les parties d'un objet est égal à celui du poids total de l'objet appliqué au centre de masse :

$$\sum_i \mathbf{M}_A(m_i \mathbf{g}) = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{g} = \left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i \right) \times \mathbf{g} = m \mathbf{r}_{\text{CM}} \times \mathbf{g} \quad \boxed{\sum_i \mathbf{M}_A(m_i \mathbf{g}) = \mathbf{r}_{\text{CM}} \times m \mathbf{g} = \mathbf{M}_A(m \mathbf{g}) \quad (6.11)}$$

Cintre suspendu d'angle d'ouverture 2γ

Objet : cintre d'angle d'ouverture 2γ avec deux masses m et M

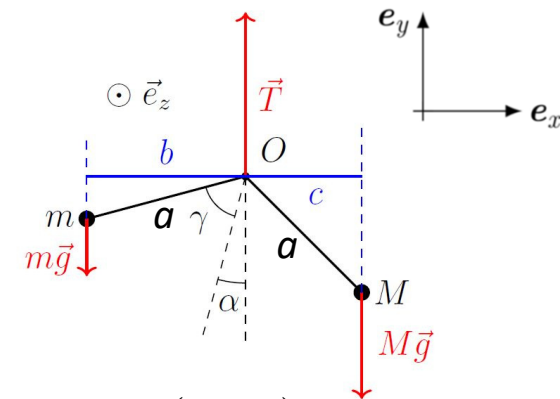
($\gamma < \pi/2$ et $\alpha < \pi/2$)

Rotation autour de O : (équilibre) $\mathbf{M}_O^{\text{ext}} = \sum_i \mathbf{M}_{O,i} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{M}_O^{\text{ext}} = \mathbf{M}_O(m \mathbf{g}) + \mathbf{M}_O(M \mathbf{g}) + \mathbf{M}_O(\mathbf{T}) = \mathbf{0}$$

Selon \mathbf{e}_z : $bmg - cMg + 0 = 0$

$$\text{et } b = a \sin(\gamma + \alpha), \quad c = a \sin(\gamma - \alpha)$$



6.3.1 Disque, masse et contrepoids et 6.3.2 cintre suspendu

3. Pour $m \rightarrow +\infty$, on a $\cos \alpha \rightarrow 0$ et $\alpha \rightarrow \pi/2$ (équilibre stable).

Remarque :

On montre facilement que le moment du poids de toutes les parties d'un objet est égal à celui du poids total de l'objet appliqué au centre de masse :

$$\sum_i \mathbf{M}_A(m_i \mathbf{g}) = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{g} = \left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i \right) \times \mathbf{g} = m \mathbf{r}_{\text{CM}} \times \mathbf{g} \quad \boxed{\sum_i \mathbf{M}_A(m_i \mathbf{g}) = \mathbf{r}_{\text{CM}} \times m \mathbf{g} = \mathbf{M}_A(m \mathbf{g}) \quad (6.11)}$$

Cintre suspendu d'angle d'ouverture 2γ

Objet : cintre d'angle d'ouverture 2γ avec deux masses m et M

($\gamma < \pi/2$ et $\alpha < \pi/2$)

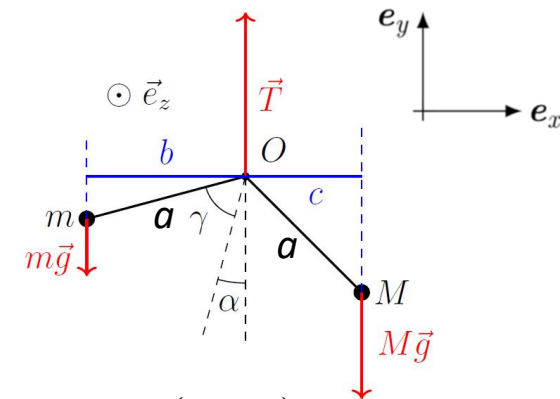
Rotation autour de O : (équilibre) $\mathbf{M}_O^{\text{ext}} = \sum_i \mathbf{M}_{O,i} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{M}_O^{\text{ext}} = \mathbf{M}_O(m \mathbf{g}) + \mathbf{M}_O(M \mathbf{g}) + \mathbf{M}_O(\mathbf{T}) = \mathbf{0}$$

Selon \mathbf{e}_z : $bmg - cMg + 0 = 0$

et $b = a \sin(\gamma + \alpha)$, $c = a \sin(\gamma - \alpha)$

Ainsi, $\boxed{m \sin(\gamma + \alpha) - M \sin(\gamma - \alpha) = 0 \quad (6.12)}$



6.3.2 Cintre suspendu

6.3.2 Cintre suspendu

$$M(\sin\gamma\cos\alpha - \sin\alpha\cos\gamma) = m(\sin\gamma\cos\alpha + \sin\alpha\cos\gamma)$$

$$(M+m)\sin\alpha\cos\gamma = (M-m)\cos\alpha\sin\gamma$$

$$\tan\alpha = \frac{M-m}{M+m}\tan\gamma$$

6.3.2 Cintre suspendu

$$M(\sin\gamma\cos\alpha - \sin\alpha\cos\gamma) = m(\sin\gamma\cos\alpha + \sin\alpha\cos\gamma)$$

$$(M+m)\sin\alpha\cos\gamma = (M-m)\cos\alpha\sin\gamma$$

$$\tan\alpha = \frac{M-m}{M+m}\tan\gamma$$

Cas particulier : si $m = M \Rightarrow \alpha = 0$ (axe de symétrie vertical)

6.4 Théorème du moment cinétique

6.4 Théorème du moment cinétique et 6.4.1 point matériel

Observation :

Point matériel

6.4 Théorème du moment cinétique et 6.4.1 point matériel

Observation :

Lorsqu'on n'agit pas sur un objet considéré comme un point matériel, il suit un MRU : vitesse et quantité de mouvement sont constantes (principe d'inertie de Galilée)

Point matériel

6.4 Théorème du moment cinétique et 6.4.1 point matériel

Observation :

Lorsqu'on n'agit pas sur un objet considéré comme un point matériel, il suit un MRU : vitesse et quantité de mouvement sont constantes (principe d'inertie de Galilée)

Point matériel

2^{ème} loi de Newton (translation)

La force résultante **F** modifie la quantité de mouvement **P**.

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{P}} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \quad \text{où } \mathbf{P} = m\mathbf{v} \quad (6.13)$$

6.4 Théorème du moment cinétique et 6.4.1 point matériel

Observation :

Lorsqu'on n'agit pas sur un objet considéré comme un point matériel, il suit un MRU : vitesse et quantité de mouvement sont constantes (principe d'inertie de Galilée)

Point matériel

2^{ème} loi de Newton (translation)

La force résultante **F** modifie la quantité de mouvement **P**.

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{P}} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \quad \text{où } \mathbf{P} = m\mathbf{v} \quad (6.13)$$

2^{ème} loi de Newton (rotation)

Par analogie avec la translation, le moment de force **M_A** par rapport à un point fixe *A* modifie la « quantité de rotation » autour de *A* appelée le moment cinétique **L_A**.

6.4.2 Théorème du moment cinétique

6.4.2 Théorème du moment cinétique

Le moment de force résultant \mathbf{M}_A évalué par rapport au point A est la cause de la dérivée temporelle du moment cinétique \mathbf{L}_A :

$$\mathbf{M}_A = \frac{d\mathbf{L}_A}{dt} = \dot{\mathbf{L}}_A \quad (6.14)$$

6.4.2 Théorème du moment cinétique

Le moment de force résultant \mathbf{M}_A évalué par rapport au point A est la cause de la dérivée temporelle du moment cinétique \mathbf{L}_A :

$$\mathbf{M}_A = \frac{d\mathbf{L}_A}{dt} = \dot{\mathbf{L}}_A \quad (6.14)$$

En prenant le produit vectoriel du vecteur position $\mathbf{r} = \mathbf{AP}$ et de la 2^{ème} loi de Newton (translation du point matériel P) :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \mathbf{F} &= \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{P}) - \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{P} \\ &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{P}) - \underbrace{\mathbf{v} \times m\mathbf{v}}_{=0} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{P}) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \mathbf{M}_A = \mathbf{AP} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{P}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{AP} \times \mathbf{P}) = \frac{d}{dt}\mathbf{L}_A$$

6.4.2 Théorème du moment cinétique

Le moment de force résultant \mathbf{M}_A évalué par rapport au point A est la cause de la dérivée temporelle du moment cinétique \mathbf{L}_A :

$$\mathbf{M}_A = \frac{d\mathbf{L}_A}{dt} = \dot{\mathbf{L}}_A \quad (6.14)$$

En prenant le produit vectoriel du vecteur position $\mathbf{r} = \mathbf{AP}$ et de la 2^{ème} loi de Newton (translation du point matériel P) :

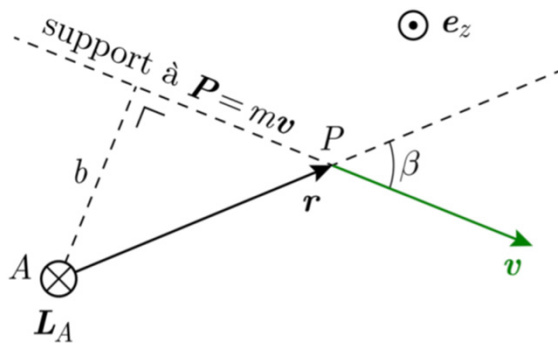
$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \mathbf{F} &= \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{P}) - \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{P} \\ &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{P}) - \underbrace{\mathbf{v} \times m\mathbf{v}}_{=0} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{P}) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \mathbf{M}_A = \mathbf{AP} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{P}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{AP} \times \mathbf{P}) = \frac{d}{dt}\mathbf{L}_A$$

Le moment cinétique $\mathbf{L}_A = \mathbf{AP} \times \mathbf{P} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{P}$ est défini pour une rotation autour du point A à une constante près.

6.4.3 Moment cinétique

Remarque :

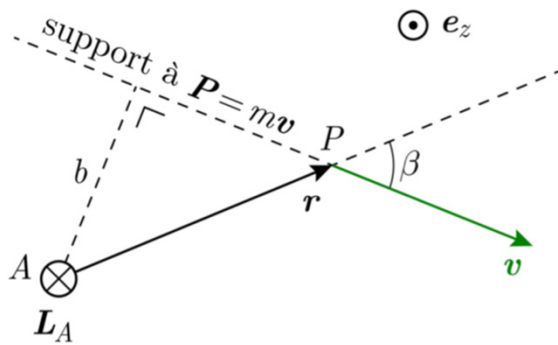


6.4.3 Moment cinétique

Le moment cinétique pour un mouvement de rotation autour d'un point fixe A d'un point matériel P est :

$$\mathbf{L}_A = \mathbf{AP} \times \mathbf{P} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} \quad (6.15)$$

Remarque :



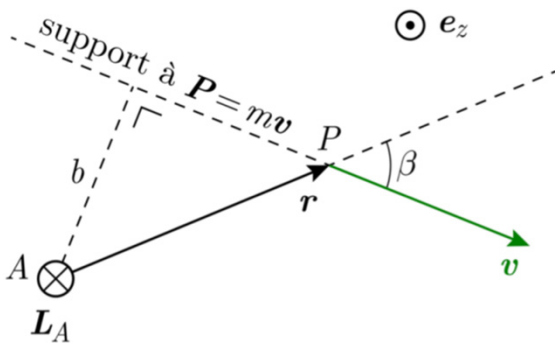
6.4.3 Moment cinétique

Le moment cinétique pour un mouvement de rotation autour d'un point fixe A d'un point matériel P est :

$$\mathbf{L}_A = \mathbf{AP} \times \mathbf{P} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} \quad (6.15)$$

- Unité physique (SI) : $[\text{kg.m}^2.\text{s}^{-1}]$

Remarque :



6.4.3 Moment cinétique

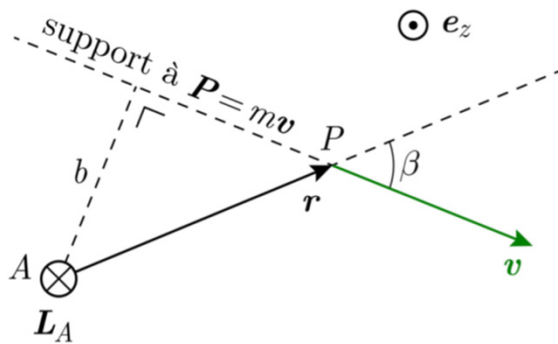
Le moment cinétique pour un mouvement de rotation autour d'un point fixe A d'un point matériel P est :

$$\mathbf{L}_A = \mathbf{AP} \times \mathbf{P} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} \quad (6.15)$$

- Unité physique (SI) : $[\text{kg.m}^2.\text{s}^{-1}]$

Remarque :

Le moment cinétique peut être calculé de la même manière que le moment de force : il est normal à \mathbf{r} et à \mathbf{P} , donc sortant ou entrant.



6.4.3 Moment cinétique

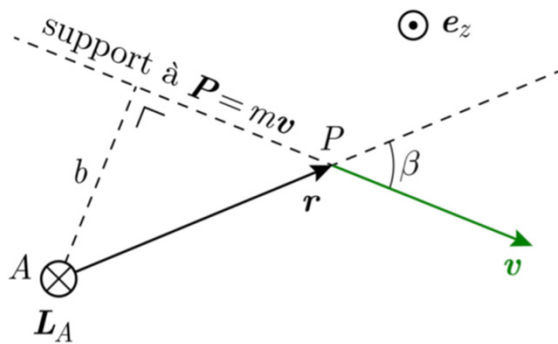
Le moment cinétique pour un mouvement de rotation autour d'un point fixe A d'un point matériel P est :

$$\mathbf{L}_A = \mathbf{AP} \times \mathbf{P} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} \quad (6.15)$$

- Unité physique (SI) : $[\text{kg.m}^2.\text{s}^{-1}]$

Remarque :

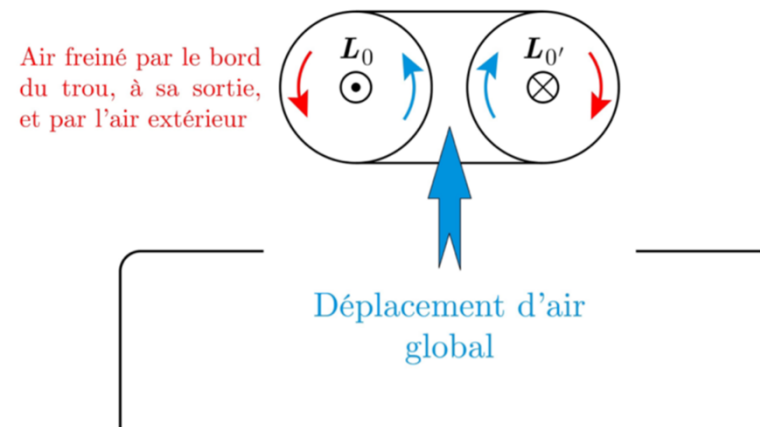
Le moment cinétique peut être calculé de la même manière que le moment de force : il est normal à \mathbf{r} et à \mathbf{P} , donc sortant ou entrant.



- $\|\mathbf{L}_A\| = b\|\mathbf{P}\|$: bras de levier fois la norme de la quantité de mouvement.
- $b = \|\mathbf{r}\| |\sin\beta|$ où β est l'angle formé par \mathbf{r} et \mathbf{P} .
- Ici, $\mathbf{L}_A = -L_A \mathbf{e}_z$ où $L_A = bmv$ (dépend du choix de \mathbf{e}_z)

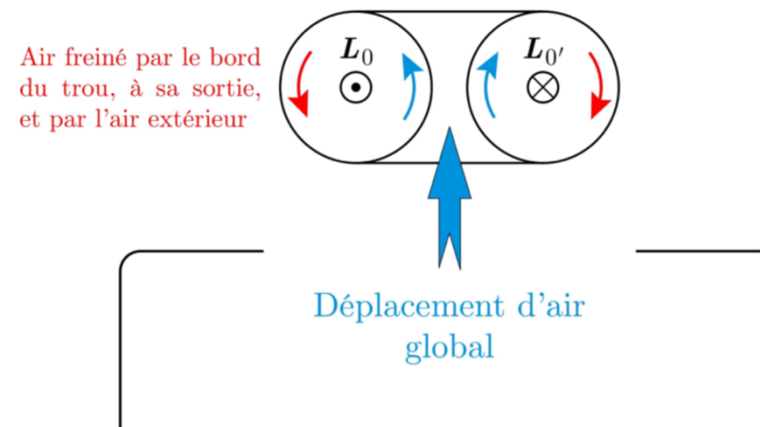
6.4.3 Moment cinétique

Expérience :



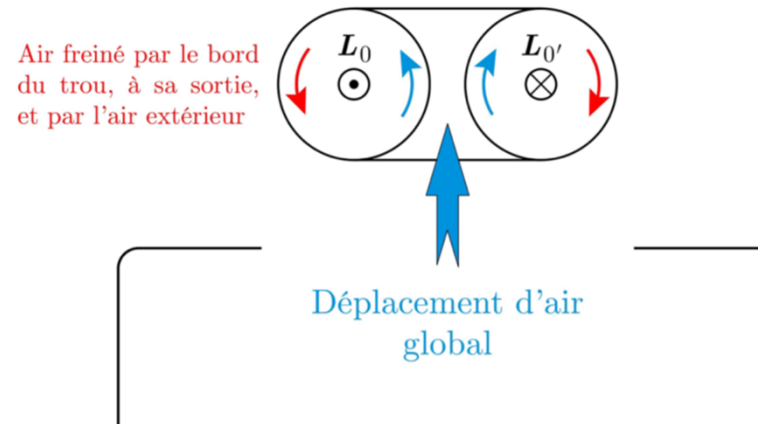
6.4.3 Moment cinétique

Expérience : Vortex de fumée



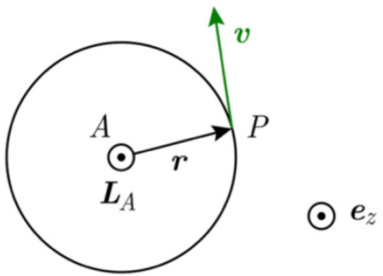
6.4.3 Moment cinétique

Expérience : Vortex de fumée



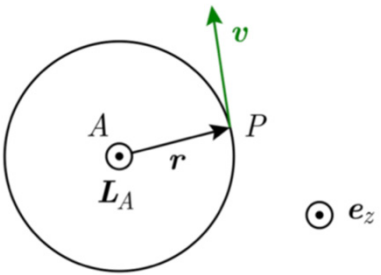
- En tirant et en relâchant la membrane arrière du cube, on peut créer à la sortie du trou un vortex de fumée.
- La rotation de la fumée en deux régions opposées du vortex (tore) s'effectue dans des sens opposés. Ainsi, les moments cinétiques L_0 et $L_{0'}$ sont opposés et se compensent de sorte que le moment cinétique du vortex reste nul en tout temps.

6.4.4 Mouvement circulaire uniforme



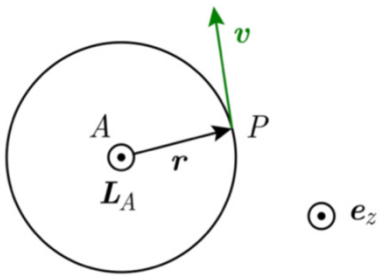
6.4.4 Mouvement circulaire uniforme

Un objet de masse m a un mouvement circulaire uniforme si sa distance R au point fixe A est constante et sa vitesse scalaire $v_0 = \text{cste}$.



6.4.4 Mouvement circulaire uniforme

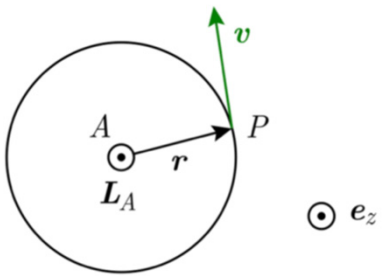
Un objet de masse m a un mouvement circulaire uniforme si sa distance R au point fixe A est constante et sa vitesse scalaire $v_0 = \text{cste}$.



- $\|\mathbf{P}\| = m\|\mathbf{v}\| = mv_0 = \text{cste}$
- $b = \|\mathbf{r}\| = R = \text{cste}$
- $\mathbf{L}_A = mRv_0\mathbf{e}_z = \text{cste} \Rightarrow \mathbf{M}_A = \mathbf{0}$

6.4.4 Mouvement circulaire uniforme

Un objet de masse m a un mouvement circulaire uniforme si sa distance R au point fixe A est constante et sa vitesse scalaire $v_0 = \text{cste}$.



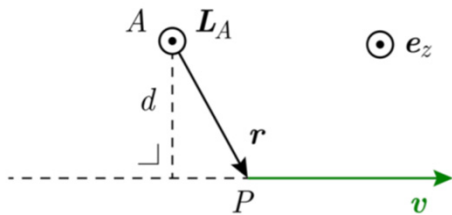
- $\|\mathbf{P}\| = m\|\mathbf{v}\| = mv_0 = \text{cste}$
- $b = \|\mathbf{r}\| = R = \text{cste}$
- $\mathbf{L}_A = mRv_0\mathbf{e}_z = \text{cste} \Rightarrow \mathbf{M}_A = \mathbf{0}$

Un mouvement circulaire uniforme est caractérisé par un moment cinétique \mathbf{L}_A constant où A est le centre de la trajectoire circulaire.

La force \mathbf{F} qui agit sur l'objet est une force radiale :

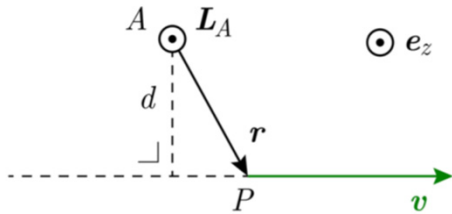
$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}}_A = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{r} \parallel \mathbf{F} \quad (6.16)$$

6.4.5 Mouvement rectiligne uniforme



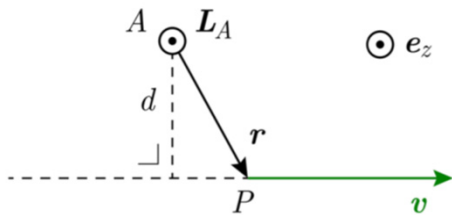
6.4.5 Mouvement rectiligne uniforme

Un point matériel a un mouvement rectiligne uniforme (MRU). Soit d la distance qui sépare le point A de la trajectoire du point matériel P de masse m et de vitesse $v_0 = \text{cste}$.



6.4.5 Mouvement rectiligne uniforme

Un point matériel a un mouvement rectiligne uniforme (MRU). Soit d la distance qui sépare le point A de la trajectoire du point matériel P de masse m et de vitesse $v_0 = \text{cste}$.

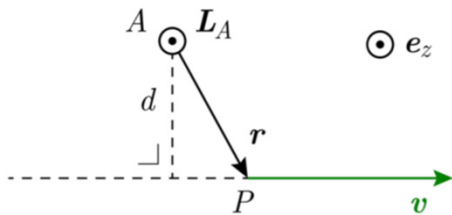


- $\|\mathbf{P}\| = m\|\mathbf{v}\| = mv_0 = \text{cste}$
- $b = d = \text{cste}$ (bras de levier)

- $\mathbf{L}_A = mdv_0 \mathbf{e}_z = \text{cste} \quad (6.17)$

6.4.5 Mouvement rectiligne uniforme

Un point matériel a un mouvement rectiligne uniforme (MRU). Soit d la distance qui sépare le point A de la trajectoire du point matériel P de masse m et de vitesse $v_0 = \text{cste}$.

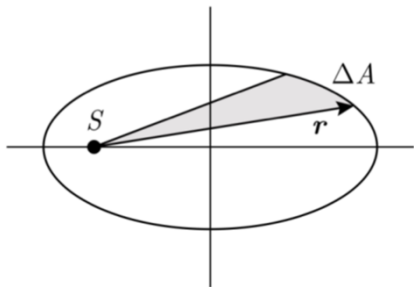
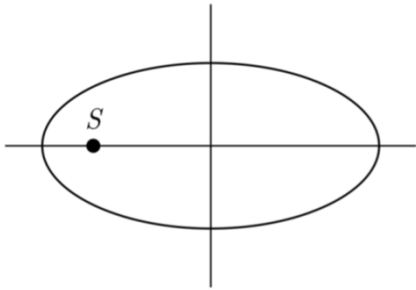


- $\|\mathbf{P}\| = m\|\mathbf{v}\| = mv_0 = \text{cste}$
- $b = d = \text{cste}$ (bras de levier)

- $\mathbf{L}_A = mdv_0 \mathbf{e}_z = \text{cste} \quad (6.17)$

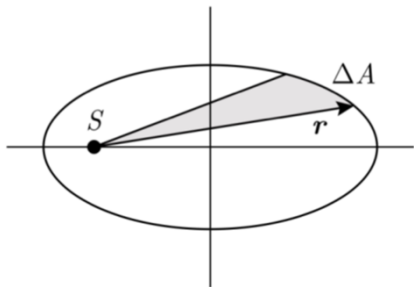
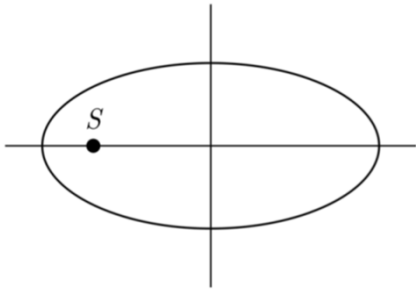
Un mouvement rectiligne uniforme est caractérisé par un moment cinétique \mathbf{L}_A constant par rapport à un point A quelconque. Si A est sur la trajectoire, $\mathbf{L}_A = \mathbf{0}$ ($d = 0$).

6.4.6 Lois de Kepler



6.4.6 Lois de Kepler

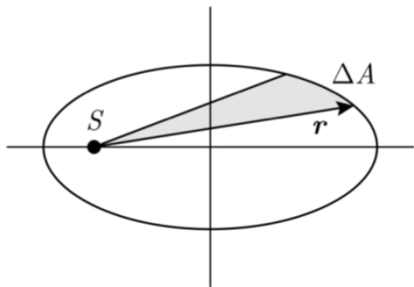
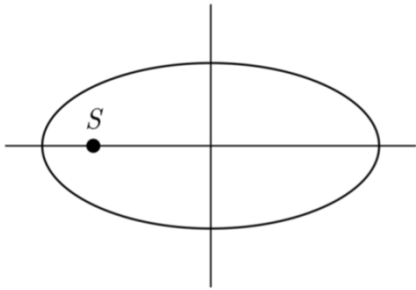
1^{ère} loi de Kepler :



6.4.6 Lois de Kepler

1^{ère} loi de Kepler :

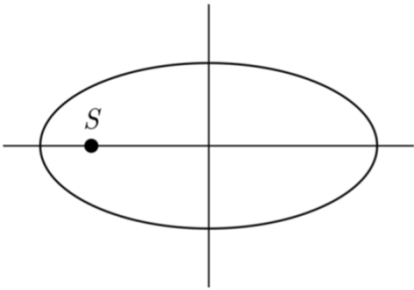
Les planètes ont une trajectoire elliptique autour du soleil qui occupe un des foyers.



6.4.6 Lois de Kepler

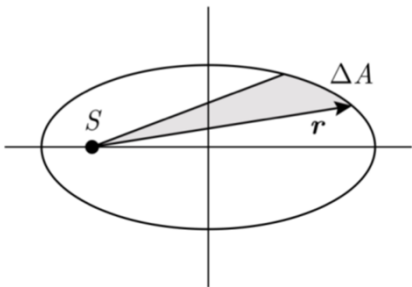
1^{ère} loi de Kepler :

Les planètes ont une trajectoire elliptique autour du soleil qui occupe un des foyers.



Objet : planète

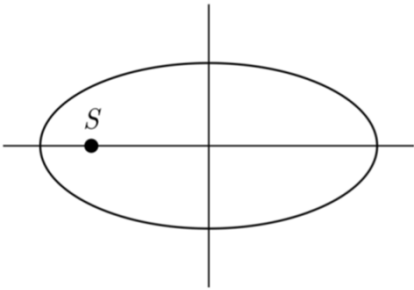
Force : force de la gravitation **F** dirigée vers le soleil



6.4.6 Lois de Kepler

1^{ère} loi de Kepler :

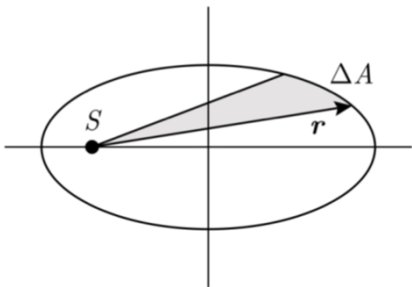
Les planètes ont une trajectoire elliptique autour du soleil qui occupe un des foyers.



Objet : planète

Force : force de la gravitation **F** dirigée vers le soleil

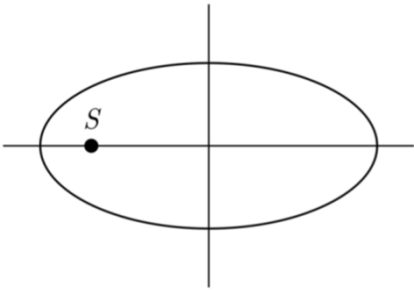
2^{ème} loi de Kepler :



6.4.6 Lois de Kepler

1^{ère} loi de Kepler :

Les planètes ont une trajectoire elliptique autour du soleil qui occupe un des foyers.

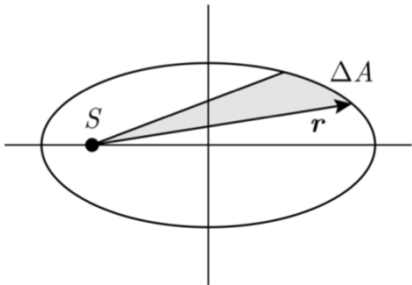


Objet : planète

Force : force de la gravitation **F** dirigée vers le soleil

2^{ème} loi de Kepler :

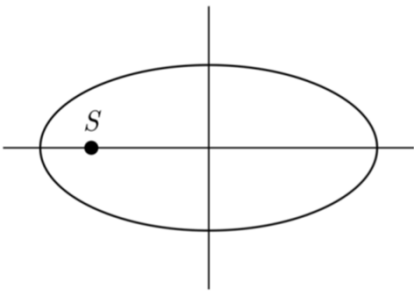
La vitesse aréolaire \dot{A} est constante.



6.4.6 Lois de Kepler

1^{ère} loi de Kepler :

Les planètes ont une trajectoire elliptique autour du soleil qui occupe un des foyers.

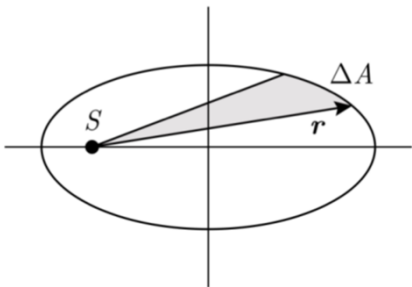


Objet : planète

Force : force de la gravitation \mathbf{F} dirigée vers le soleil

2^{ème} loi de Kepler :

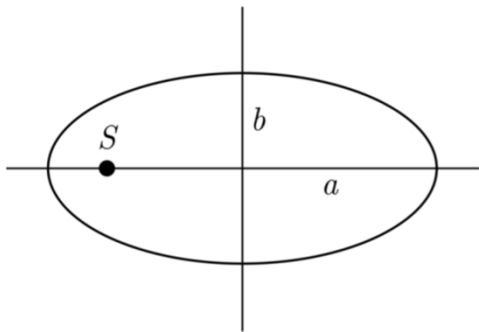
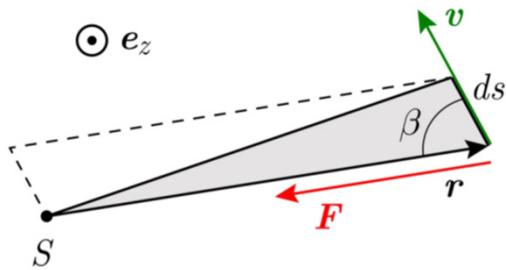
La vitesse aréolaire \dot{A} est constante.



ΔA est l'aire balayée par le vecteur position \mathbf{r} durant un intervalle de temps Δt .

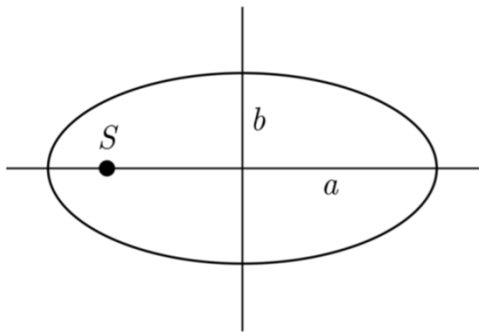
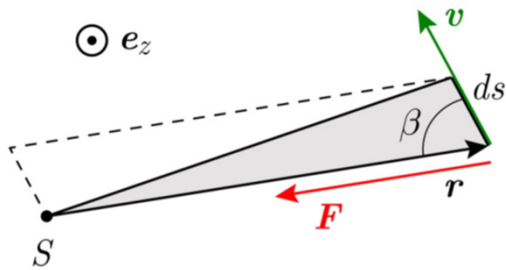
$$\dot{A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt} = \text{cste} \quad (6.18)$$

6.4.6 Lois de Kepler



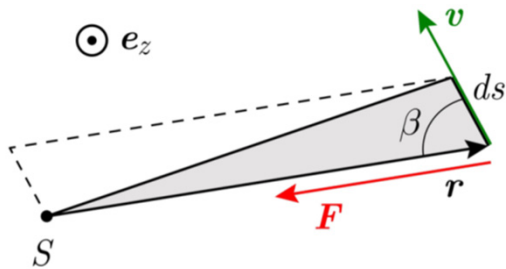
6.4.6 Lois de Kepler

En effet, c'est une conséquence du théorème du moment cinétique :

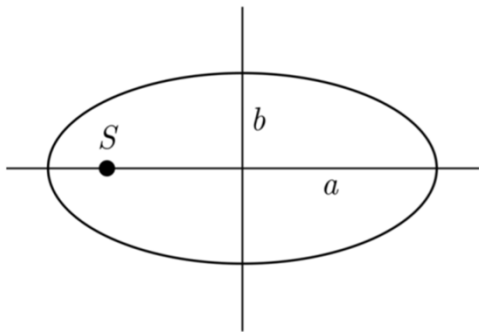


6.4.6 Lois de Kepler

En effet, c'est une conséquence du théorème du moment cinétique :

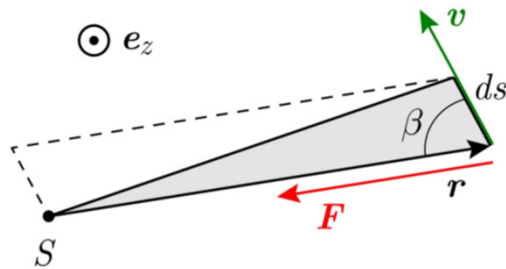


- $\mathbf{M}_S = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{L}_S = L_S \mathbf{e}_z = \text{cste}$
- $L_S = r \sin \beta \, m v = \text{cste}$
- $dA = (1/2) r ds \sin \beta$



6.4.6 Lois de Kepler

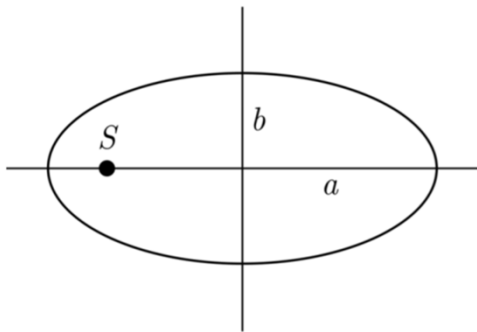
En effet, c'est une conséquence du théorème du moment cinétique :



- $\mathbf{M}_S = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{L}_S = L_S \mathbf{e}_z = \text{cste}$
- $L_S = r \sin \beta \, m v = \text{cste}$
- $dA = (1/2) r ds \sin \beta$

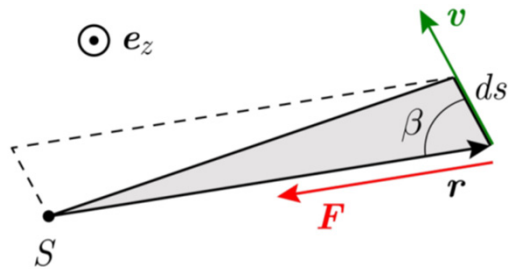
Ainsi, la vitesse aréolaire s'écrit :

$$\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r \frac{ds}{dt} \sin \beta = \frac{1}{2} r v \sin \beta = \frac{L_S}{2m} = \text{cste}$$



6.4.6 Lois de Kepler

En effet, c'est une conséquence du théorème du moment cinétique :

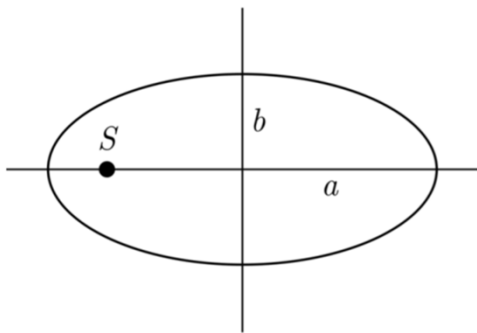


- $\mathbf{M}_S = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{L}_S = L_S \mathbf{e}_z = \text{cste}$
- $L_S = r \sin \beta m v = \text{cste}$
- $dA = (1/2) r ds \sin \beta$

Ainsi, la vitesse aréolaire s'écrit :

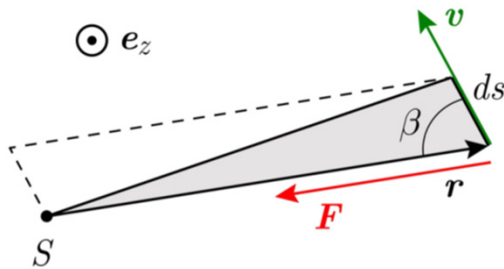
$$\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r \frac{ds}{dt} \sin \beta = \frac{1}{2} r v \sin \beta = \frac{L_S}{2m} = \text{cste}$$

3^{ème} loi de Kepler :



6.4.6 Lois de Kepler

En effet, c'est une conséquence du théorème du moment cinétique :

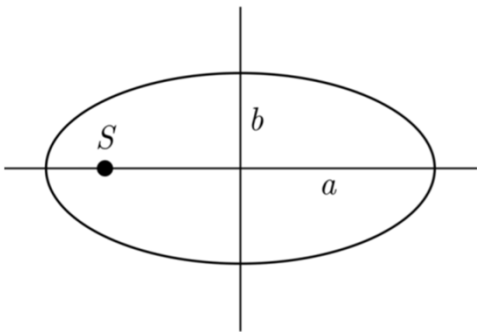


- $\mathbf{M}_S = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{L}_S = L_S \mathbf{e}_z = \text{cste}$
- $L_S = r \sin \beta m v = \text{cste}$
- $dA = (1/2) r ds \sin \beta$

Ainsi, la vitesse aréolaire s'écrit :

$$\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r \frac{ds}{dt} \sin \beta = \frac{1}{2} r v \sin \beta = \frac{L_S}{2m} = \text{cste}$$

3^{ème} loi de Kepler :



Le rapport de la période de révolution T de la planète au carré divisée par le demi-grand axe a de l'ellipse au cube est une constante.

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{cste} \quad (6.19)$$

6.4.6 Lois de Kepler

Expérience :



6.4.6 Lois de Kepler

Expérience : Force centrale et 2^{ème} loi de Kepler



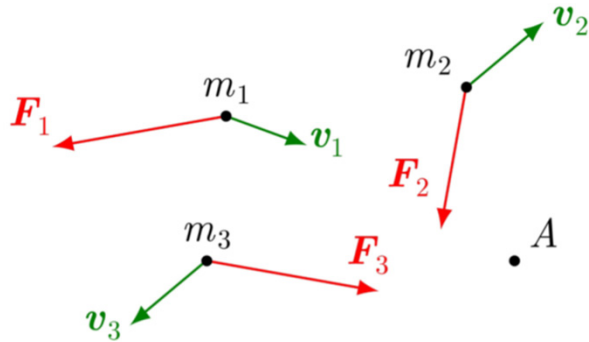
6.4.6 Lois de Kepler

Expérience : Force centrale et 2^{ème} loi de Kepler

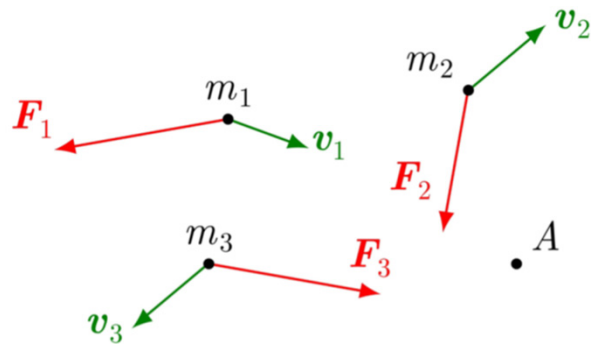


- La force de gravitation, comme la tension du fil attaché au puck, est une force centrale dirigée en tout temps vers un point fixe, à savoir le soleil.
- Les aires balayées durant des intervalles de temps égaux sont égales.

6.4.7 Système de points matériels (objet)



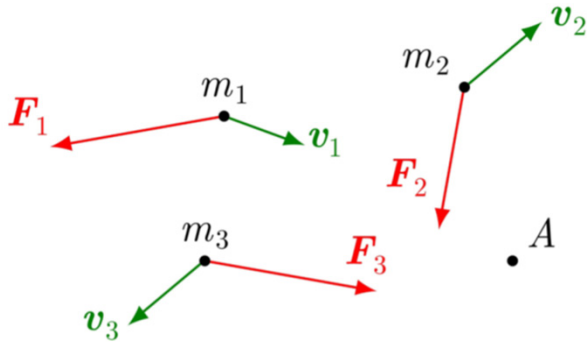
6.4.7 Système de points matériels (objet)



2^{ème} loi de Newton (translation)

$$\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{P}}_i = m_i \mathbf{a}_i \quad (6.20)$$

6.4.7 Système de points matériels (objet)



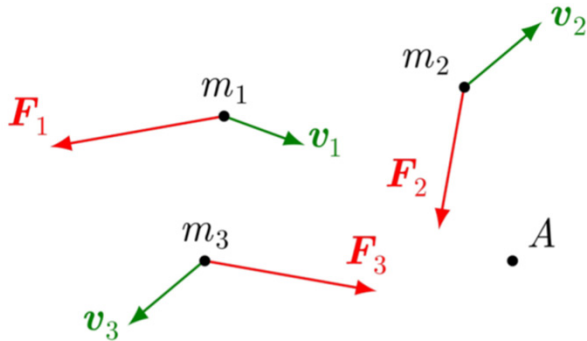
2^{ème} loi de Newton (translation)

$$\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{P}}_i = m_i \mathbf{a}_i \quad (6.20)$$

2^{ème} loi de Newton (rotation)

$$\mathbf{M}_{A,i} = \dot{\mathbf{L}}_{A,i} \quad (6.21)$$

6.4.7 Système de points matériels (objet)



2^{ème} loi de Newton (translation)

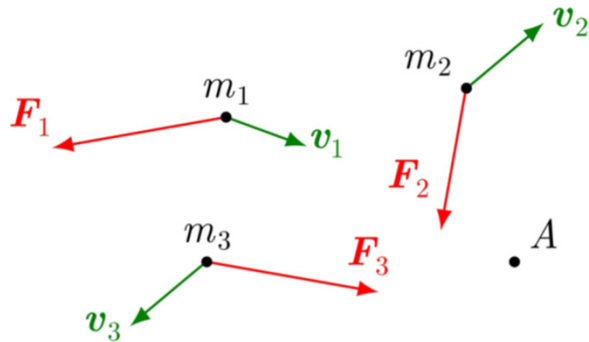
$$\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{P}}_i = m_i \mathbf{a}_i \quad (6.20)$$

2^{ème} loi de Newton (rotation)

$$\mathbf{M}_{A,i} = \dot{\mathbf{L}}_{A,i} \quad (6.21)$$

- La quantité de mouvement \mathbf{P} et le moment cinétique \mathbf{L}_A par rapport au point A sont des grandeurs extensives.

6.4.7 Système de points matériels (objet)



2^{ème} loi de Newton (translation)

$$\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{P}}_i = m_i \mathbf{a}_i \quad (6.20)$$

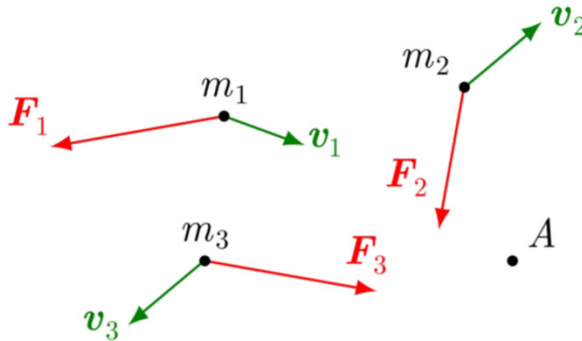
2^{ème} loi de Newton (rotation)

$$\mathbf{M}_{A,i} = \dot{\mathbf{L}}_{A,i} \quad (6.21)$$

- La quantité de mouvement \mathbf{P} et le moment cinétique \mathbf{L}_A par rapport au point A sont des grandeurs extensives.
- La quantité de mouvement totale de l'objet est :

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{P}_i \quad (6.22)$$

6.4.7 Système de points matériels (objet)



2^{ème} loi de Newton (translation)

$$\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{P}}_i = m_i \mathbf{a}_i \quad (6.20)$$

2^{ème} loi de Newton (rotation)

$$\mathbf{M}_{A,i} = \dot{\mathbf{L}}_{A,i} \quad (6.21)$$

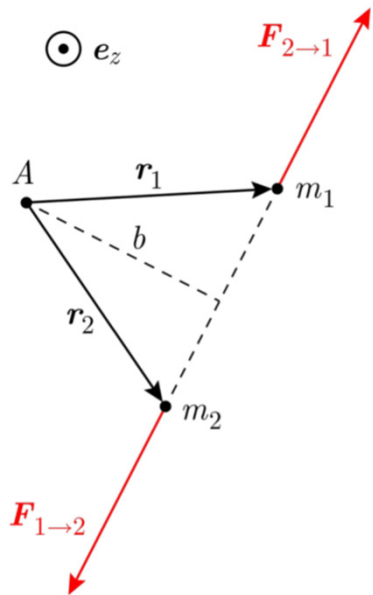
- La quantité de mouvement \mathbf{P} et le moment cinétique \mathbf{L}_A par rapport au point A sont des grandeurs extensives.
- La quantité de mouvement totale de l'objet est :

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{P}_i \quad (6.22)$$

- Le moment cinétique total de l'objet par rapport au point A est :

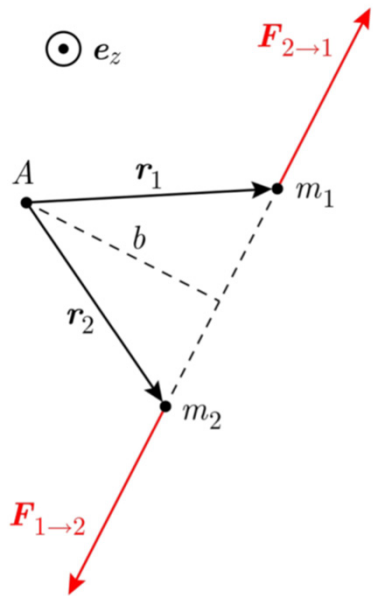
$$\mathbf{L}_A = \sum_i \mathbf{L}_{A,i} \quad (6.23)$$

6.4.7 Système de points matériels (objet)



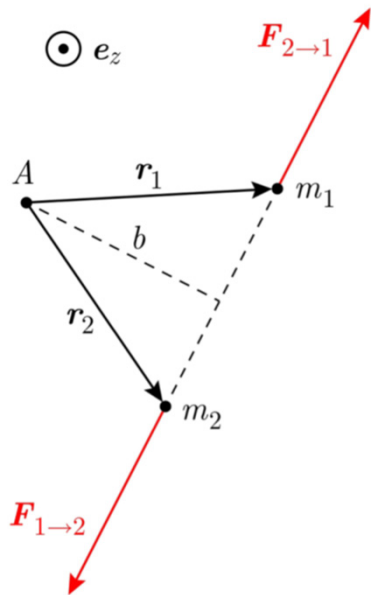
6.4.7 Système de points matériels (objet)

- On applique la 3^{ème} loi de Newton (action-réaction).



6.4.7 Système de points matériels (objet)

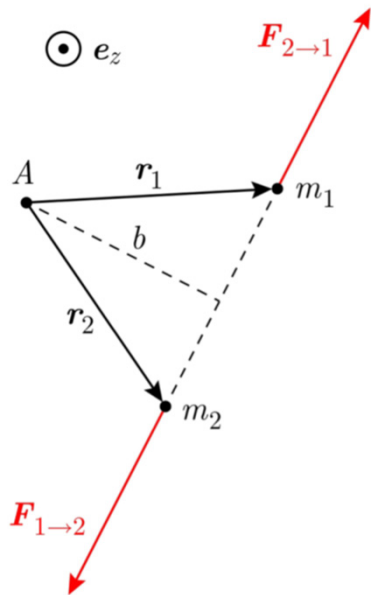
- On applique la 3^{ème} loi de Newton (action-réaction).



- Les forces intérieures s'annulent deux à deux :
 $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$ ou $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} + \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = \mathbf{0}$

6.4.7 Système de points matériels (objet)

- On applique la 3^{ème} loi de Newton (action-réaction).



- Les forces intérieures s'annulent deux à deux :

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} \text{ ou } \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} + \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = \mathbf{0}$$

- Les moments des forces intérieures s'annulent aussi deux à deux :

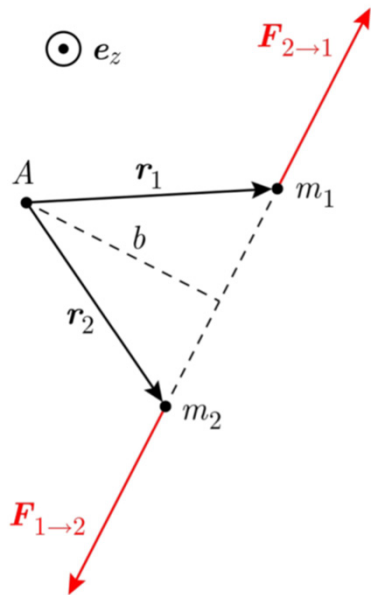
$$\mathbf{M}_A(\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}) + \mathbf{M}_A(\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}) = \mathbf{0}$$

En effet,

$$\mathbf{M}_A(\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}) = b\|\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}\|\mathbf{e}_z \text{ et } \mathbf{M}_A(\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}) = -b\|\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}\|\mathbf{e}_z \text{ où } \|\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}\| = \|\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}\|$$

6.4.7 Système de points matériels (objet)

- On applique la 3^{ème} loi de Newton (action-réaction).



- Les forces intérieures s'annulent deux à deux :

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} \text{ ou } \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} + \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = \mathbf{0}$$

- Les moments des forces intérieures s'annulent aussi deux à deux :

$$\mathbf{M}_A(\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}) + \mathbf{M}_A(\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}) = \mathbf{0}$$

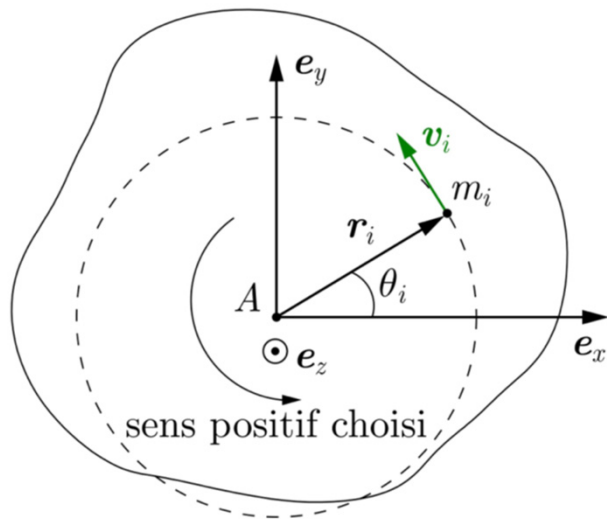
En effet,

$$\mathbf{M}_A(\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}) = b \|\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}\| \mathbf{e}_z \text{ et } \mathbf{M}_A(\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}) = -b \|\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}\| \mathbf{e}_z \text{ où } \|\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}\| = \|\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}\|$$

- Ainsi, seules les forces extérieures et les moments de forces extérieures déterminent le mouvement d'un objet :

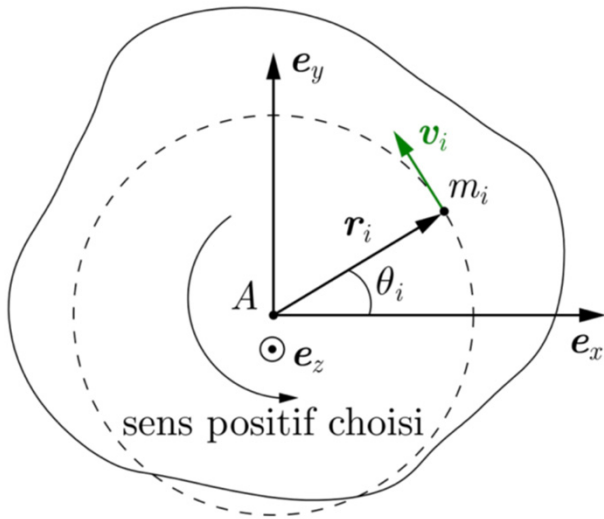
$$\mathbf{F}^{\text{ext}} = \dot{\mathbf{P}} = m \mathbf{a}_{\text{CM}} \text{ et } \mathbf{M}_A^{\text{ext}} = \dot{\mathbf{L}}_A \quad (6.24)$$

6.4.8 Solide indéformable



6.4.8 Solide indéformable

On considère un objet solide indéformable en rotation autour d'un axe passant par un point A . Les positions relatives des parties de masse m_i ne changent pas (« tout bouge ensemble »).

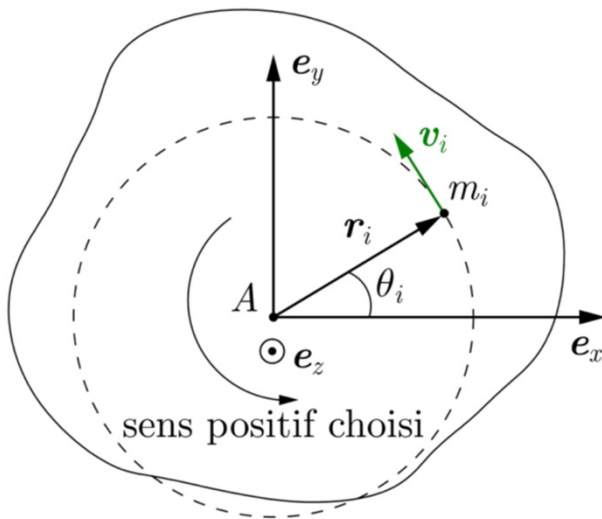


6.4.8 Solide indéformable

On considère un objet solide indéformable en rotation autour d'un axe passant par un point A . Les positions relatives des parties de masse m_i ne changent pas (« tout bouge ensemble »).

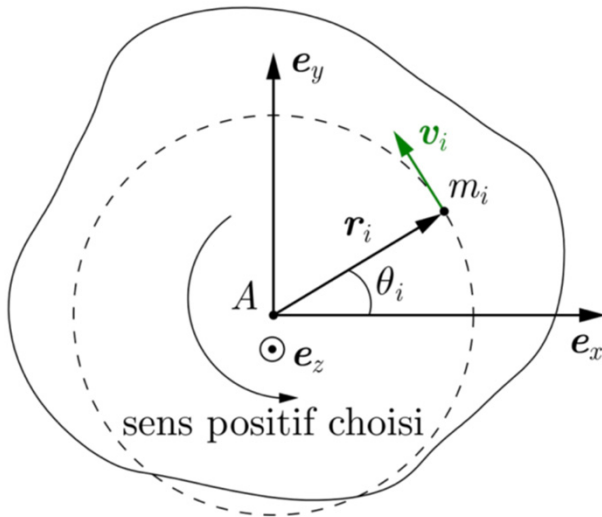
- La dérivée temporelle de l'angle θ_i repérant la masse m_i est identique pour tous les m_i . C'est la vitesse angulaire de rotation ω_A du solide autour du point A :

$$\dot{\theta}_i = \omega_A \quad \forall i \quad (6.25)$$



6.4.8 Solide indéformable

On considère un objet solide indéformable en rotation autour d'un axe passant par un point A . Les positions relatives des parties de masse m_i ne changent pas (« tout bouge ensemble »).



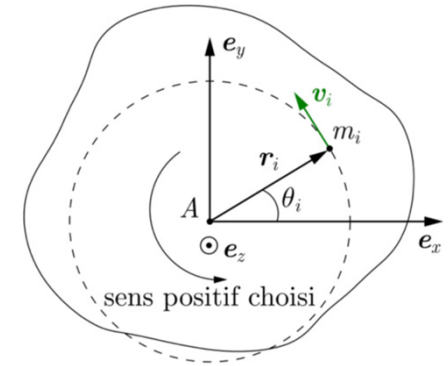
- La dérivée temporelle de l'angle θ_i repérant la masse m_i est identique pour tous les m_i . C'est la vitesse angulaire de rotation ω_A du solide autour du point A :

$$\dot{\theta}_i = \omega_A \quad \forall i \quad (6.25)$$

- La vitesse scalaire de m_i (d'abscisse curviligne $s_i = r_i \theta_i$) est :

$$v_i = \dot{s}_i = r_i \dot{\theta}_i = r_i \omega_A$$

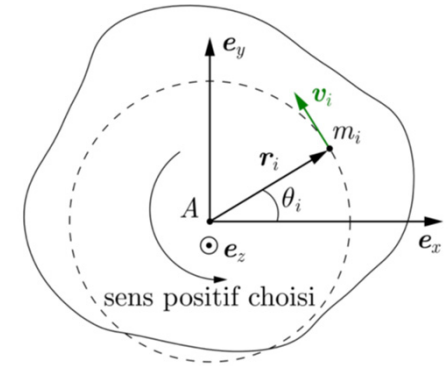
6.4.8 Solide indéformable



6.4.8 Solide indéformable

- Le moment cinétique de la masse m_i par rapport à A s'écrit :

$$\mathbf{L}_{A,i} = L_{A,i} \mathbf{e}_z \quad \text{où} \quad L_{A,i} = r_i m_i v_i = m_i r_i^2 \omega_A$$



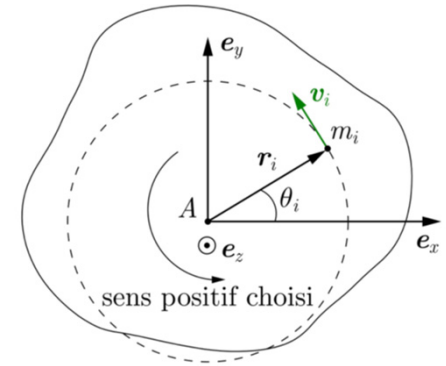
6.4.8 Solide indéformable

- Le moment cinétique de la masse m_i par rapport à A s'écrit :

$$\mathbf{L}_{A,i} = L_{A,i} \mathbf{e}_z \quad \text{où} \quad L_{A,i} = r_i m_i v_i = m_i r_i^2 \omega_A$$

- Le moment cinétique du solide par rapport à A s'écrit :

$$\mathbf{L}_A = \sum_i \mathbf{L}_{A,i} = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega_A \mathbf{e}_z \equiv I_A \omega_A \mathbf{e}_z \quad (6.26)$$



6.4.8 Solide indéformable

- Le moment cinétique de la masse m_i par rapport à A s'écrit :

$$\mathbf{L}_{A,i} = L_{A,i} \mathbf{e}_z \quad \text{où} \quad L_{A,i} = r_i m_i v_i = m_i r_i^2 \omega_A$$

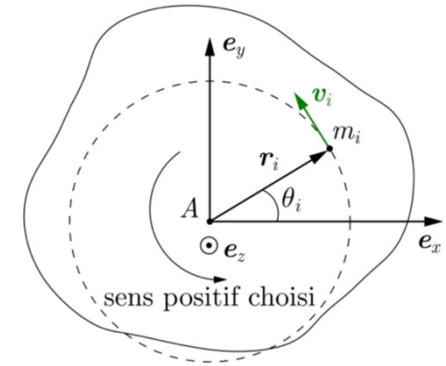
- Le moment cinétique du solide par rapport à A s'écrit :

$$\mathbf{L}_A = \sum_i \mathbf{L}_{A,i} = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega_A \mathbf{e}_z \equiv I_A \omega_A \mathbf{e}_z \quad (6.26)$$

- Le moment d'inertie du solide par rapport à un axe de symétrie passant par A est défini comme :

$$I_A = \sum_i m_i r_i^2 \quad (6.27)$$

- Unité physique (SI) : $[\text{kg.m}^2]$



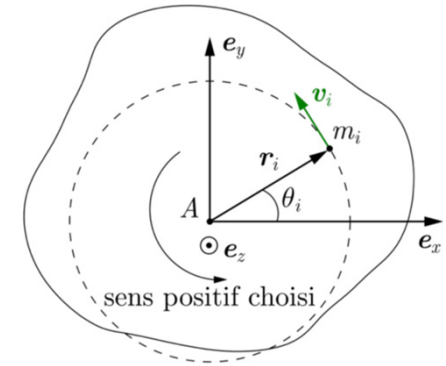
6.4.8 Solide indéformable

- Le moment cinétique de la masse m_i par rapport à A s'écrit :

$$\mathbf{L}_{A,i} = L_{A,i} \mathbf{e}_z \quad \text{où} \quad L_{A,i} = r_i m_i v_i = m_i r_i^2 \omega_A$$

- Le moment cinétique du solide par rapport à A s'écrit :

$$\mathbf{L}_A = \sum_i \mathbf{L}_{A,i} = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega_A \mathbf{e}_z \equiv I_A \omega_A \mathbf{e}_z \quad (6.26)$$



- Le moment d'inertie du solide par rapport à un axe de symétrie passant par A est défini comme :

$$I_A = \sum_i m_i r_i^2 \quad (6.27) \quad \bullet \quad \text{Unité physique (SI) : [kg.m}^2\text{]}$$

C'est une caractéristique du solide dépendant de sa masse et de la répartition de celle-ci : plus la masse est éloignée de l'axe de rotation, plus le moment d'inertie est grand.

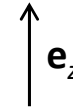
6.4.8 Solide indéformable

Expérience :

1.



2.



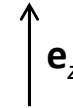
6.4.8 Solide indéformable

Expérience : Tabouret tournant

1.



2.



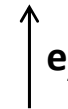
6.4.8 Solide indéformable

Expérience : Tabouret tournant

1.



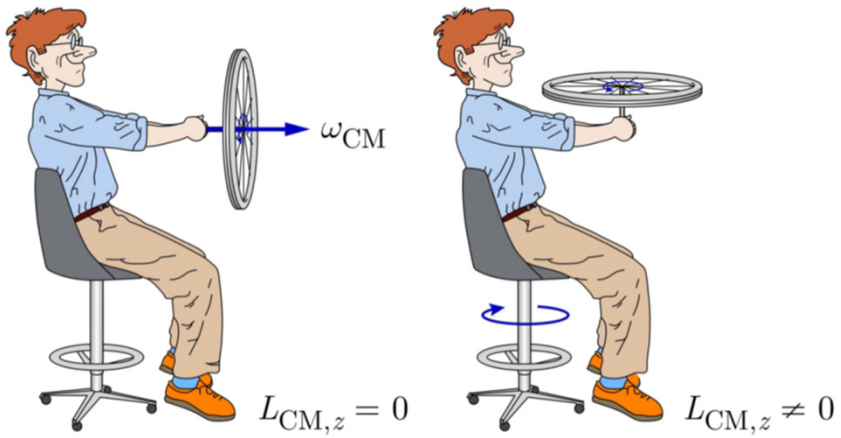
2.



- En l'absence de moment de forces extérieures, $\mathbf{M}_{\text{CM}}^{\text{ext}} = \mathbf{0}$, le moment cinétique \mathbf{L}_{CM} de l'étudiant est conservé : $\mathbf{L}_{\text{CM}} = I_{\text{CM}} \omega_{\text{CM}} \mathbf{e}_z = \text{cste}$.
- Ainsi, s'il éloigne les haltères de son corps (1→2), son moment d'inertie I_{CM} augmente et sa vitesse angulaire ω_{CM} diminue et vice versa.

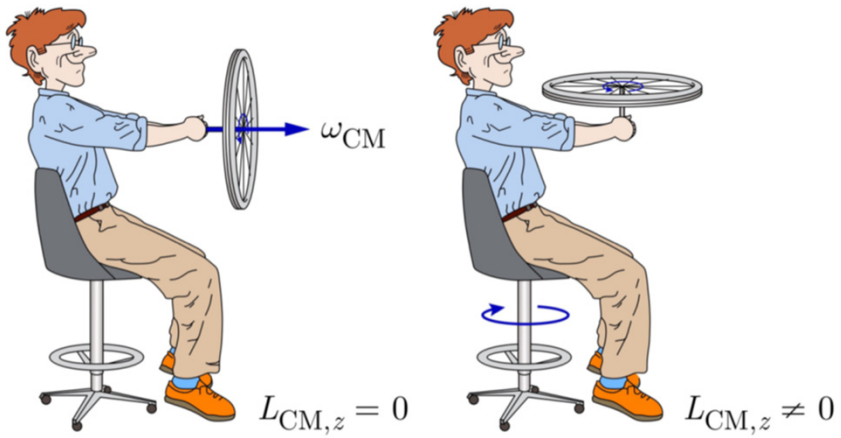
6.4.8 Solide indéformable

Expérience :



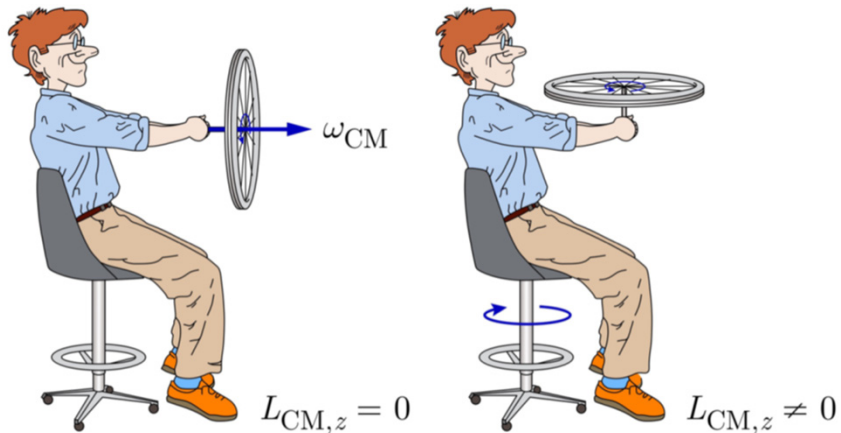
6.4.8 Solide indéformable

Expérience : Roue de vélo sur un tabouret



6.4.8 Solide indéformable

Expérience : Roue de vélo sur un tabouret



- Un étudiant assis sur un tabouret déplace une roue en rotation rapide d'une position initiale où la roue tourne dans un plan vertical à une position finale où la roue tourne dans un plan horizontal. En position finale, l'étudiant tourne dans le sens inverse de la roue pour que la composante verticale du moment cinétique $L_{CM,z}$ reste nulle.