Leçon 15 – 15/04/2025

4. Énergie

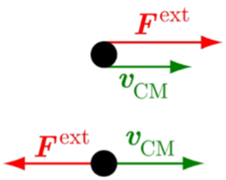
- 4.3 Puissance

5. Oscillateur harmonique

- 5.1 Évolution
- 5.2 Caractéristiques
- 5.3 Énergie mécanique

4.3 Puissance

James Watt

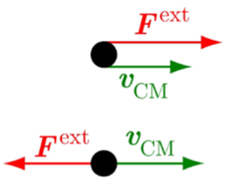


4.3 Puissance

Pour un système donné, l'énergie sous une forme donnée E (mécanique, électrique, thermique, …) peut changer au cours du temps. La puissance P mesure l'énergie échangée avec l'extérieur par unité de temps :

$$\boxed{P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{dE}{dt} = \dot{E} \quad (4.35)}$$

James Watt

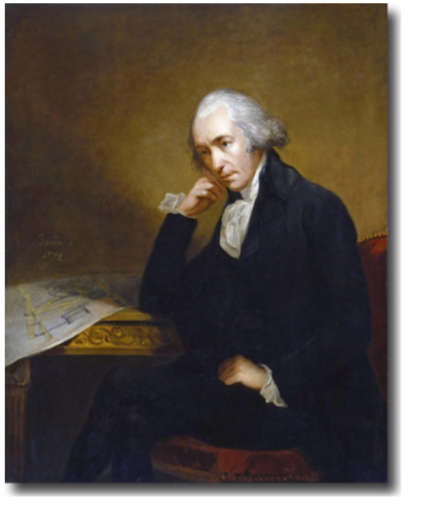


4.3 Puissance

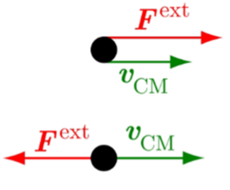
Pour un système donné, l'énergie sous une forme donnée E (mécanique, électrique, thermique, …) peut changer au cours du temps. La puissance P mesure l'énergie échangée avec l'extérieur par unité de temps :

$$\boxed{P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{dE}{dt} = \dot{E} \quad (4.35)}$$

- Unité physique (SI) : le Watt [W] = [kg.m^2.s^{-3}]



James Watt



4.3 Puissance

Pour un système donné, l'énergie sous une forme donnée E (mécanique, électrique, thermique, …) peut changer au cours du temps. La puissance P mesure l'énergie échangée avec l'extérieur par unité de temps :

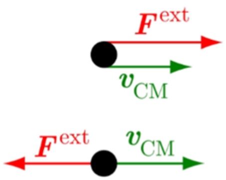
$$\boxed{P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{dE}{dt} = \dot{E} \quad (4.35)}$$

James Watt

- Unité physique (SI) : le Watt [W] = [kg.m^2.s^{-3}]

- La puissance due au travail infinitésimal δW d'une force extérieure s'écrit :

$$\boxed{P = \frac{dE}{dt} = \frac{\delta W}{dt} = \mathbf{F}^{ext} \cdot \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} = \mathbf{F}^{ext} \cdot \mathbf{v}_{CM} \quad (4.36)}$$



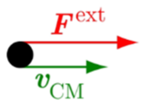
4.3 Puissance

Pour un système donné, l'énergie sous une forme donnée E (mécanique, électrique, thermique, …) peut changer au cours du temps. La puissance P mesure l'énergie échangée avec l'extérieur par unité de temps :

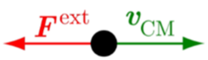
$$\boxed{P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{dE}{dt} = \dot{E} \quad (4.35)}$$

James Watt

- Unité physique (SI) : le Watt [W] = [kg.m^2.s^{-3}]
- La puissance due au travail infinitésimal δW d'une force extérieure s'écrit : $\boxed{P = \frac{dE}{dt} = \frac{\delta W}{dt} = \mathbf{F}^{ext} \cdot \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} = \mathbf{F}^{ext} \cdot \mathbf{v}_{CM} \quad (4.36)}$

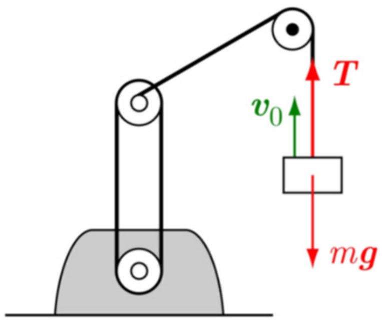
1. 

$\mathbf{F}^{ext} \cdot \mathbf{v}_{CM} > 0 \Rightarrow P > 0$ (accélération)

2. 

$\mathbf{F}^{ext} \cdot \mathbf{v}_{CM} < 0 \Rightarrow P < 0$ (freinage)

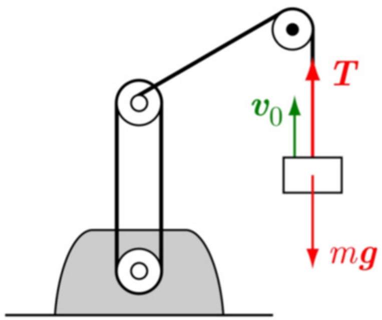
4.3.1 Puissance d'un moteur électrique



Remarque :

4.3.1 Puissance d'un moteur électrique

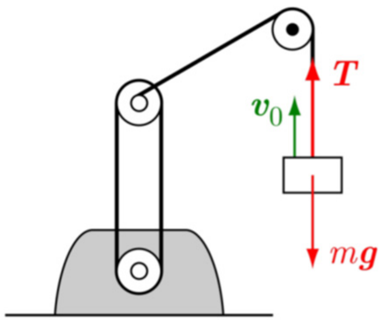
On considère un moteur électrique qui soulève une masse *m* à vitesse $\mathbf{v}_0$ = **cste**. L'énergie potentielle gravitationnelle de la masse *m* augmente dû au travail effectué par le moteur pour s'opposer au poids :



Remarque :

4.3.1 Puissance d'un moteur électrique

On considère un moteur électrique qui soulève une masse *m* à vitesse $\mathbf{v}_0$ = **cste**. L'énergie potentielle gravitationnelle de la masse *m* augmente dû au travail effectué par le moteur pour s'opposer au poids :

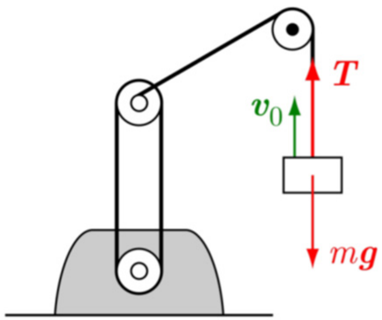


$$\boxed{\begin{aligned} P &= \frac{dE}{dt} = \frac{\delta W(\mathbf{T})}{dt} = \frac{\delta W(-m\mathbf{g})}{dt} = (-m\mathbf{g}) \cdot \frac{d\mathbf{r}_{\mathbf{CM}}}{dt} \\ &= -m\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_0 = mgv_0 > 0 \quad (4.37) \end{aligned}}$$

Remarque :

4.3.1 Puissance d'un moteur électrique

On considère un moteur électrique qui soulève une masse m à vitesse $\mathbf{v}_0$ = **cste**. L'énergie potentielle gravitationnelle de la masse m augmente dû au travail effectué par le moteur pour s'opposer au poids :

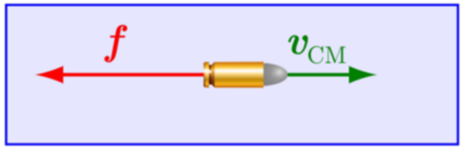


$$\boxed{\begin{aligned} P &= \frac{dE}{dt} = \frac{\delta W(\mathbf{T})}{dt} = \frac{\delta W(-m\mathbf{g})}{dt} = (-m\mathbf{g}) \cdot \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} \\ &= -m\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_0 = mgv_0 > 0 \quad (4.37) \end{aligned}}$$

Remarque :

Comme le moteur fournit de l'énergie potentielle gravitationnelle au système, sa puissance est positive.

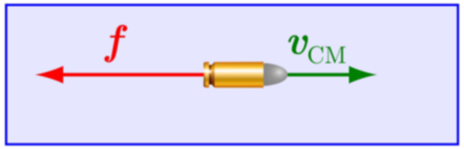
4.3.2 Puissance d'une force de frottement



Remarque :

4.3.2 Puissance d'une force de frottement

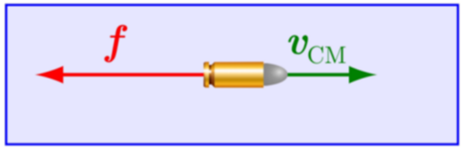
On considère l'action d'une force de frottement visqueux $\mathbf{f} = -\lambda \mathbf{v}_{CM}$ où $\lambda > 0$ sur un projectile dont le mouvement est rectiligne. On néglige son poids.



Remarque :

4.3.2 Puissance d'une force de frottement

On considère l'action d'une force de frottement visqueux $\mathbf{f} = -\lambda \mathbf{v}_{\mathbf{CM}}$ où $\lambda > 0$ sur un projectile dont le mouvement est rectiligne. On néglige son poids.



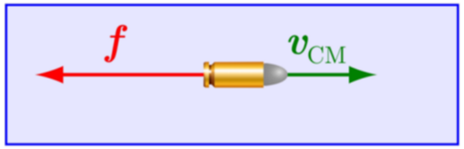
- La puissance due à l'action de la force de frottement est :

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{\delta W(\mathbf{f})}{dt} = \mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{r}_{\mathbf{CM}}}{dt} = -\lambda \mathbf{v}_{\mathbf{CM}} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{CM}} = -\lambda v_{\mathrm{CM}}^2 < 0$$

Remarque :

4.3.2 Puissance d'une force de frottement

On considère l'action d'une force de frottement visqueux $\mathbf{f} = -\lambda \mathbf{v}_{\mathbf{CM}}$ où $\lambda > 0$ sur un projectile dont le mouvement est rectiligne. On néglige son poids.



- La puissance due à l'action de la force de frottement est :

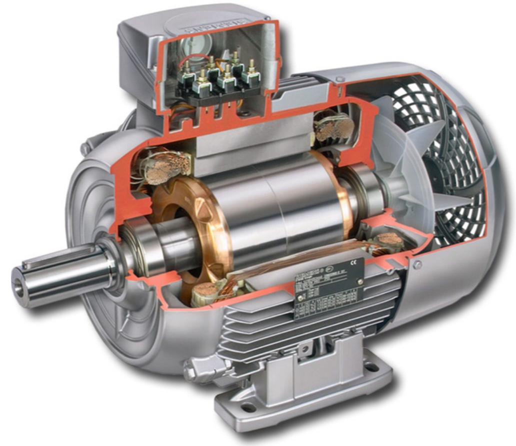
$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{\delta W(\mathbf{f})}{dt} = \mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{r}_{\mathbf{CM}}}{dt} = -\lambda \mathbf{v}_{\mathbf{CM}} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{CM}} = -\lambda v_{\mathrm{CM}}^2 < 0$$

Remarque :

Comme la force de frottement dissipe l'énergie cinétique du projectile, sa puissance est négative.

4.3.3 Rendement

Exemple :

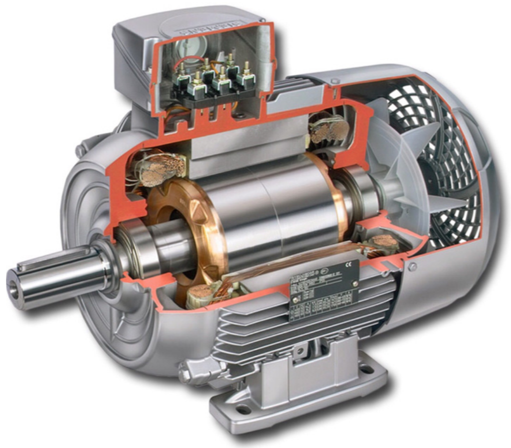


4.3.3 Rendement

- Le rendement η est une grandeur sans unité physique définie comme le rapport entre la puissance utile (puissance que la machine délivre) et la puissance fournie (puissance que la machine reçoit initialement).

$$\boxed{\eta = \frac{P_{\text{utile}}}{P_{\text{fournie}}}}$$

Exemple :

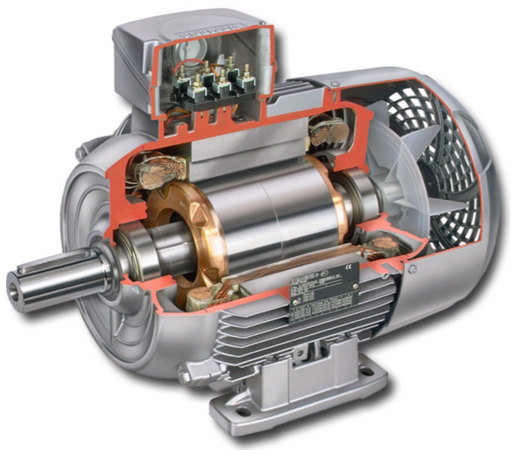


4.3.3 Rendement

- Le rendement η est une grandeur sans unité physique définie comme le rapport entre la puissance utile (puissance que la machine délivre) et la puissance fournie (puissance que la machine reçoit initialement).

$$\boxed{\eta = \frac{P_{\text{utile}}}{P_{\text{fournie}}}}$$

Exemple : Moteur électrique



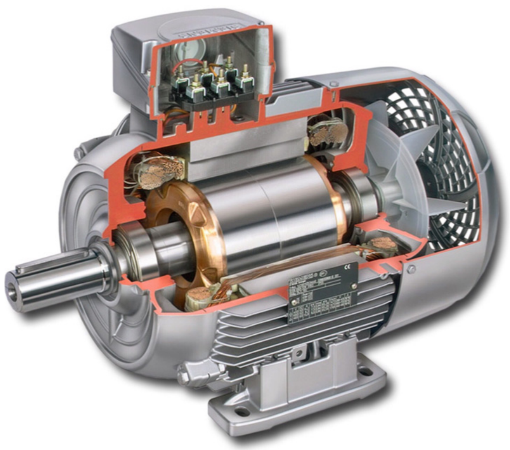
4.3.3 Rendement

- Le rendement η est une grandeur sans unité physique définie comme le rapport entre la puissance utile (puissance que la machine délivre) et la puissance fournie (puissance que la machine reçoit initialement).

$$\boxed{\eta = \frac{P_{\text{utile}}}{P_{\text{fournie}}}}$$

Exemple : Moteur électrique

Le moteur reçoit une puissance électrique $P_{\text{él}}$ de la prise murale et il la convertit en puissance mécanique $P_{\text{méc}}$ (mouvement de rotation de l'axe).



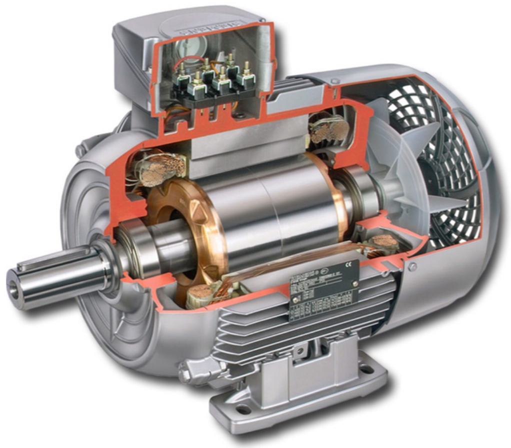
$$\boxed{\eta = \frac{P_{\text{méc}}}{P_{\text{él}}}}$$

4.3.3 Rendement

- Le rendement η est une grandeur sans unité physique définie comme le rapport entre la puissance utile (puissance que la machine délivre) et la puissance fournie (puissance que la machine reçoit initialement).

$$\boxed{\eta = \frac{P_{\text{utile}}}{P_{\text{fournie}}}}$$

Exemple : Moteur électrique



Le moteur reçoit une puissance électrique $P_{\text{él}}$ de la prise murale et il la convertit en puissance mécanique $P_{\text{méc}}$ (mouvement de rotation de l'axe).

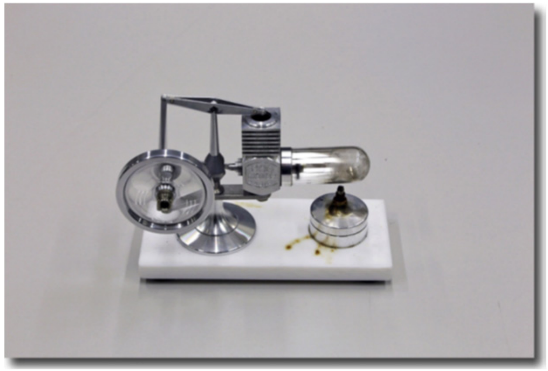
$$\boxed{\eta = \frac{P_{\text{méc}}}{P_{\text{él}}}}$$

Le second principe de la thermodynamique requiert que $0 \leq \eta \leq 1$.

4.3.3 Rendement

Expérience :

1.



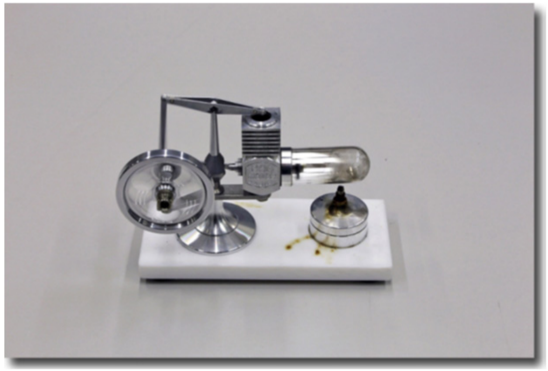
2.

Robert Stirling

4.3.3 Rendement

Expérience : Moteur de Stirling

1.



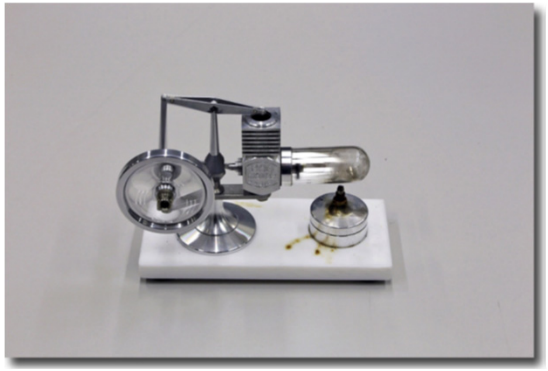
2.

Robert Stirling

4.3.3 Rendement

Expérience : Moteur de Stirling

1.



2.

Robert Stirling

1. Un brûleur rempli d'alcool échauffe l'air contenu dans un cylindre, fournissant ainsi de la chaleur au moteur qui est activé par le lancement de la roue.

2. Une lampe qui se situe au foyer gauche d'un système de miroirs paraboliques éclaire et chauffe un corps noir qui se trouve au foyer droit. La différence de température de part et d'autre de la roue à droite entraîne son mouvement.

4.3.3 Rendement

Expérience :

4.3.3 Rendement

Expérience :   Oiseaux buveurs (exemple de machine thermique)

4.3.3 Rendement

Expérience : Oiseaux buveurs (exemple de machine thermique)

- L'oiseau est constitué de deux réservoirs reliés par un tube. Un liquide volatile est enfermé dans l'oiseau.
- Lorsque le bec de l'oiseau est en contact avec de l'eau froide, le liquide redescend dans le tube ce qui fait basculer l'oiseau en position verticale.
- L'évaporation de l'eau sur le bec provoque une contraction de l'air dans le tube, ce qui fait monter le liquide et basculer l'oiseau.

5. Oscillateur harmonique

5.1 Évolution

5.1 Évolution

5.1 Évolution

- Lorsque la force extérieure résultante $\mathbf{F}^{\mathbf{ext}}$ exercée sur un objet est une force élastique $-k\mathbf{d}$, le mouvement de l'objet est un mouvement oscillatoire harmonique.

5.1 Évolution

- Lorsque la force extérieure résultante $\mathbf{F}^{ext}$ exercée sur un objet est une force élastique $-k\mathbf{d}$, le mouvement de l'objet est un mouvement oscillatoire harmonique.

- Afin de déterminer l'évolution d'un oscillateur harmonique, on considère le mouvement d'un objet de masse m fixé à un ressort de constante k et glissant sans frottement sur une table.

5.1 Évolution

- Lorsque la force extérieure résultante $\mathbf{F}^{ext}$ exercée sur un objet est une force élastique $-k\mathbf{d}$, le mouvement de l'objet est un mouvement oscillatoire harmonique.

- Afin de déterminer l'évolution d'un oscillateur harmonique, on considère le mouvement d'un objet de masse m fixé à un ressort de constante k et glissant sans frottement sur une table.

- On prend comme origine du repère O, l'extrémité du ressort au repos.

5.1 Évolution

- Lorsque la force extérieure résultante $\mathbf{F}^{\mathbf{ext}}$ exercée sur un objet est une force élastique $-k\mathbf{d}$, le mouvement de l'objet est un mouvement oscillatoire harmonique.

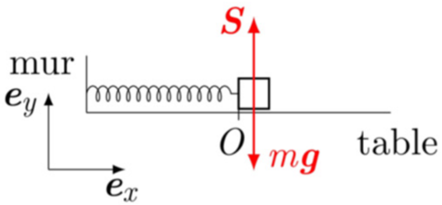
- Afin de déterminer l'évolution d'un oscillateur harmonique, on considère le mouvement d'un objet de masse m fixé à un ressort de constante k et glissant sans frottement sur une table.

- On prend comme origine du repère O, l'extrémité du ressort au repos.

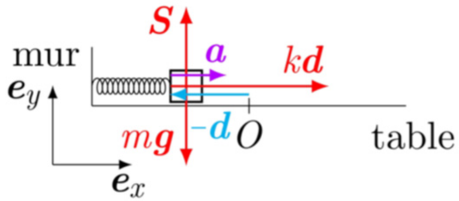
- Au repos, la force élastique est nulle, en compression elle est répulsive, et en élongation elle est attractive.

5.1 Évolution

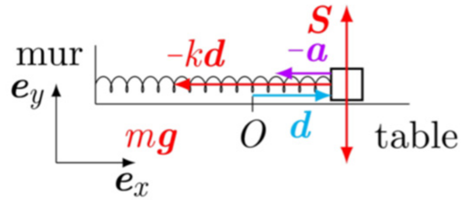
1. Au repos (force nulle)



2. En compression (force répulsive)

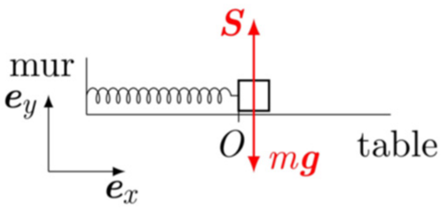


3. En élongation (force attractive)

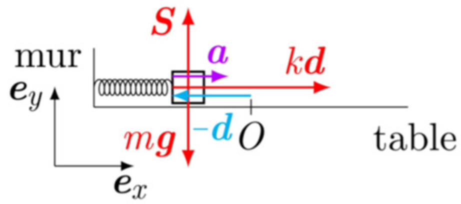


5.1 Évolution

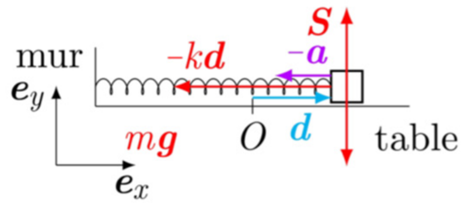
1. Au repos (force nulle)



2. En compression (force répulsive)



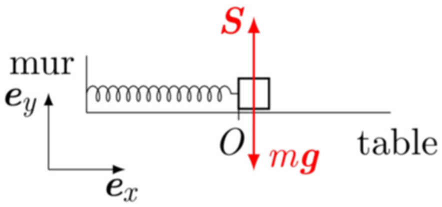
3. En élongation (force attractive)



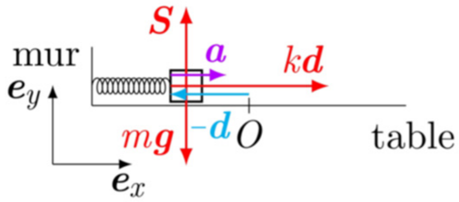
- Forces : poids $m\mathbf{g}$, soutien $\mathbf{S}$, force élastique $-k\mathbf{d}$
- Loi du mouvement :
- Projections :

5.1 Évolution

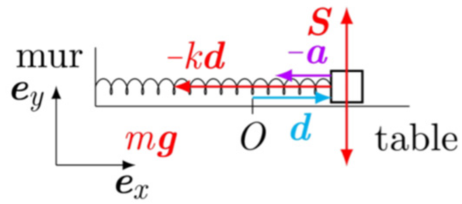
1. Au repos (force nulle)



2. En compression (force répulsive)



3. En élongation (force attractive)



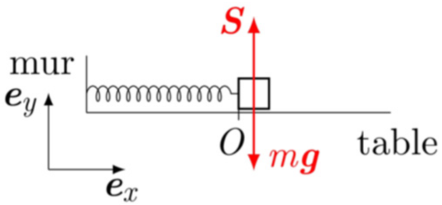
- <u>Forces</u> : poids $m\mathbf{g}$, soutien $\mathbf{S}$, force élastique $-k\mathbf{d}$
- <u>Loi du mouvement</u> : $\boxed{m\mathbf{g} + \mathbf{S} - k\mathbf{d} = m\mathbf{a} \quad (5.1)}$
- <u>Projections</u> :

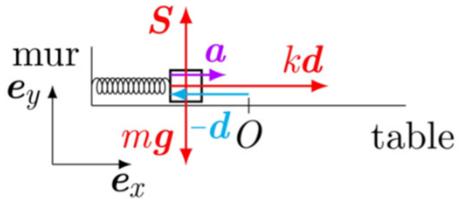
5.1 Évolution

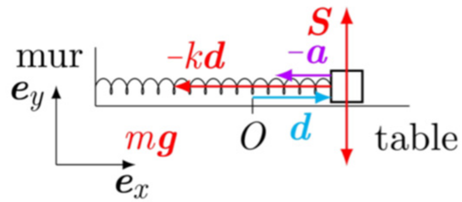
1. Au repos (force nulle)

2. En compression (force répulsive)

3. En élongation (force attractive)



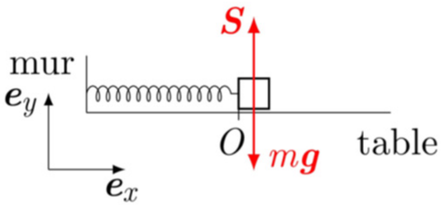




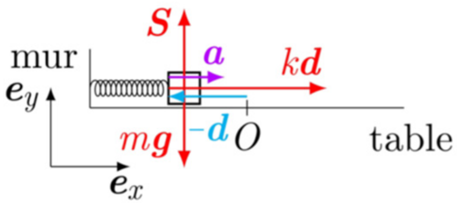
- <u>Forces</u> : poids $m\mathbf{g}$, soutien $\mathbf{S}$, force élastique $-k\mathbf{d}$
- <u>Loi du mouvement</u> : $\boxed{m\mathbf{g} + \mathbf{S} - k\mathbf{d} = m\mathbf{a} \quad (5.1)}$
- <u>Projections</u> : $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_y$, $\mathbf{S} = S\mathbf{e}_y$, $\mathbf{d} = x\mathbf{e}_x$, $\mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{e}_x$

5.1 Évolution

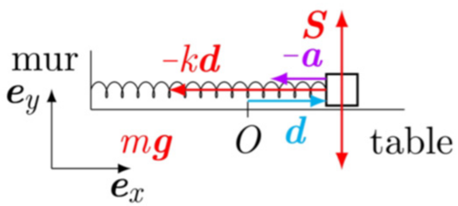
1. Au repos (force nulle)



2. En compression (force répulsive)



3. En élongation (force attractive)

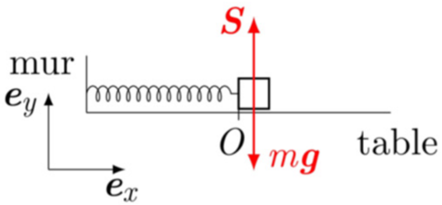


- Forces : poids $m\mathbf{g}$, soutien $\mathbf{S}$, force élastique $-k\mathbf{d}$
- Loi du mouvement : $\boxed{m\mathbf{g} + \mathbf{S} - k\mathbf{d} = m\mathbf{a} \quad (5.1)}$
- Projections : $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_y\,,\ \mathbf{S} = S\mathbf{e}_y\,,\ \mathbf{d} = x\mathbf{e}_x\,,\ \mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{e}_x$

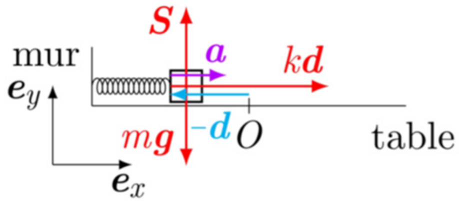
Selon $\mathbf{e}_x$: $\boxed{-kx = m\ddot{x} \quad (5.2)}$

5.1 Évolution

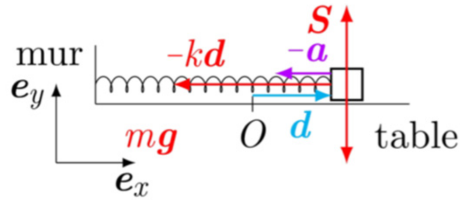
1. Au repos (force nulle)



2. En compression (force répulsive)



3. En élongation (force attractive)



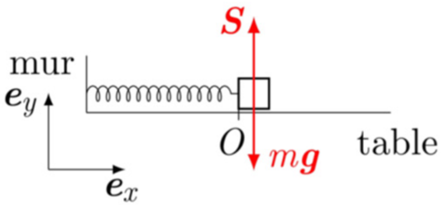
- Forces : poids $m\mathbf{g}$, soutien **S**, force élastique $-k\mathbf{d}$
- Loi du mouvement : $\boxed{m\mathbf{g}+\mathbf{S}-k\mathbf{d}=m\mathbf{a} \quad (5.1)}$
- Projections : $\mathbf{g}=-g\mathbf{e}_y$, $\mathbf{S}=S\mathbf{e}_y$, $\mathbf{d}=x\mathbf{e}_x$, $\mathbf{a}=\ddot{x}\mathbf{e}_x$

Selon $\mathbf{e}_x$: $\boxed{-kx=m\ddot{x} \quad (5.2)}$

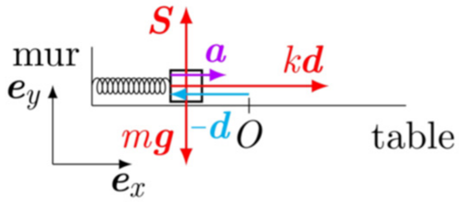
Selon $\mathbf{e}_y$: $\boxed{-mg+S=0 \Rightarrow S=mg \quad (5.3)}$

5.1 Évolution

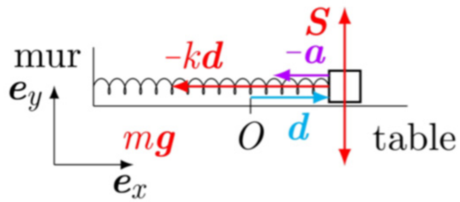
1. Au repos (force nulle)



2. En compression (force répulsive)



3. En élongation (force attractive)



- <u>Forces</u> : poids $m\mathbf{g}$, soutien $\mathbf{S}$, force élastique $-k\mathbf{d}$
- <u>Loi du mouvement</u> : $\boxed{m\mathbf{g} + \mathbf{S} - k\mathbf{d} = m\mathbf{a} \quad (5.1)}$
- <u>Projections</u> : $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_y$, $\mathbf{S} = S\mathbf{e}_y$, $\mathbf{d} = x\mathbf{e}_x$, $\mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{e}_x$

Selon $\mathbf{e}_x$: $\boxed{-kx = m\ddot{x} \quad (5.2)}$

Selon $\mathbf{e}_y$: $\boxed{-mg + S = 0 \Rightarrow S = mg \quad (5.3)}$

Comme $m > 0$ et $k > 0$, on définit $\omega_0^2 \equiv \dfrac{k}{m}$. Ainsi, $\boxed{\ddot{x} = -\omega_0^2 x \quad (5.4)}$ où $\ddot{x} \equiv \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{dt}\right) = \dfrac{d^2x}{dt^2}$

5.1 Évolution

5.1 Évolution

- L'évolution d'un mouvement oscillatoire harmonique est une équation du type :

$$\boxed{\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t) \quad (5.5)}$$

5.1 Évolution

- L'évolution d'un mouvement oscillatoire harmonique est une équation du type :

$$\boxed{\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t) \quad (5.5)}$$

- Pour résoudre une telle équation, il faut spécifier la valeur initiale de la position et de la vitesse de l'objet : $x(t_0) = x_0$ et $v(t_0) = \dot{x}(t_0) = v_0$

5.1 Évolution

- L'évolution d'un mouvement oscillatoire harmonique est une équation du type :

$$\boxed{\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t) \quad (5.5)}$$

- Pour résoudre une telle équation, il faut spécifier la valeur initiale de la position et de la vitesse de l'objet : $x(t_0) = x_0$ et $v(t_0) = \dot{x}(t_0) = v_0$

- La solution générale de cette équation s'écrit :

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos\left(\omega_0 (t - t_0)\right) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin\left(\omega_0 (t - t_0)\right) \quad (5.6)}$$

5.1 Évolution

- L'évolution d'un mouvement oscillatoire harmonique est une équation du type :

$$\boxed{\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t) \quad (5.5)}$$

- Pour résoudre une telle équation, il faut spécifier la valeur initiale de la position et de la vitesse de l'objet : $x(t_0) = x_0$ et $v(t_0) = \dot{x}(t_0) = v_0$

- La solution générale de cette équation s'écrit :

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos\left(\omega_0 (t - t_0)\right) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin\left(\omega_0 (t - t_0)\right) \quad (5.6)}$$

- Nous allons à présent démontrer que la solution (5.6) satisfait l'équation du mouvement oscillatoire harmonique (5.5), compte tenu des conditions initiales (position, vitesse), en la dérivant deux fois par rapport au temps.

5.1 Évolution

5.1 Évolution

- Les dérivées par rapport au temps des fonctions sinus et cosinus s’écrivent :

$$\frac{d}{dt}\sin\left(at+b\right)=a\cos\left(at+b\right) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\cos\left(at+b\right)=-a\sin\left(at+b\right)$$

5.1 Évolution

- Les dérivées par rapport au temps des fonctions sinus et cosinus s'écrivent :

$$\frac{d}{dt}\sin(at+b) = a\cos(at+b) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\cos(at+b) = -a\sin(at+b)$$

- <u>Position</u> : (ici, $a = \omega_0$ et $b = -\ \omega_0 t_0$)

$$x(t) = x_0\cos(\omega_0(t-t_0)) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0(t-t_0)) \Rightarrow x(t_0) = x_0$$

5.1 Évolution

- Les dérivées par rapport au temps des fonctions sinus et cosinus s'écrivent :

$$\frac{d}{dt}\sin(at+b) = a\cos(at+b) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\cos(at+b) = -a\sin(at+b)$$

- Position : (ici, $a = \omega_0$ et $b = -\ \omega_0 t_0$)

$$x(t) = x_0\cos(\omega_0(t-t_0)) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0(t-t_0)) \Rightarrow x(t_0) = x_0$$

- Vitesse :

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 x_0 \sin(\omega_0(t-t_0)) + v_0\cos(\omega_0(t-t_0)) \Rightarrow v(t_0) = \dot{x}(t_0) = v_0$$

5.1 Évolution

- Les dérivées par rapport au temps des fonctions sinus et cosinus s'écrivent :

$$\frac{d}{dt}\sin(at+b) = a\cos(at+b) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\cos(at+b) = -a\sin(at+b)$$

- <u>Position</u> : (ici, $a = \omega_0$ et $b = -\omega_0 t_0$)

$$x(t) = x_0\cos\left(\omega_0 (t-t_0)\right) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\left(\omega_0 (t-t_0)\right) \Rightarrow x(t_0) = x_0$$

- <u>Vitesse</u> :

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 x_0\sin\left(\omega_0 (t-t_0)\right) + v_0\cos\left(\omega_0 (t-t_0)\right) \Rightarrow v(t_0) = \dot{x}(t_0) = v_0$$

- <u>Accélération</u> :

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x_0\cos\left(\omega_0 (t-t_0)\right) - \omega_0 v_0\sin\left(\omega_0 (t-t_0)\right)$$

5.1 Évolution

- Les dérivées par rapport au temps des fonctions sinus et cosinus s'écrivent :

$$\frac{d}{dt}\sin(at+b) = a\cos(at+b) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\cos(at+b) = -a\sin(at+b)$$

- <u>Position</u> : (ici, $a = \omega_0$ et $b = -\ \omega_0 t_0$)

$$x(t) = x_0\cos(\omega_0(t-t_0)) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0(t-t_0)) \Rightarrow x(t_0) = x_0$$

- <u>Vitesse</u> :

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 x_0 \sin(\omega_0(t-t_0)) + v_0\cos(\omega_0(t-t_0)) \Rightarrow v(t_0) = \dot{x}(t_0) = v_0$$

- <u>Accélération</u> :

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x_0\cos(\omega_0(t-t_0)) - \omega_0 v_0 \sin(\omega_0(t-t_0))$$

Ainsi, $\ddot{x}(t) = -\omega_0^2\left(x_0\cos(\omega_0(t-t_0)) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0(t-t_0))\right) = -\omega_0^2 x(t) \Rightarrow \ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t)$

5.1 Évolution

5.1 Évolution

- En utilisant le changement de variables :

$$\boxed{x_0 = A\cos\varphi \text{ et } \frac{v_0}{\omega_0} = -A\sin\varphi \quad (5.7)}$$

5.1 Évolution

- En utilisant le changement de variables :

$$\boxed{x_0 = A\cos\varphi \;\text{ et }\; \frac{v_0}{\omega_0} = -A\sin\varphi \quad (5.7)}$$

la solution générale du mouvement oscillatoire harmonique devient :

$$\boxed{x(t) = A\left(\cos\left(\omega_0 (t - t_0)\right)\cos\varphi - \sin\left(\omega_0 (t - t_0)\right)\sin\varphi\right) \quad (5.8)}$$

5.1 Évolution

- En utilisant le changement de variables :

$$\boxed{x_0 = A\cos\varphi \ \text{ et } \ \frac{v_0}{\omega_0} = -A\sin\varphi \quad (5.7)}$$

la solution générale du mouvement oscillatoire harmonique devient :

$$\boxed{x(t) = A\Big(\cos\big(\omega_0(t-t_0)\big)\cos\varphi - \sin\big(\omega_0(t-t_0)\big)\sin\varphi\Big) \quad (5.8)}$$

- Compte tenu de l'identité trigonométrique :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

5.1 Évolution

- En utilisant le changement de variables :

$$\boxed{x_0 = A\cos\varphi \;\text{ et }\; \frac{v_0}{\omega_0} = -A\sin\varphi \quad (5.7)}$$

la solution générale du mouvement oscillatoire harmonique devient :

$$\boxed{x(t) = A\left(\cos\left(\omega_0\left(t - t_0\right)\right)\cos\varphi - \sin\left(\omega_0\left(t - t_0\right)\right)\sin\varphi\right) \quad (5.8)}$$

- Compte tenu de l'identité trigonométrique :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

l'équation horaire de l'oscillateur harmonique (5.8) se réduit à :

$$\boxed{x(t) = A\cos\left(\omega_0\left(t - t_0\right) + \varphi\right) \quad (5.9)}$$

5.1 Évolution

- En utilisant le changement de variables :

$$\boxed{x_0 = A\cos\varphi \ \text{ et } \ \frac{v_0}{\omega_0} = -A\sin\varphi \quad (5.7)}$$

la solution générale du mouvement oscillatoire harmonique devient :

$$\boxed{x(t) = A\Big(\cos\big(\omega_0(t-t_0)\big)\cos\varphi - \sin\big(\omega_0(t-t_0)\big)\sin\varphi\Big) \quad (5.8)}$$

- Compte tenu de l'identité trigonométrique :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

l'équation horaire de l'oscillateur harmonique (5.8) se réduit à :

$$\boxed{x(t) = A\cos\big(\omega_0(t-t_0)+\varphi\big) \quad (5.9)}$$

$$\frac{-\cancel{A}\sin\varphi}{\cancel{A}\cos\varphi} = -\tan\varphi = \frac{v_0}{\omega_0 x_0} \Rightarrow$$

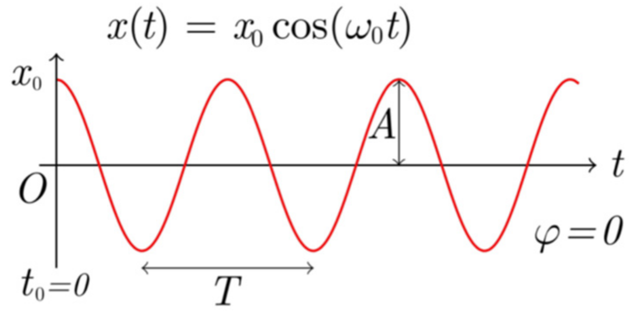
où en inversant (5.7) on obtient :

$$x_0 = A\cos\varphi = \frac{A}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \frac{A}{\sqrt{1+\dfrac{v_0^2}{\omega_0^2 x_0^2}}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi &= \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega_0 x_0}\right) \\ A &= x_0\sqrt{1+\frac{v_0^2}{\omega_0^2 x_0^2}} \end{aligned} \quad (5.10)}$$

5.2 Caractéristiques

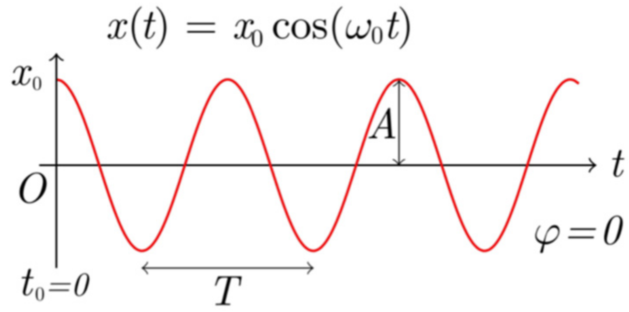
5.2 Caractéristiques



5.2 Caractéristiques

- La solution générale de l'oscillateur harmonique

$$\boxed{x(t) = A\cos\left(\omega_0\left(t - t_0\right) + \varphi\right) \quad (5.9)}$$



5.2 Caractéristiques

- La solution générale de l'oscillateur harmonique

$$\boxed{x(t) = A\cos\left(\omega_0 (t - t_0) + \varphi\right) \quad (5.9)}$$

décrit une oscillation non-amortie :

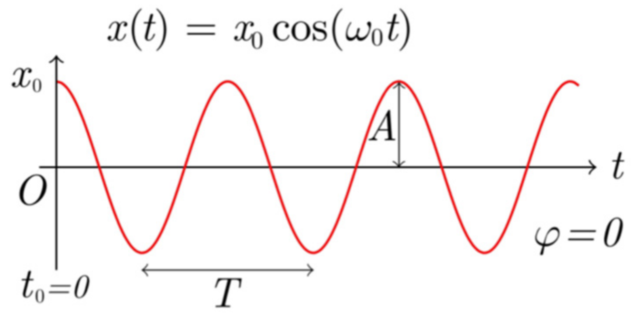
1. D'amplitude A : unité [m] (élongation ou compression maximale)

2. De période T : unité [s] (durée d'un cycle d'oscillation)
$$x(t+T) = x(t) \ \ \forall t \Rightarrow \omega_0 T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

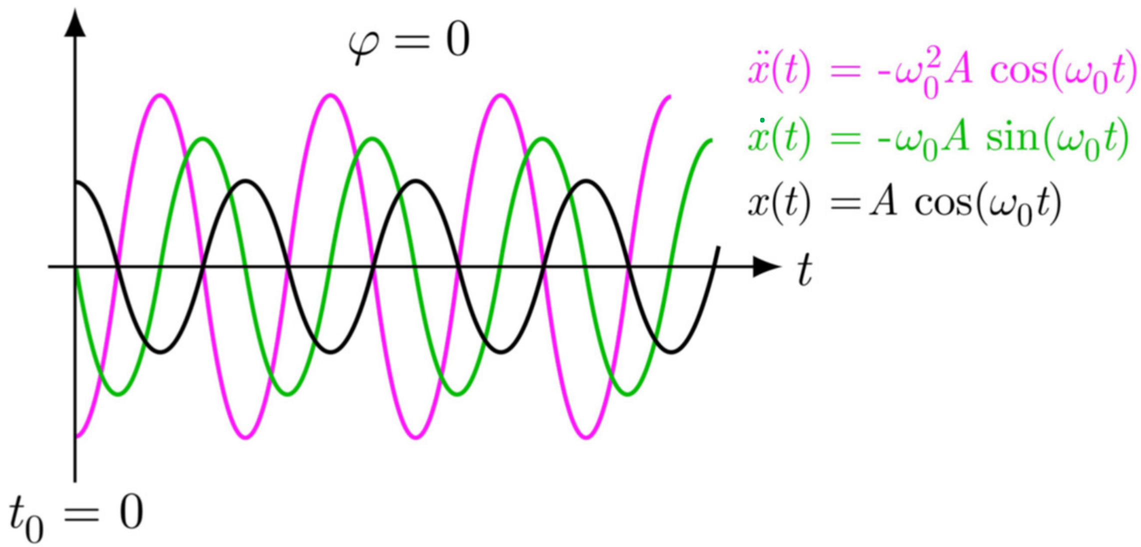
3. De fréquence ν : unité [s^{-1}] = [Hz] (nb de cycles par seconde)
$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

4. De pulsation ω_0 : unité [rad.s^{-1}]

5. D'angle de déphasage φ (translation)



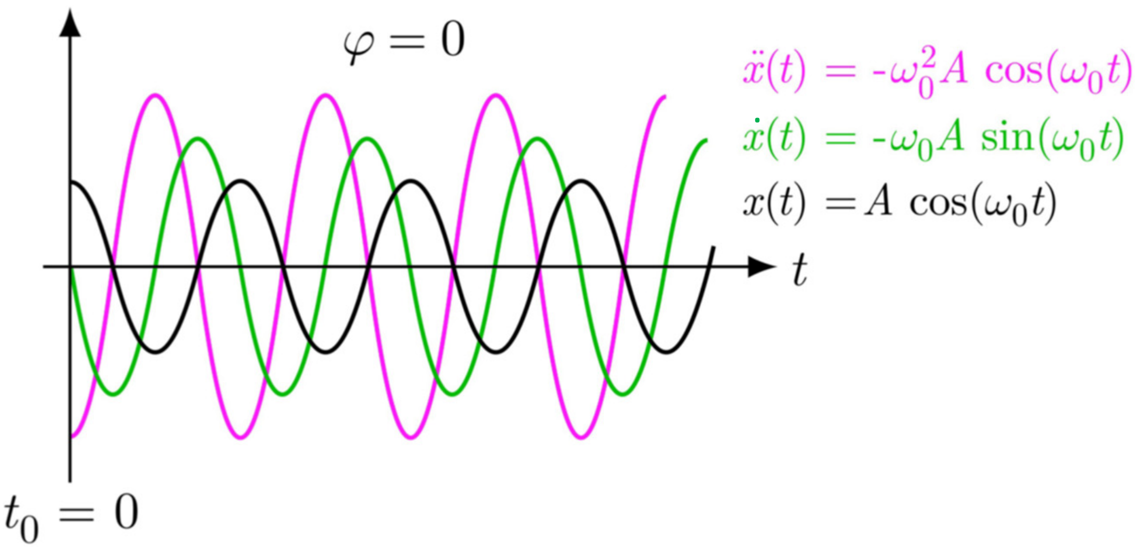
5.2.1 Illustrations



5.2.1 Illustrations

(déphasage $\varphi = 0$ et $t_0 = 0$)

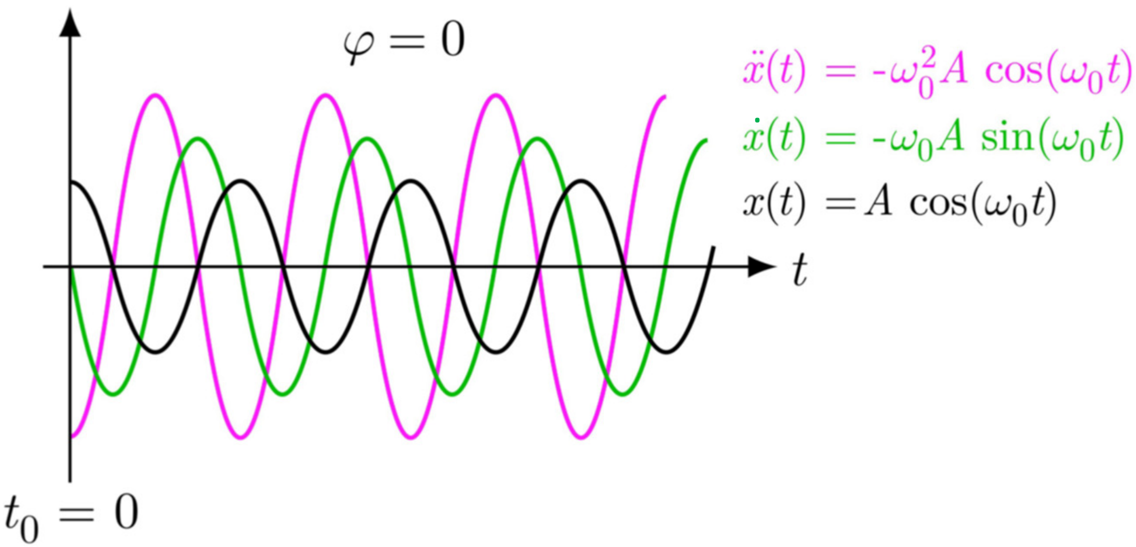
Conditions initiales $x(0) = x_0$ et $v(0) = v_0 = 0$



5.2.1 Illustrations

(déphasage $\varphi = 0$ et $t_0 = 0$)
Conditions initiales $x(0) = x_0$ et $v(0) = v_0 = 0$

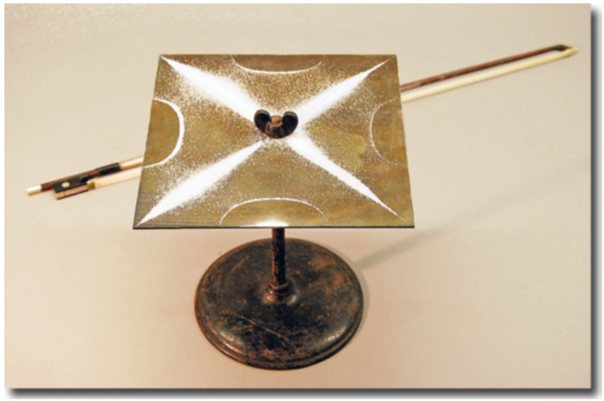
- Équation horaire : $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$
- Équation de la vitesse : $v(t) = \dot{x}(t) = -\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t)$
- Équation du mouvement : $a(t) = \ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x_0 \cos(\omega_0 t)$



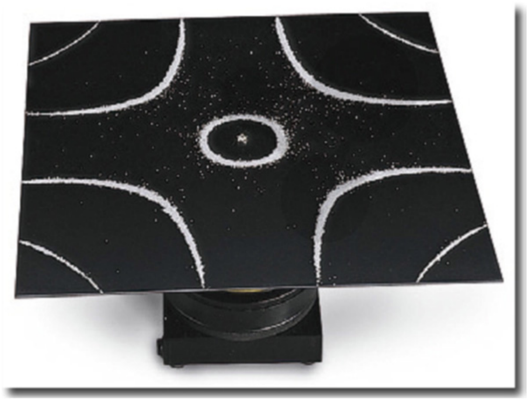
5.2.1 Illustrations

Expérience :

1.



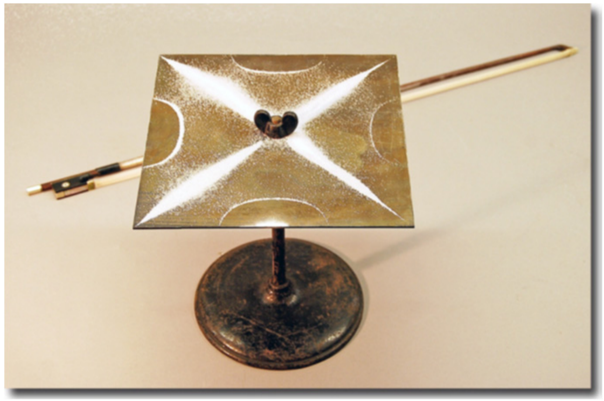
2.



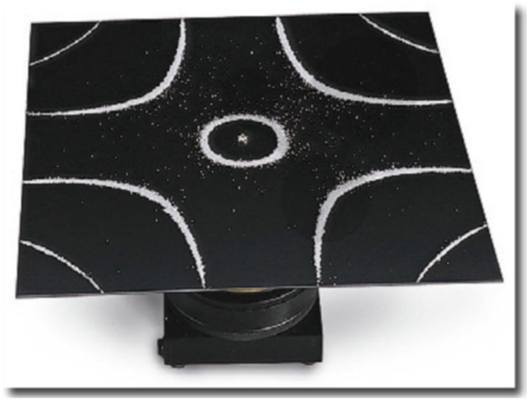
5.2.1 Illustrations

Expérience : Plaques de Chladni

1.



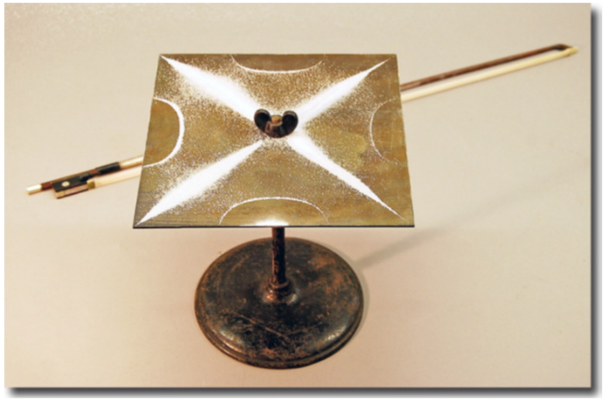
2.



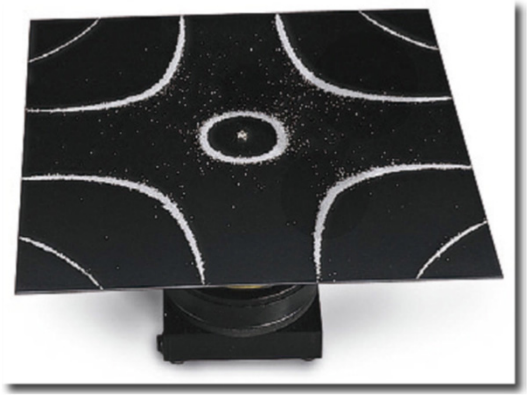
5.2.1 Illustrations

Expérience : Plaques de Chladni

1.



2.



- La plaque est excitée mécaniquement sur ses extrémités à l'aide d'un archet 1. ou en son centre 2. grâce à un vibreur. On visualise les nœuds de l'onde stationnaire (mouvement oscillatoire dont les nœuds sont fixes) avec du sable. La valeur de l'amplitude d'une onde stationnaire oscille au cours du temps.

5.2.1 Illustrations

Exemple :

5.2.1 *Illustrations*

Exemple :

Objet de masse m fixé à un ressort de constante élastique k lâché sans vitesse initiale, i.e., $v_0 = 0$, d'une position x_0 par rapport à la position au repos à l'origine du repère.

5.2.1 Illustrations

Exemple :

Objet de masse *m* fixé à un ressort de constante élastique *k* lâché sans vitesse initiale, i.e., $v_0 = 0$, d'une position x_0 par rapport à la position au repos à l'origine du repère.

- Conditions initiales : $A = x_0, \quad \varphi = 0$ et $t_0 = 0$
- Équation horaire : $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$ où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- Période : $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (5.11)}$

5.2.1 Illustrations

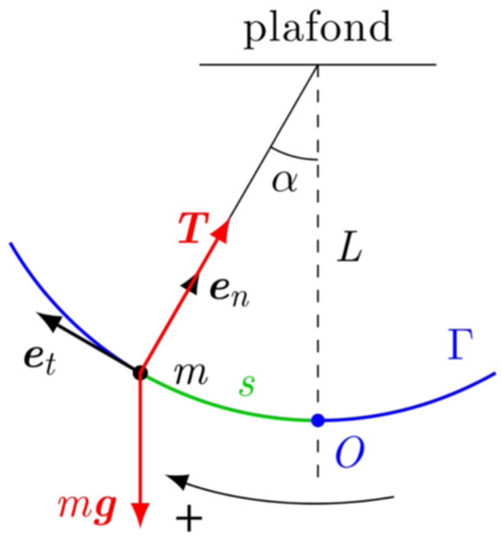
Exemple :

Objet de masse *m* fixé à un ressort de constante élastique *k* lâché sans vitesse initiale, i.e., $v_0 = 0$, d'une position x_0 par rapport à la position au repos à l'origine du repère.

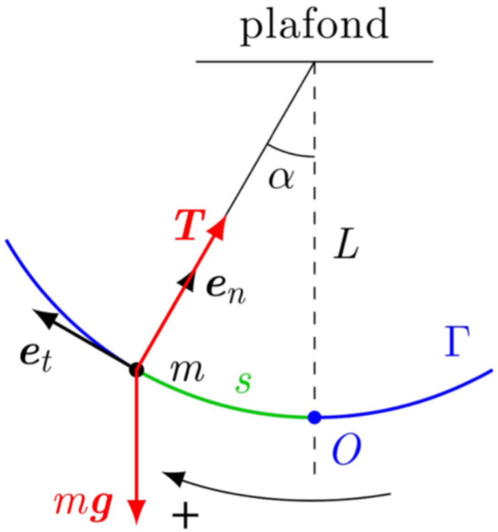
- Conditions initiales : $A = x_0, \quad \varphi = 0$ et $t_0 = 0$
- Équation horaire : $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$ où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- Période : $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (5.11)}$

Ainsi, plus la masse *m* est grande, plus la période d'oscillation est longue. Plus la constante du ressort *k* est grande (grande rigidité), plus la période d'oscillation est courte.

5.2.2 Pendule simple



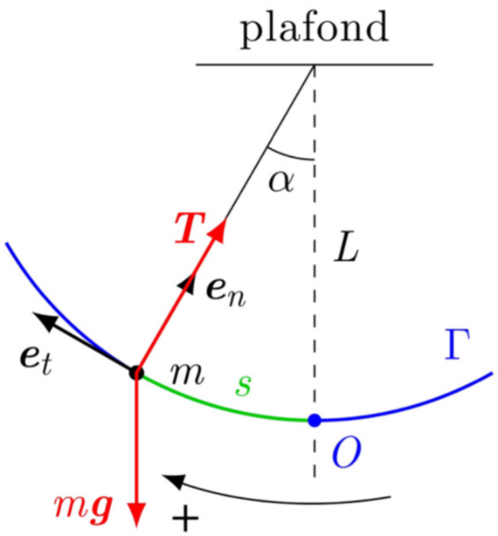
5.2.2 Pendule simple



- <u>Objet</u> : masse m
- <u>Loi du mouvement</u> : $m\mathbf{g} + \mathbf{T} = m\mathbf{a}$

Selon $\mathbf{e}_t$: $\boxed{-mg\sin\alpha = m\ddot{s} = mL\ddot{\alpha} \quad (5.12)}$ où $s = L\alpha$

5.2.2 Pendule simple



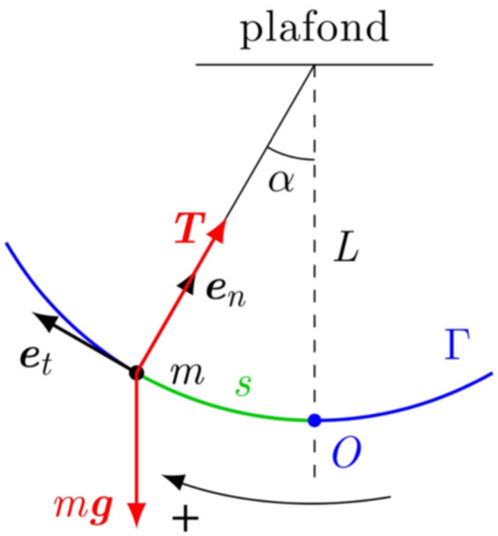
- <u>Objet</u> : masse m
- <u>Loi du mouvement</u> : $m\mathbf{g} + \mathbf{T} = m\mathbf{a}$

Selon $\mathbf{e}_t$: $\boxed{-mg\sin\alpha = m\ddot{s} = mL\ddot{\alpha} \quad (5.12)}$ où $s = L\alpha$

Selon $\mathbf{e}_n$: $\boxed{-mg\cos\alpha + T = \dfrac{mv^2}{L} = mL\dot{\alpha}^2 \quad (5.13)}$

$$\boxed{\overset{(5.12)}{\Rightarrow} \ddot{\alpha} = -\omega^2 \sin\alpha \quad \text{où} \quad \omega^2 \equiv \frac{g}{L} \quad (5.14)}$$

5.2.2 Pendule simple



- Objet : masse m
- Loi du mouvement : $m\mathbf{g} + \mathbf{T} = m\mathbf{a}$

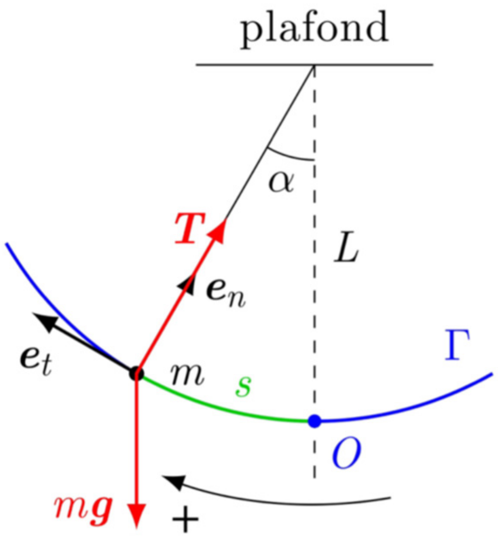
Selon $\mathbf{e}_t$: $\boxed{-mg\sin\alpha = m\ddot{s} = mL\ddot{\alpha} \quad (5.12)}$ où $s = L\alpha$

Selon $\mathbf{e}_n$: $\boxed{-mg\cos\alpha + T = \dfrac{mv^2}{L} = mL\dot{\alpha}^2 \quad (5.13)}$

$$\boxed{\overset{(5.12)}{\Rightarrow} \ddot{\alpha} = -\omega^2 \sin\alpha \quad \text{où} \quad \omega^2 \equiv \frac{g}{L} \quad (5.14)}$$

- Il n'y a pas de solution analytique à l'équation (5.14) puisqu'il s'agit d'une équation transcendante. Dans la limite des petits angles (i.e., $\alpha << 1$) alors $\sin\alpha \approx \alpha$: (5.14) $\Rightarrow \boxed{\ddot{\alpha} = -\omega^2\alpha \quad (5.15)}$ $\Rightarrow$ oscillateur harmonique

5.2.2 Pendule simple



- <u>Objet</u> : masse m
- <u>Loi du mouvement</u> : $m\mathbf{g} + \mathbf{T} = m\mathbf{a}$

Selon $\mathbf{e}_t$: $\boxed{-mg\sin\alpha = m\ddot{s} = mL\ddot{\alpha} \quad (5.12)}$ où $s = L\alpha$

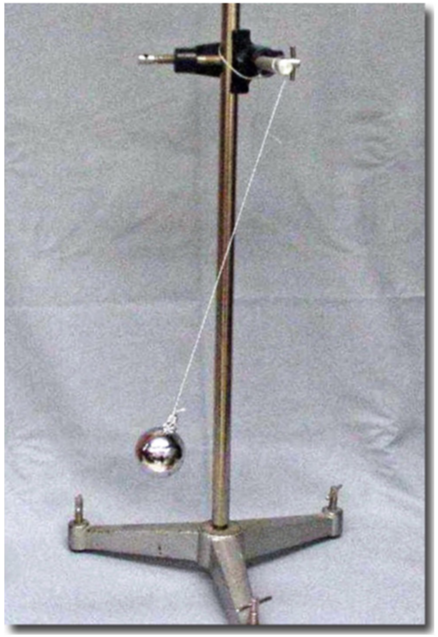
Selon $\mathbf{e}_n$: $\boxed{-mg\cos\alpha + T = \frac{mv^2}{L} = mL\dot{\alpha}^2 \quad (5.13)}$

$$\boxed{\overset{(5.12)}{\Rightarrow} \ddot{\alpha} = -\omega^2 \sin\alpha \quad \text{où} \quad \omega^2 \equiv \frac{g}{L} \quad (5.14)}$$

- Il n'y a pas de solution analytique à l'équation (5.14) puisqu'il s'agit d'une équation transcendante. Dans la limite des petits angles (i.e., $\alpha << 1$) alors $\sin\alpha \approx \alpha$: (5.14) $\Rightarrow \boxed{\ddot{\alpha} = -\omega^2\alpha \quad (5.15)}$ $\Rightarrow$ oscillateur harmonique
- Période d'oscillation : $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (5.16)}$

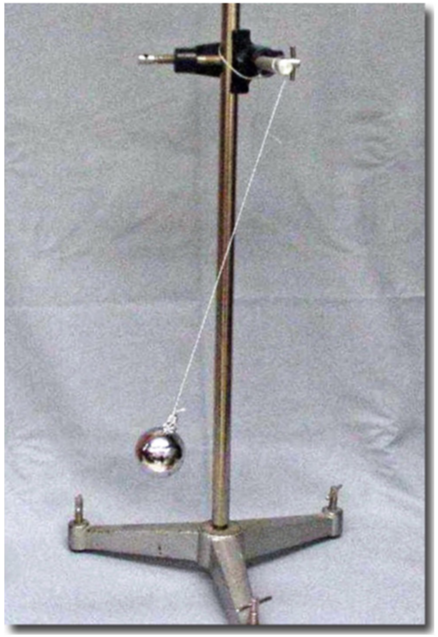
5.2.2 Pendule simple

Expérience :



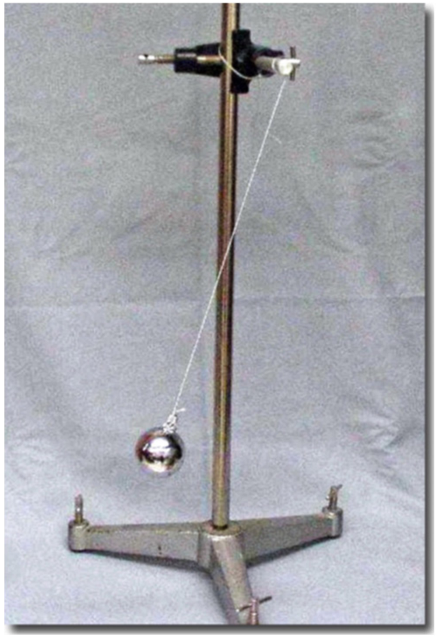
5.2.2 Pendule simple

Expérience : Pendule simple



5.2.2 Pendule simple

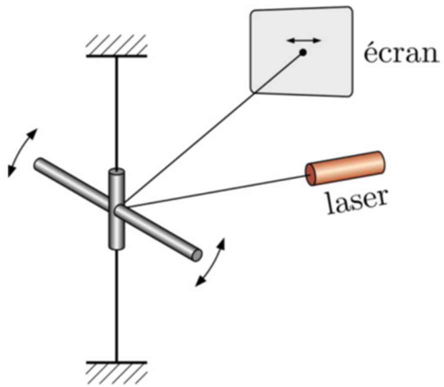
Expérience : Pendule simple

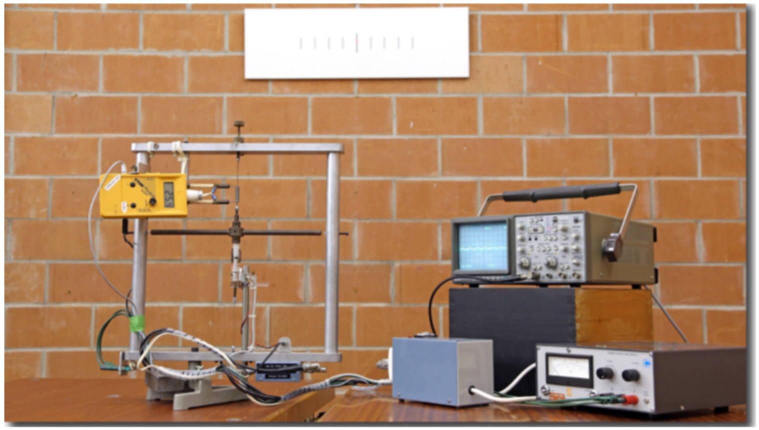


- Si l'angle du fil du pendule avec la verticale reste suffisamment petit, le mouvement du pendule est un mouvement oscillatoire harmonique.
- Si l'angle est plus petit qu'environ 10-20°, alors cette approximation est bonne.

5.2.2 Pendule simple

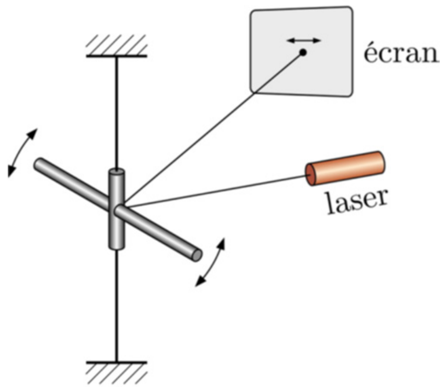
Expérience :

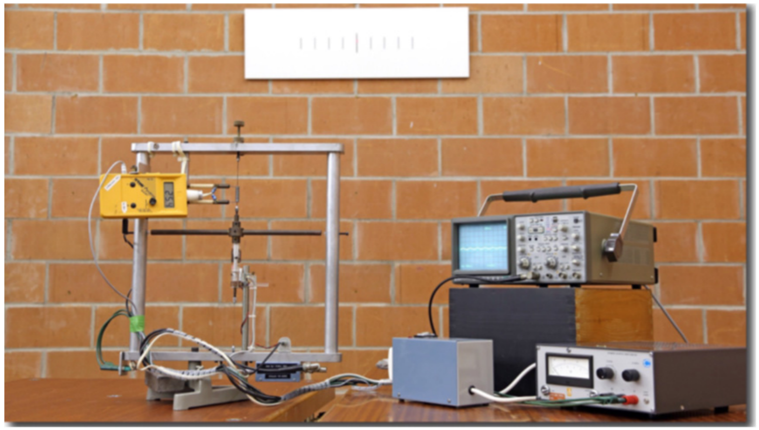




5.2.2 Pendule simple

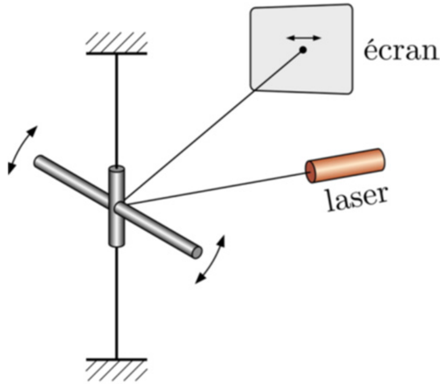
Expérience : Pendule de torsion avec amortissement

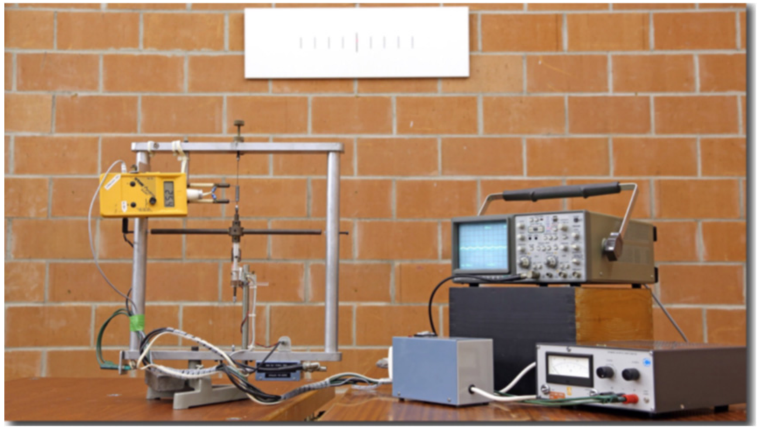




5.2.2 Pendule simple

Expérience : Pendule de torsion avec amortissement



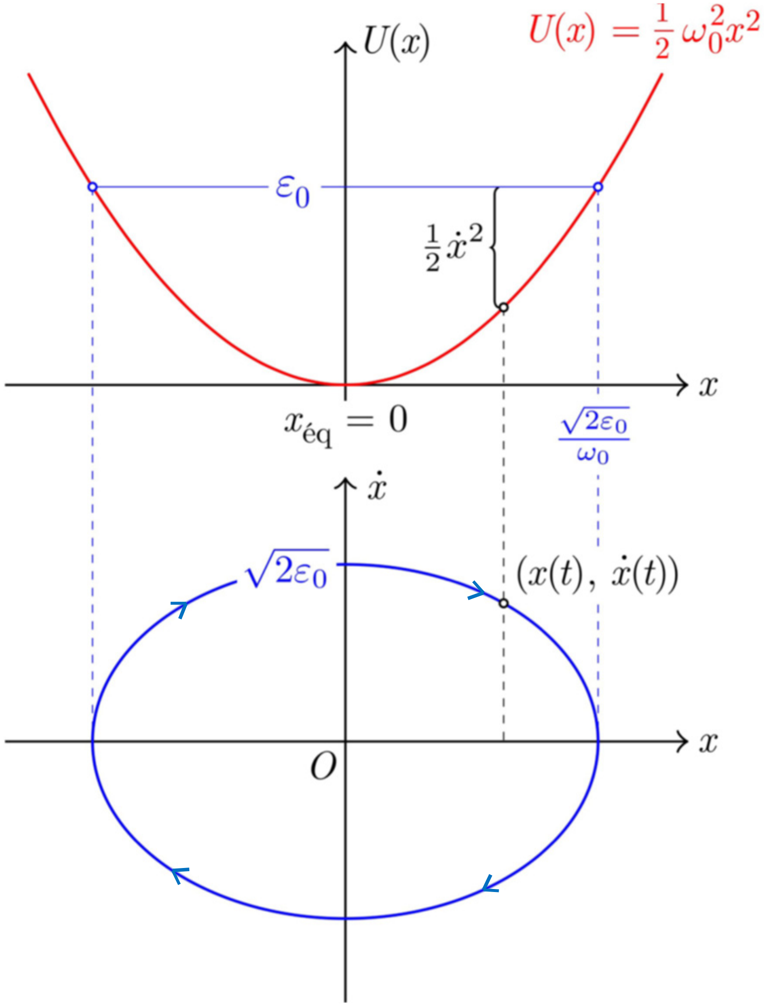


- Un pendule de torsion est constitué d'une barre métallique fixée sur un fil vertical. Un miroir est fixé sur la barre et un rayon laser est réfléchi par le miroir sur un écran.

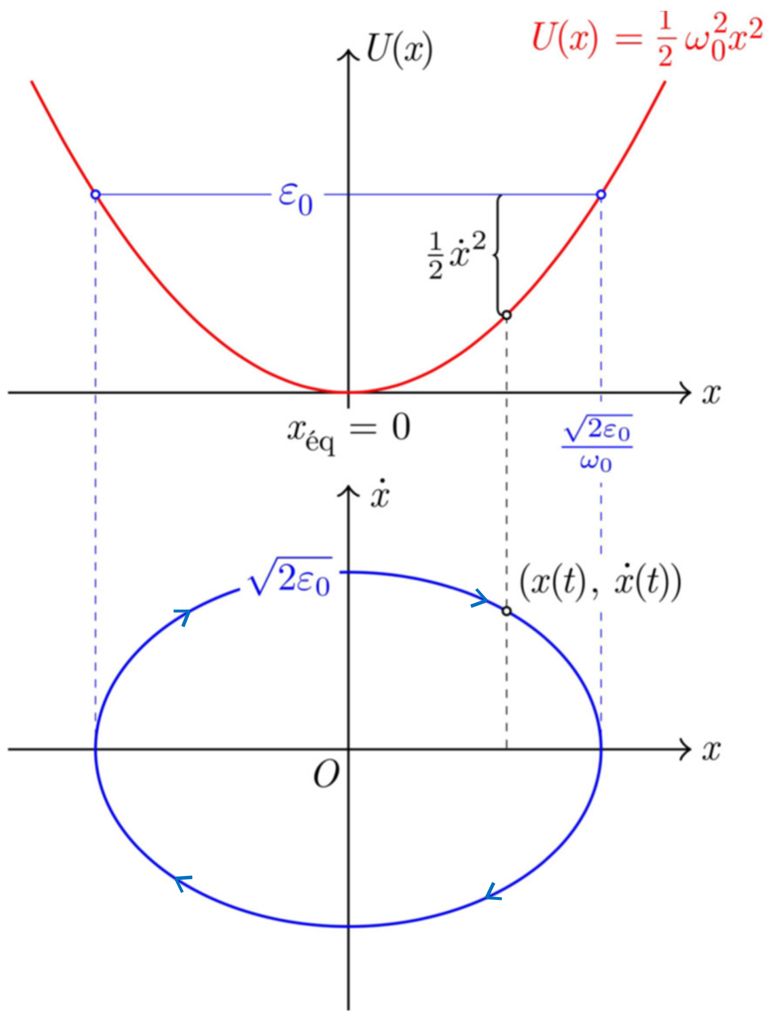
- En donnant un mouvement de torsion à la barre, la réflexion du rayon laser sur l'écran suit un mouvement harmonique oscillatoire avec amortissement.

5.3 Énergie mécanique

5.3 Énergie mécanique



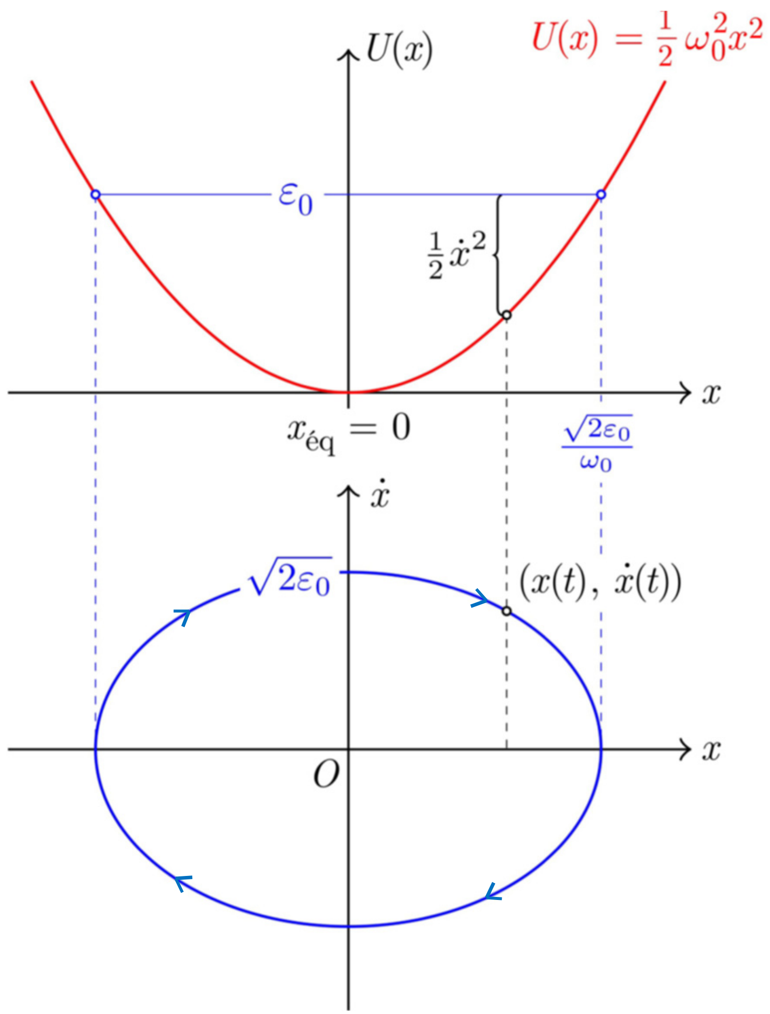
5.3 Énergie mécanique



Conservation d'énergie par unité de masse :

$$\boxed{\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\omega_0^2 x^2}_{U(x)} = \varepsilon_0 \quad \forall\, t \quad (5.17)}$$

5.3 Énergie mécanique



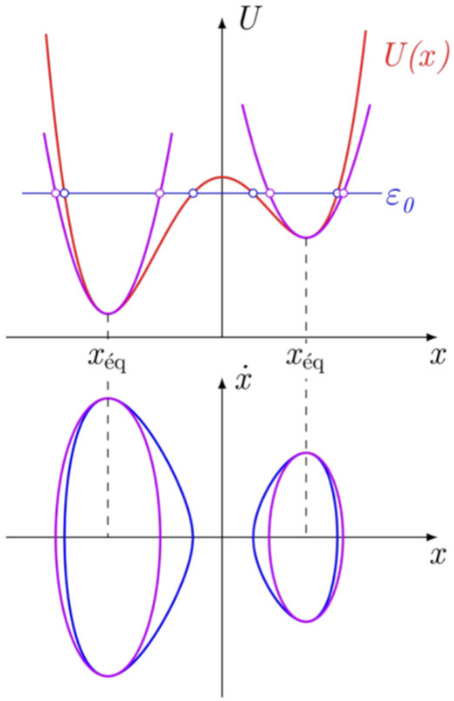
Conservation d'énergie par unité de masse :

$$\boxed{\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\omega_0^2 x^2}_{U(x)} = \varepsilon_0 \quad \forall\, t \quad (5.17)}$$

où $U(x)$ est l'énergie potentielle élastique et ε_0 l'énergie mécanique par unité de masse.

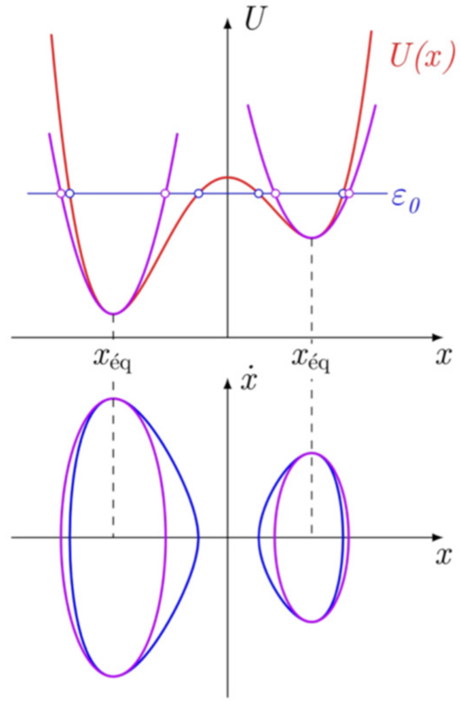
- Pour ε_0 fixée, l'oscillation a lieu autour de $x_{\text{éq}} = 0$ et l'amplitude est égale à $\frac{\sqrt{2\varepsilon_0}}{\omega_0}$.
- Dans le plan $(x, \dot{x})$ (espace des phases), la conservation de l'énergie décrit une ellipse dont l'orbite passe par les points $\left(0, \pm\sqrt{2\varepsilon_0}\right)$ et $\left(\pm\frac{\sqrt{2\varepsilon_0}}{\omega_0}, 0\right)$.

5.3.1 Approximation harmonique



5.3.1 Approximation harmonique

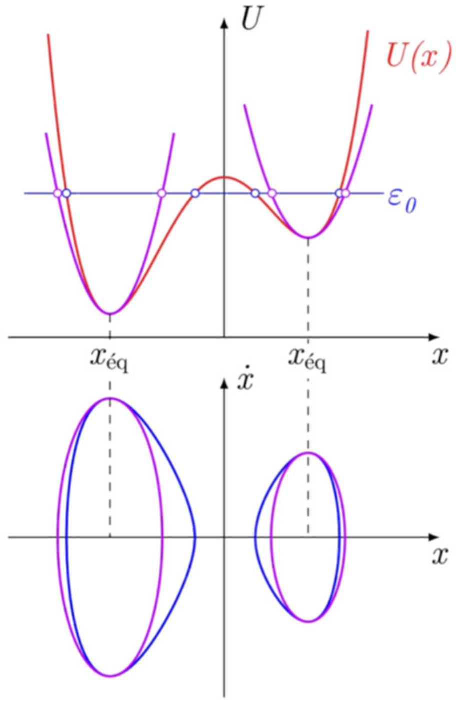
L'approximation harmonique de l'énergie potentielle $U(x)$ par unité de masse autour d'un minimum local permet de donner le comportement oscillatoire d'un objet autour d'une position d'équilibre stable $x_{éq}$. Le minimum local satisfait la relation $\frac{dU}{dx}\left(x_{éq}\right)=0$. Ainsi,



5.3.1 Approximation harmonique

L'approximation harmonique de l'énergie potentielle $U(x)$ par unité de masse autour d'un minimum local permet de donner le comportement oscillatoire d'un objet autour d'une position d'équilibre stable $x_{\text{éq}}$. Le minimum local satisfait la relation $\frac{dU}{dx}\left(x_{\text{éq}}\right)=0$. Ainsi,

$$\boxed{U(x)\simeq U\left(x_{\text{éq}}\right)+\frac{1}{2}\frac{d^2U\left(x_{\text{éq}}\right)}{dx^2}\left(x-x_{\text{éq}}\right)^2 \quad (5.18)}$$

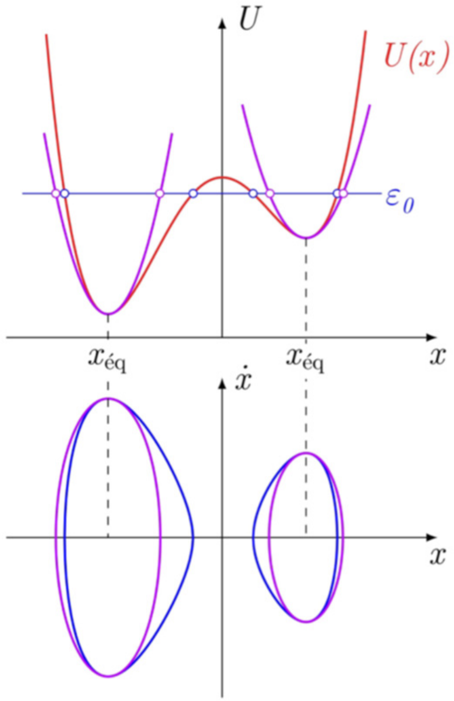


5.3.1 Approximation harmonique

L'approximation harmonique de l'énergie potentielle $U(x)$ par unité de masse autour d'un minimum local permet de donner le comportement oscillatoire d'un objet autour d'une position d'équilibre stable $x_{\text{éq}}$. Le minimum local satisfait la relation $\frac{dU}{dx}\left(x_{\text{éq}}\right)=0$. Ainsi,

$$\boxed{U(x)\simeq U\left(x_{\text{éq}}\right)+\frac{1}{2}\frac{d^2U\left(x_{\text{éq}}\right)}{dx^2}\left(x-x_{\text{éq}}\right)^2 \quad (5.18)}$$

La pulsation de l'oscillateur est donc donnée par $\boxed{\omega_0^2=\frac{d^2U\left(x_{\text{éq}}\right)}{dx^2} \quad (5.19)}$

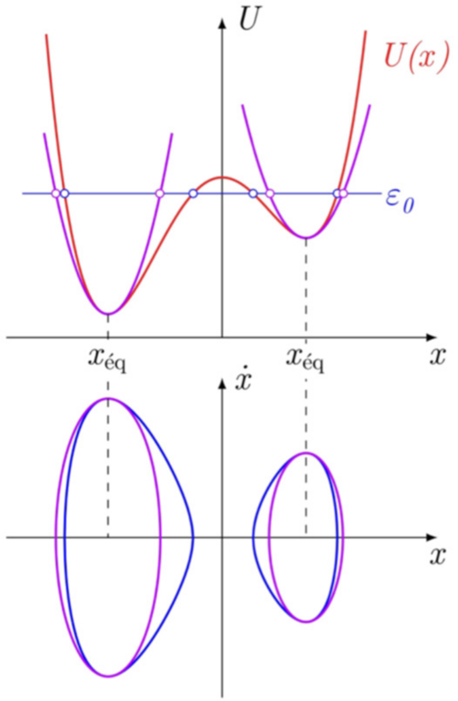


5.3.1 Approximation harmonique

L'approximation harmonique de l'énergie potentielle $U(x)$ par unité de masse autour d'un minimum local permet de donner le comportement oscillatoire d'un objet autour d'une position d'équilibre stable $x_{éq}$. Le minimum local satisfait la relation $\frac{dU}{dx}\left(x_{éq}\right)=0$. Ainsi,

$$U(x) \simeq U\left(x_{éq}\right)+\frac{1}{2}\frac{d^2U\left(x_{éq}\right)}{dx^2}\left(x-x_{éq}\right)^2 \quad (5.18)$$

La pulsation de l'oscillateur est donc donnée par $$\omega_0^2=\frac{d^2U\left(x_{éq}\right)}{dx^2} \quad (5.19)$$



Au voisinage de $x_{éq}$, le graphe de $U(x)$ a un comportement parabolique. Dans le plan $\left(x,\dot{x}\right)$ (espace des phases), les orbites sont approximées par des ellipses.

5.3.1 Approximation harmonique

Expérience :

5.3.1 Approximation harmonique

Expérience : Projection d’un mouvement circulaire uniforme

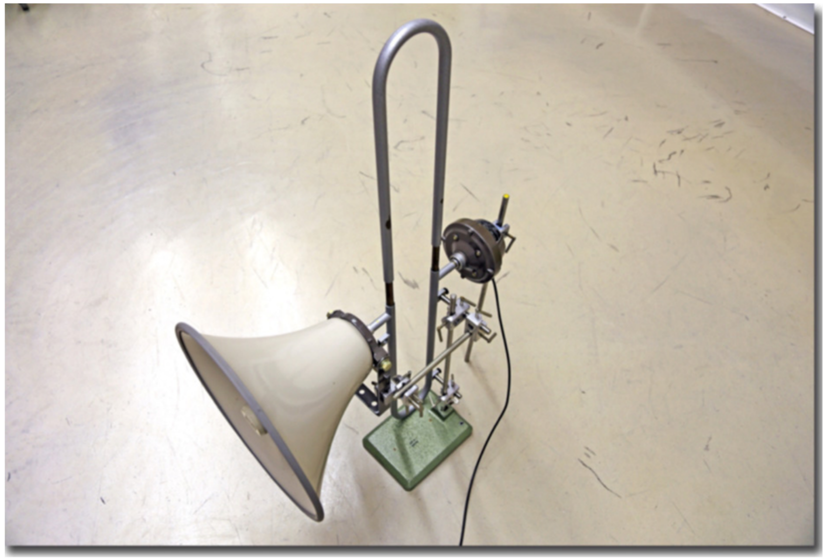
5.3.1 Approximation harmonique

Expérience : Projection d’un mouvement circulaire uniforme

- La projection du mouvement oscillatoire d’un pendule est superposée à la projection d’un mouvement circulaire uniforme.
- Un mouvement circulaire uniforme est la combinaison linéaire de deux mouvements oscillatoires orthogonaux déphasés de 90° (i.e., $\pi/2$).

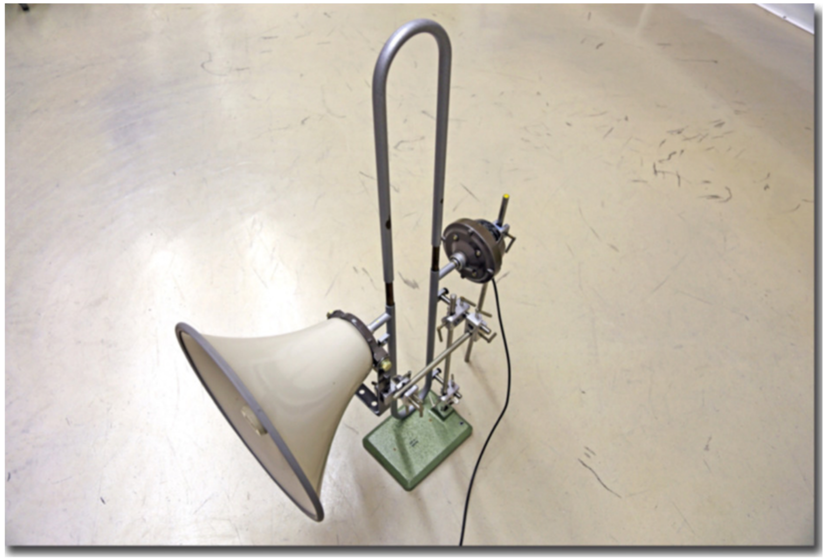
5.3.1 Approximation harmonique

Expérience :



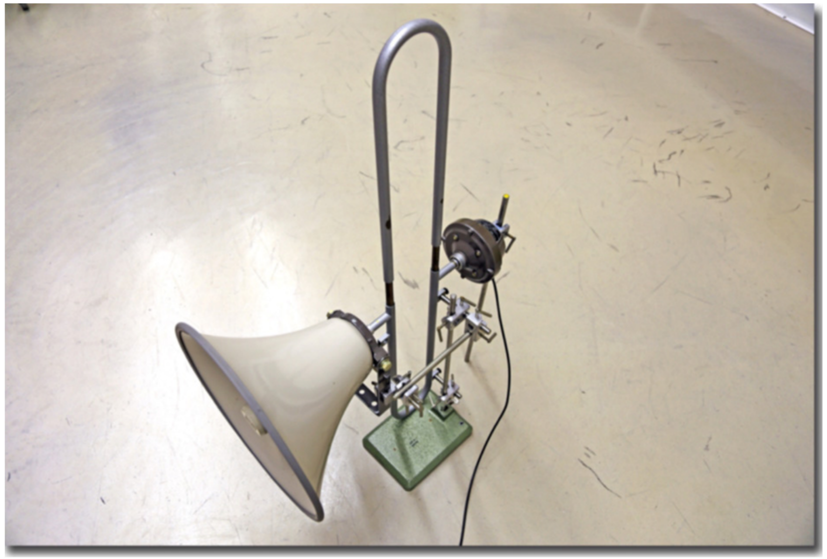
5.3.1 Approximation harmonique

Expérience : Résonance acoustique – trombone de Koenig



5.3.1 Approximation harmonique

Expérience : Résonance acoustique – trombone de Koenig



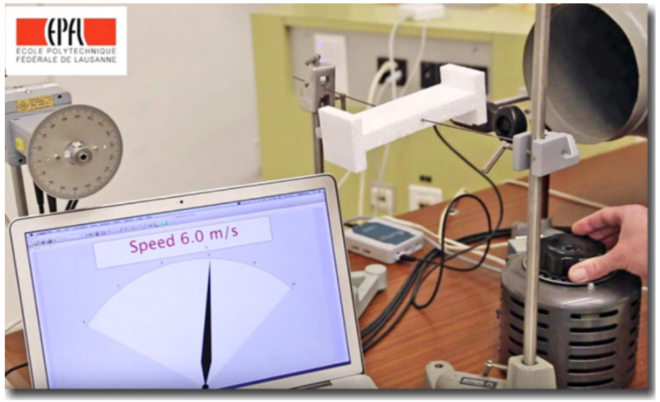
- Lorsqu'on excite acoustiquement le trombone à certaines fréquences, on obtient une amplification du signal sonore appelée résonance acoustique.

5.3.1 Approximation harmonique

Expérience :

1. Pont de Tacoma (1940)

2. Modèle mécanique du pont

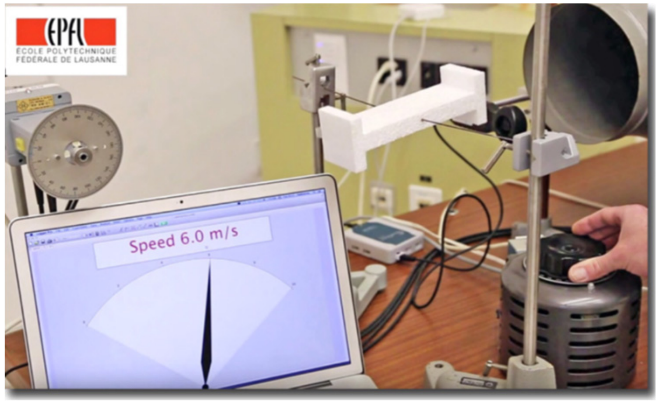


5.3.1 Approximation harmonique

Expérience : Résonance mécanique – Pont de Tacoma (1940)

1. Pont de Tacoma (1940)

2. Modèle mécanique du pont

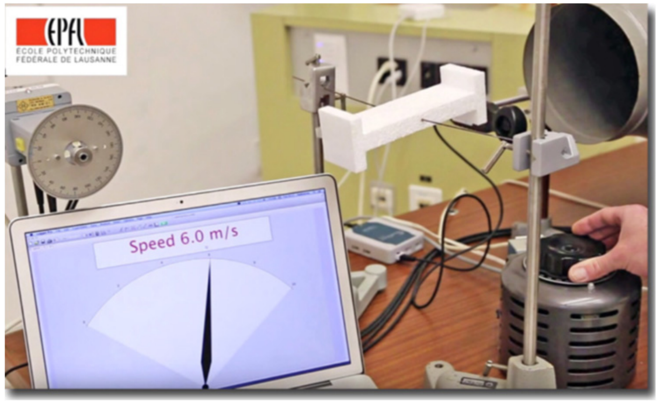


5.3.1 Approximation harmonique

Expérience : Résonance mécanique – Pont de Tacoma (1940)

1. Pont de Tacoma (1940)

2. Modèle mécanique du pont



Le pont sur le fleuve Tacoma (USA) s'est effondré en 1940 quand un vent a généré une résonance du mouvement oscillatoire en torsion dont l'amplitude est devenue si grande que la structure n'a pas pu résister.

5.3.1 Approximation harmonique

Expérience :

5.3.1 Approximation harmonique

Expérience : Synchronisation des métronomes

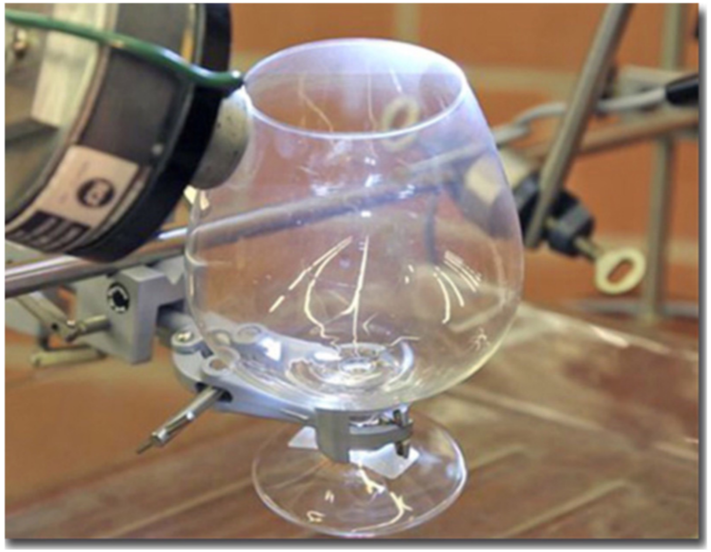
5.3.1 Approximation harmonique

Expérience : Synchronisation des métronomes

Six métronomes de même fréquence d'oscillation oscillent sur une même plaque de bois. Lorsque la plaque peut rouler sur deux cylindres de plexiglas, les métronomes se synchronisent (*A*). Sinon, ils se désynchronisent.

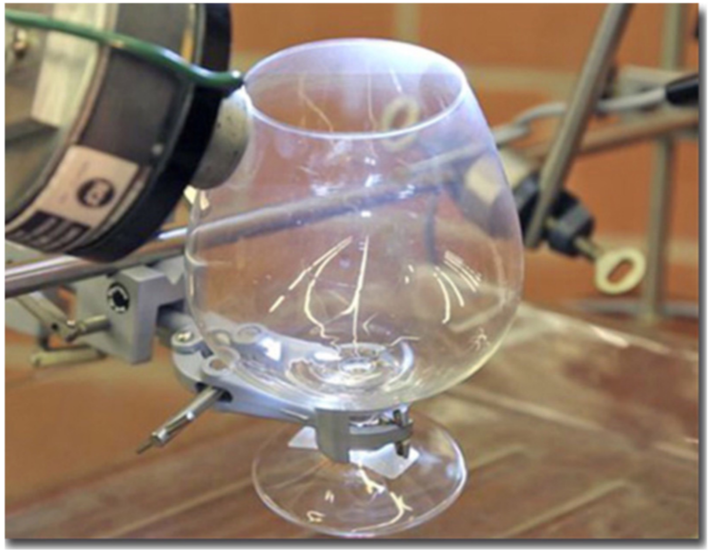
5.3.1 Approximation harmonique

Expérience :



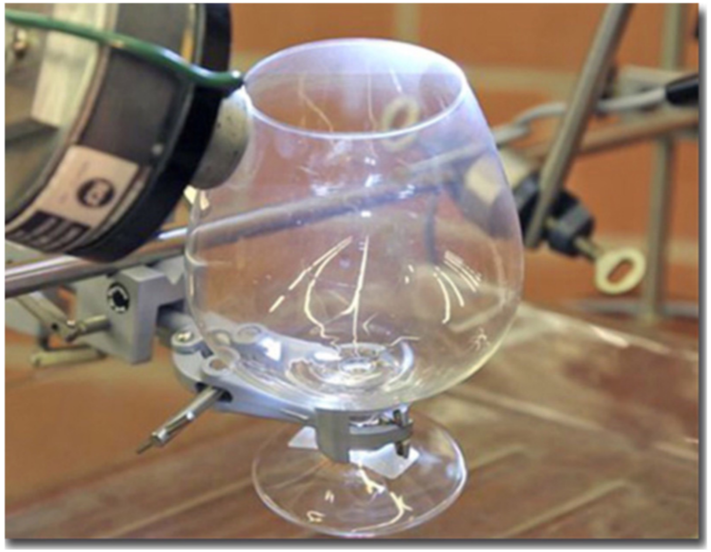
5.3.1 Approximation harmonique

Expérience : Destruction d'un verre par résonance acoustique



5.3.1 Approximation harmonique

Expérience : Destruction d'un verre par résonance acoustique



Lorsque le verre est excité acoustiquement à l'aide d'un haut-parleur à sa fréquence de résonance, il est d'abord déformé, puis il se casse.