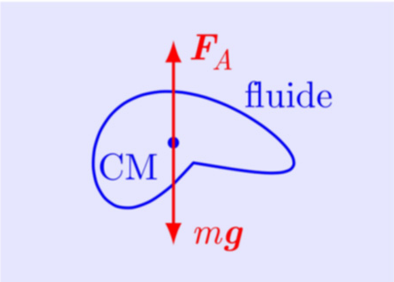
Leçon 10 – 27/03/2025

3. Dynamique

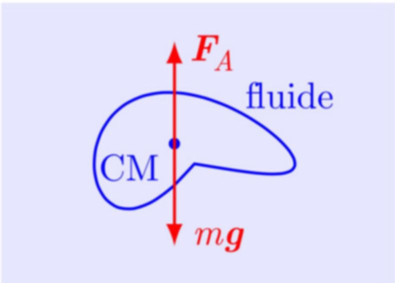
- 3.8 Hydrostatique
- 3.9 Deux intermèdes
- 3.10 Repère lié au mouvement

3.8.7 Principe d'Archimède



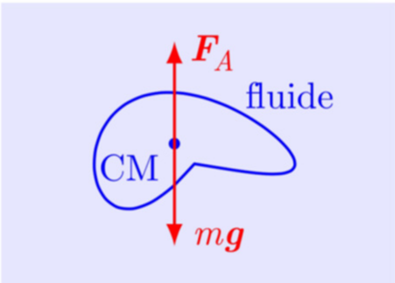
3.8.7 Principe d'Archimède

- La pression augmentant avec la profondeur, un corps immergé subit une résultante des forces de pression dirigée vers le haut, appelée poussée d'Archimède $\mathbf{F}_A$.



3.8.7 Principe d'Archimède

- La pression augmentant avec la profondeur, un corps immergé subit une résultante des forces de pression dirigée vers le haut, appelée poussée d'Archimède $\mathbf{F}_A$.

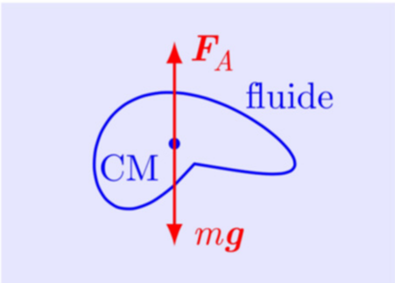


- Objet : élément de fluide (masse m, volume V_{fl})
- Forces : poids $m\mathbf{g}$, forces de pression (poussée d'Archimède $\mathbf{F_A}$)

$$m\mathbf{g} + \mathbf{F}_A = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{F}_A = -\rho_{fl} V_{fl} \mathbf{g}$$

3.8.7 Principe d'Archimède

- La pression augmentant avec la profondeur, un corps immergé subit une résultante des forces de pression dirigée vers le haut, appelée poussée d'Archimède $\mathbf{F}_A$.



- Objet : élément de fluide (masse m, volume V_{fl})
- Forces : poids $m\mathbf{g}$, forces de pression (poussée d'Archimède $\mathbf{F_A}$)

$$m\mathbf{g} + \mathbf{F}_A = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{F}_A = -\rho_{fl} V_{fl} \mathbf{g}$$

- Si on remplace l'élément de fluide par un autre corps au repos de même forme et de même volume (i.e., $V_{corps} = V_{fl}$), les forces exercées par le fluide environnant (i.e., $\mathbf{F}_A$) ne changent pas (puisque la poussée d'Archimède dépend uniquement de la masse volumique du fluide dans lequel baigne le corps mais pas du corps lui-même pour un volume donné). Il s'agit d'une force extérieure!

- Si la masse volumique du corps est inférieure à celle du fluide, il remonte alors à la surface (par exemple, bois dans l'eau).

3.8.7 Principe d'Archimède

Poussée d'Archimède $\boxed{\mathbf{F}_{\mathrm{A}} = -\rho_{\mathrm{fl}} V_{\mathrm{im}} \mathbf{g} \quad (3.40)}$

Remarque :

Exemple :

Ballon partiellement immergé

3.8.7 Principe d'Archimède

Poussée d'Archimède $\boxed{\mathbf{F}_{\mathrm{A}} = -\rho_{\mathrm{fl}} V_{\mathrm{im}} \mathbf{g} \quad (3.40)}$ où V_{im} est le volume immergé du corps.

Remarque :

Exemple :

Ballon partiellement immergé

3.8.7 Principe d'Archimède

Poussée d'Archimède $\boxed{\mathbf{F}_\mathrm{A} = -\rho_\mathrm{fl} V_\mathrm{im} \mathbf{g} \quad (3.40)}$ où V_im est le volume immergé du corps.

Remarque :

Comme la poussée d'Archimède est une conséquence de la loi de l'hydrostatique qui donne la différence de pression dans un même fluide, un corps flottant à l'interface entre deux fluides subit deux poussées d'Archimède, selon le volume immergé dans chacun des fluides.

Exemple :

Ballon partiellement immergé

3.8.7 Principe d'Archimède

Poussée d'Archimède $\boxed{\mathbf{F}_\mathrm{A} = -\rho_\mathrm{fl} V_\mathrm{im} \mathbf{g} \quad (3.40)}$ où V_im est le volume immergé du corps.

Remarque :

Comme la poussée d'Archimède est une conséquence de la loi de l'hydrostatique qui donne la différence de pression dans un même fluide, un corps flottant à l'interface entre deux fluides subit deux poussées d'Archimède, selon le volume immergé dans chacun des fluides.

Exemple :

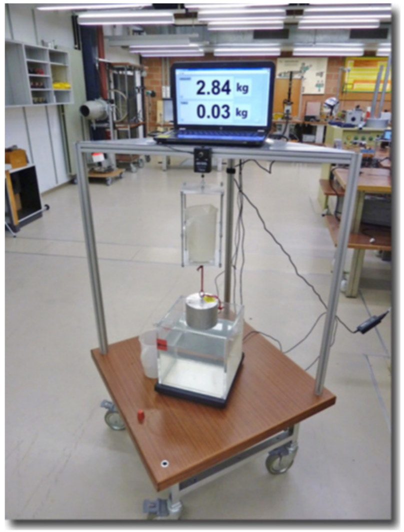
1. Iceberg flottant sur l'eau

2. Ballon contenant un enfant flottant sur l'eau

Ballon partiellement immergé

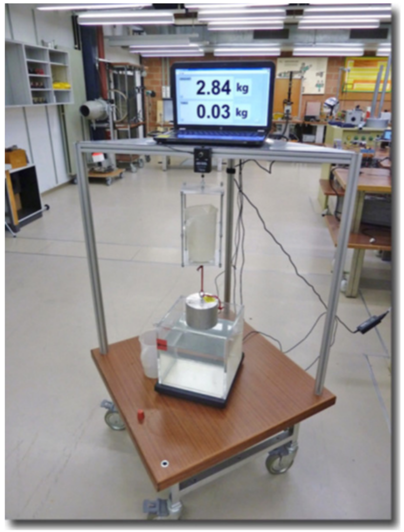
3.8.7 Principe d'Archimède

Expérience :



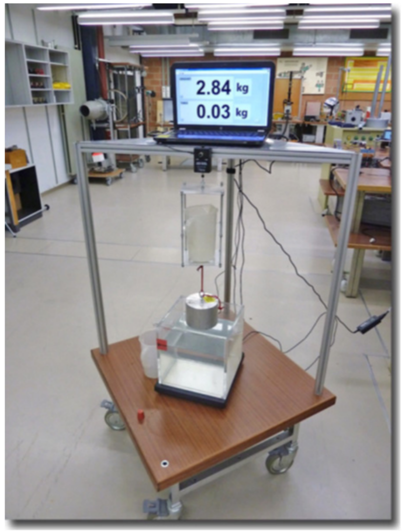
3.8.7 Principe d'Archimède

Expérience : Poussée d'Archimède



3.8.7 Principe d'Archimède

Expérience : Poussée d'Archimède

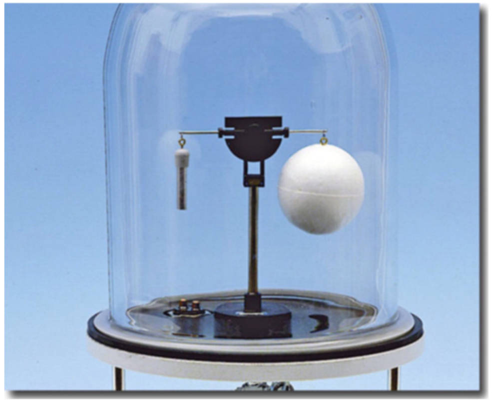


- On suspend un cylindre d'aluminium d'environ 2,8 kg, c'est-à-dire d'environ 1 l. On l'immerge ensuite dans un bac d'eau et sa masse apparente est alors de 1,8 kg grâce à l'action de la poussée d'Archimède due à 1 kg d'eau déplacé.

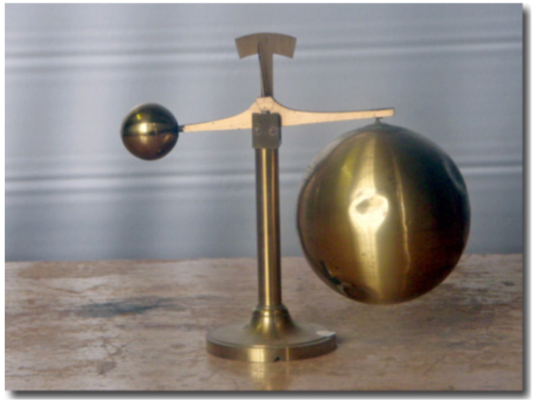
3.8.7 Principe d'Archimède

Expérience :

Vide



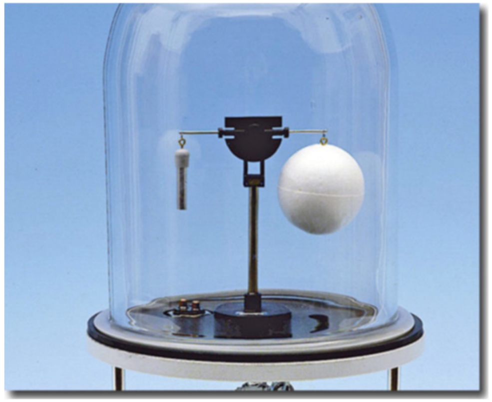
Vide



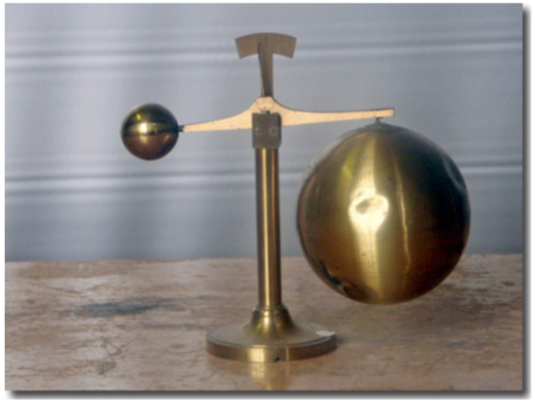
3.8.7 Principe d'Archimède

Expérience : Baroscope

Vide



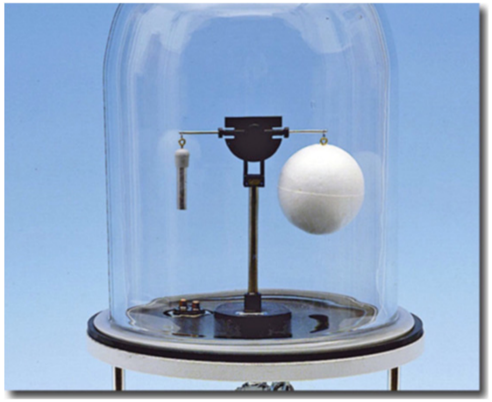
Vide



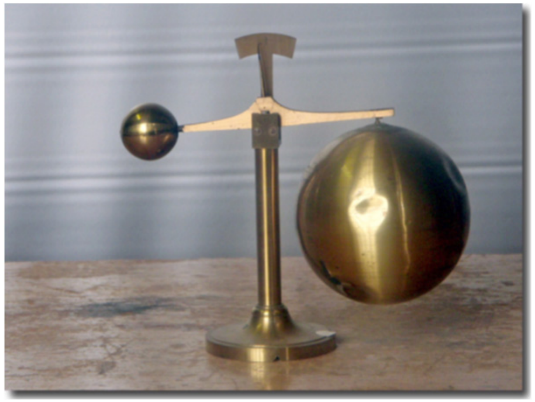
3.8.7 Principe d’Archimède

Expérience : Baroscope

Vide

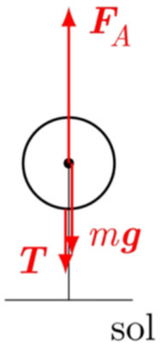


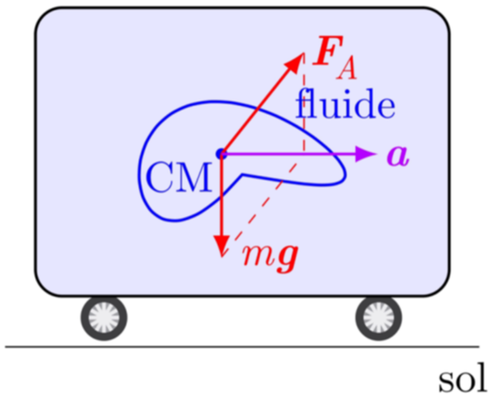
Vide



- Un baroscope permet de mettre en évidence la poussée d’Archimède. Les deux objets sont à l’équilibre à la pression atmosphérique. Lorsqu’on fait le vide, le fléau de la balance penche vers l’objet le plus volumineux puisque c’est sur cet objet que la poussée d’Archimède diminue le plus.

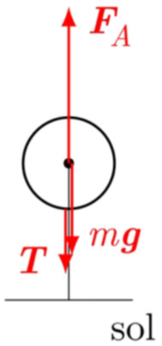
3.8.8 Applications de la poussée d'Archimède

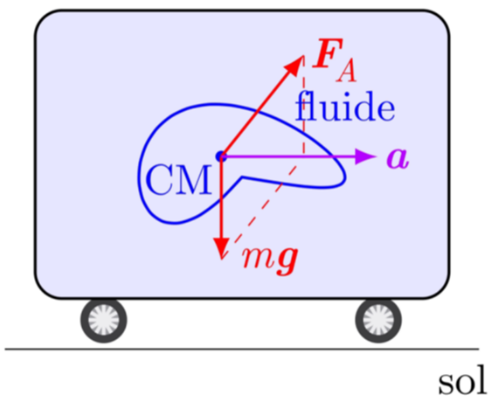




3.8.8 Applications de la poussée d'Archimède

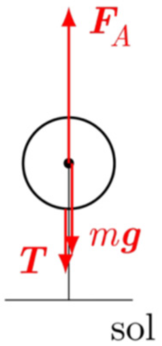
1. Ballon de foire retenu au sol par un fil





3.8.8 Applications de la poussée d'Archimède

1. Ballon de foire retenu au sol par un fil

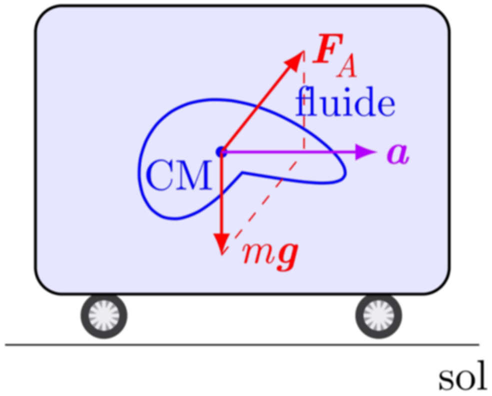


- Objet : ballon
- Forces : poids $m\mathbf{g}$, tension du fil $\mathbf{T}$, poussée d'Archimède $\mathbf{F}_A$

$m\mathbf{g} + \mathbf{T} + \mathbf{F}_A = \mathbf{0}$

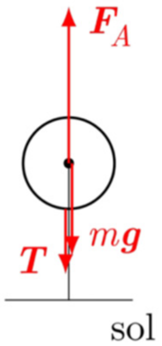
$$\boxed{\Rightarrow \mathbf{T} = -m\mathbf{g} - \mathbf{F}_A = (\rho_{air}V - m)\mathbf{g} \quad (3.41)}$$

- Le fil est vertical et tendu si $\rho_{air}V\text{-}m > 0$.



3.8.8 Applications de la poussée d'Archimède

1. Ballon de foire retenu au sol par un fil



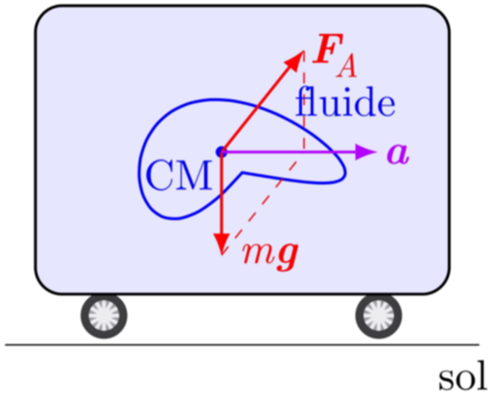
- Objet : ballon
- Forces : poids $m\mathbf{g}$, tension du fil $\mathbf{T}$, poussée d'Archimède $\mathbf{F}_A$

$m\mathbf{g} + \mathbf{T} + \mathbf{F}_A = \mathbf{0}$

$$\boxed{\Rightarrow \mathbf{T} = -m\mathbf{g} - \mathbf{F}_A = (\rho_{air}V - m)\mathbf{g} \quad (3.41)}$$

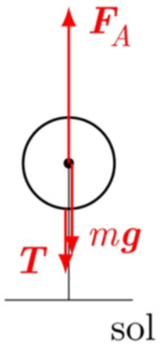
- Le fil est vertical et tendu si $\rho_{air}V\text{-}m > 0$.

2. Fluide dans un chariot accéléré (hydrodynamique)



3.8.8 Applications de la poussée d'Archimède

1. Ballon de foire retenu au sol par un fil



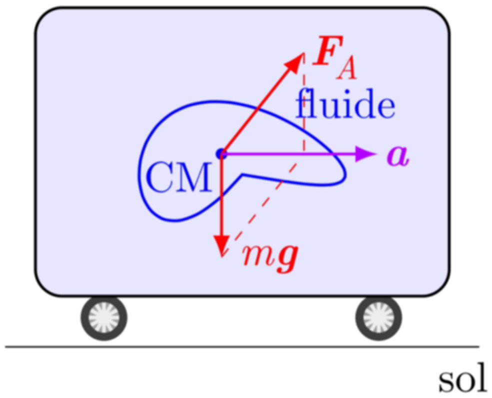
- Objet : ballon
- Forces : poids $m\mathbf{g}$, tension du fil $\mathbf{T}$, poussée d'Archimède $\mathbf{F}_A$

$m\mathbf{g} + \mathbf{T} + \mathbf{F}_A = \mathbf{0}$

$$\boxed{\Rightarrow \mathbf{T} = -m\mathbf{g} - \mathbf{F}_A = \left(\rho_{air} V - m\right)\mathbf{g} \quad (3.41)}$$

- Le fil est vertical et tendu si $\rho_{air} V\text{-}m > 0$.

2. Fluide dans un chariot accéléré (hydrodynamique)



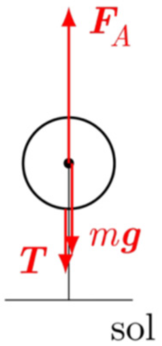
- Objet : élément de fluide
- Forces : poids $m\mathbf{g}$, poussée d'Archimède $\mathbf{F}_A$, $m\mathbf{g} + \mathbf{F}_A = m\mathbf{a}$

$$\boxed{\mathbf{F}_A = -\underbrace{\rho_{fl} V_{im}}_{=m}\left(\mathbf{g} - \mathbf{a}\right) \quad (3.42)}$$

!

3.8.8 Applications de la poussée d'Archimède

1. Ballon de foire retenu au sol par un fil



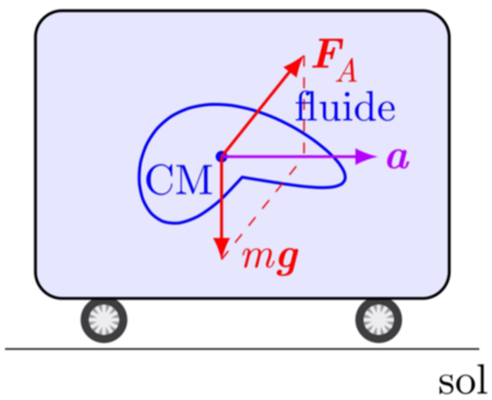
- Objet : ballon
- Forces : poids $m\mathbf{g}$, tension du fil $\mathbf{T}$, poussée d'Archimède $\mathbf{F}_A$

$m\mathbf{g} + \mathbf{T} + \mathbf{F}_A = \mathbf{0}$

$$\boxed{\Rightarrow \mathbf{T} = -m\mathbf{g} - \mathbf{F}_A = \left(\rho_{\text{air}} V - m\right)\mathbf{g} \quad (3.41)}$$

- Le fil est vertical et tendu si $\rho_{\text{air}} V - m > 0$.

2. Fluide dans un chariot accéléré (hydrodynamique)

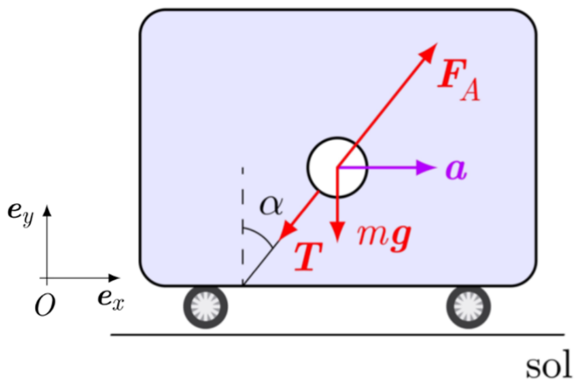


- Objet : élément de fluide
- Forces : poids $m\mathbf{g}$, poussée d'Archimède $\mathbf{F}_A$, $m\mathbf{g} + \mathbf{F}_A = m\mathbf{a}$

$$\boxed{\mathbf{F}_A = -\underbrace{\rho_{\text{fl}} V_{\text{im}}}_{=m}\left(\mathbf{g} - \mathbf{a}\right) \quad (3.42)}$$

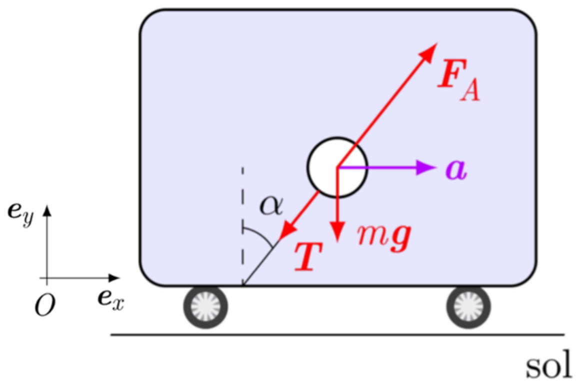
! $\mathbf{F}_A$ n'est pas verticale!

3.8.8 Applications de la poussée d'Archimède



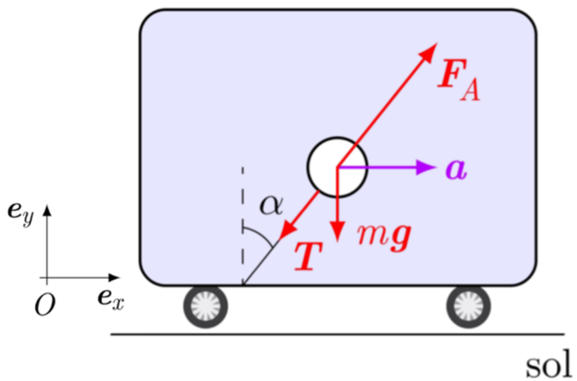
3.8.8 Applications de la poussée d'Archimède

3. Ballon de foire retenu au plancher d'un chariot accéléré



3.8.8 Applications de la poussée d'Archimède

3. Ballon de foire retenu au plancher d'un chariot accéléré



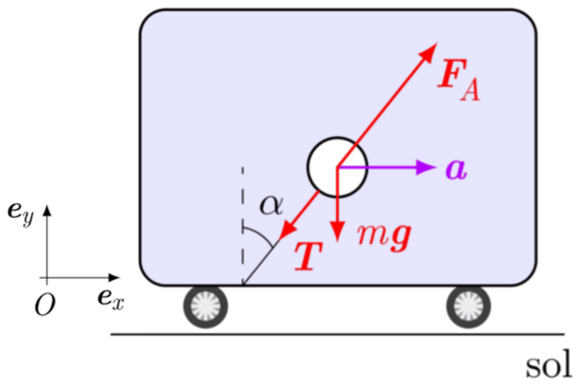
- <u>Objet</u> : ballon
- <u>Forces</u> : poids $m\mathbf{g}$, tension du fil $\mathbf{T}$, poussée d'Archimède $\mathbf{F}_A$

$$m\mathbf{g} + \mathbf{T} + \mathbf{F}_A = m\mathbf{a}$$

$$\boxed{\Rightarrow \mathbf{T} = -m(\mathbf{g}-\mathbf{a}) - \mathbf{F}_A = (\rho_{air}V - m)(\mathbf{g}-\mathbf{a}) \quad (3.43)}$$

3.8.8 Applications de la poussée d'Archimède

3. Ballon de foire retenu au plancher d'un chariot accéléré



- Objet : ballon
- Forces : poids $m\mathbf{g}$, tension du fil $\mathbf{T}$, poussée d'Archimède $\mathbf{F}_A$

$m\mathbf{g} + \mathbf{T} + \mathbf{F}_A = m\mathbf{a}$

$$\boxed{\Rightarrow \mathbf{T} = -m(\mathbf{g}-\mathbf{a}) - \mathbf{F}_A = (\rho_{air}V - m)(\mathbf{g}-\mathbf{a}) \quad (3.43)}$$

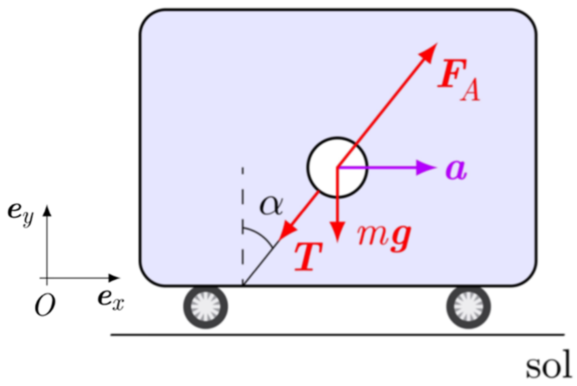
- Le fil est tendu si $\rho_{air}V\text{-}m > 0 \Rightarrow \rho_{air}V\text{-}\rho_{gaz}V > 0$.

$\Longrightarrow$ $\rho_{gaz} < \rho_{air}$ et l'angle est donné par :

$$\tan\alpha = \frac{T_x}{T_y} = \frac{-(\rho_{air}V - m)a}{-(\rho_{air}V - m)g} = \frac{a}{g} \Rightarrow a = g\tan\alpha$$

3.8.8 Applications de la poussée d'Archimède

3. Ballon de foire retenu au plancher d'un chariot accéléré



- <u>Objet</u> : ballon
- <u>Forces</u> : poids $m\mathbf{g}$, tension du fil $\mathbf{T}$, poussée d'Archimède $\mathbf{F}_A$

$m\mathbf{g} + \mathbf{T} + \mathbf{F}_A = m\mathbf{a}$

$$\boxed{\Rightarrow \mathbf{T} = -m(\mathbf{g}-\mathbf{a}) - \mathbf{F}_A = (\rho_{air}V - m)(\mathbf{g}-\mathbf{a}) \quad (3.43)}$$

- Le fil est tendu si $\rho_{air}V\text{-}m > 0 \Rightarrow \rho_{air}V\text{-}\rho_{gaz}V > 0$.

$\Longrightarrow$ $\rho_{gaz} < \rho_{air}$ et l'angle est donné par :

$$\tan\alpha = \frac{T_x}{T_y} = \frac{-(\rho_{air}V - m)a}{-(\rho_{air}V - m)g} = \frac{a}{g} \Rightarrow a = g\tan\alpha$$

- On a ainsi réalisé un accéléromètre.

3.8.8 Applications de la poussée d'Archimède

Expérience :

3.8.8 Applications de la poussée d'Archimède

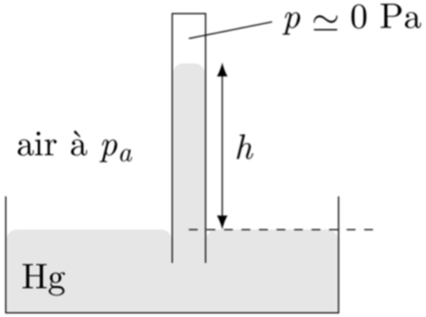
Expérience : Accéléromètre avec un ballon d'hélium

3.8.8 Applications de la poussée d'Archimède

Expérience : Accéléromètre avec un ballon d'hélium

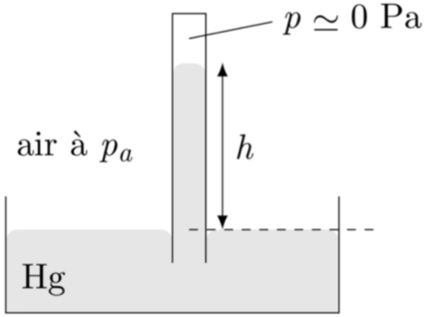
- Si la table est immobile, le fil du ballon est vertical. Si la table tourne, le ballon s'incline vers l'intérieur du cercle.
- On peut donc estimer l'accélération d'un référentiel tournant par rapport à la terre en mesurant l'angle formé par le fil par rapport à la verticale.

3.8.9 Unité de pression : le mm Hg



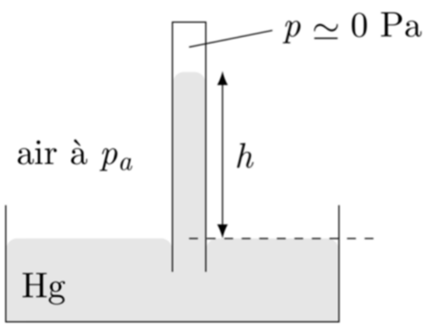
3.8.9 Unité de pression : le mm Hg

- La pression atmosphérique peut être donnée par la hauteur d'une colonne de liquide dans un tube.



3.8.9 *Unité de pression : le mm Hg*

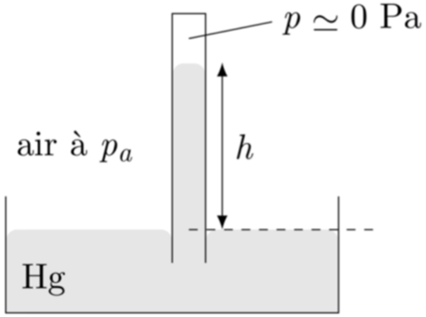
- La pression atmosphérique peut être donnée par la hauteur d'une colonne de liquide dans un tube.



- Un tube vide, fermé supérieurement, est plongé dans du mercure (Hg). Sous la pression de l'air ambiant p_a, le mercure monte dans le tube.
- La pression p_a est partout la même au niveau de l'interface air-mercure.

3.8.9 Unité de pression : le mm Hg

- La pression atmosphérique peut être donnée par la hauteur d'une colonne de liquide dans un tube.



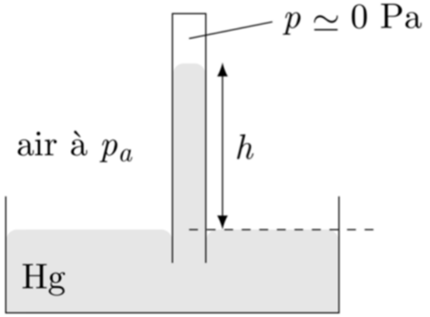
- Un tube vide, fermé supérieurement, est plongé dans du mercure (Hg). Sous la pression de l'air ambiant p_a, le mercure monte dans le tube.
- La pression p_a est partout la même au niveau de l'interface air-mercure.

- Sous la colonne de mercure,

$$\boxed{p_{Hg} = \rho_{Hg} g h = p_a \Leftrightarrow h = \frac{p_a}{\rho_{Hg} g} \quad (3.44)}$$

3.8.9 *Unité de pression : le mm Hg*

- La pression atmosphérique peut être donnée par la hauteur d'une colonne de liquide dans un tube.



- Un tube vide, fermé supérieurement, est plongé dans du mercure (Hg). Sous la pression de l'air ambiant p_a, le mercure monte dans le tube.
- La pression p_a est partout la même au niveau de l'interface air-mercure.

- Sous la colonne de mercure,

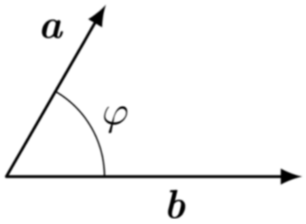
$$\boxed{p_{Hg} = \rho_{Hg} g h = p_a \Leftrightarrow h = \frac{p_a}{\rho_{Hg} g} \quad (3.44)}$$

- À une atmosphère, la hauteur de la colonne est de 760 mm, d'où la relation :

$$\boxed{\frac{h}{760\,\text{mm}} = \frac{p_a}{1\,\text{atm}} \quad (3.45)}$$

3.9 Deux intermèdes

3.9.1 Produit scalaire

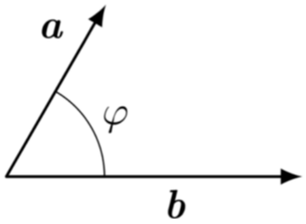


Propriétés :

3.9.1 Produit scalaire

- Soient deux vecteurs **a** et **b**. Leur produit scalaire s'écrit,

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\varphi \quad (3.46)}$$

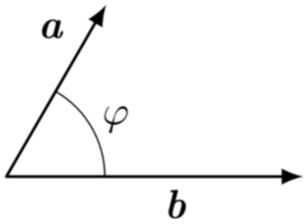


Propriétés :

3.9.1 Produit scalaire

- Soient deux vecteurs **a** et **b**. Leur produit scalaire s'écrit,

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\varphi \quad (3.46)}$$



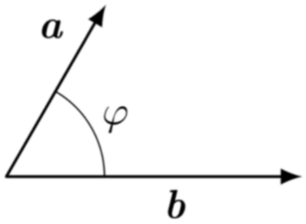
où φ est l'angle formé par **a** et **b**.

Propriétés :

3.9.1 Produit scalaire

- Soient deux vecteurs **a** et **b**. Leur produit scalaire s'écrit,

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\left\|\mathbf{a}\right\|\left\|\mathbf{b}\right\|\cos\varphi \quad (3.46)}$$



où φ est l'angle formé par **a** et **b**.

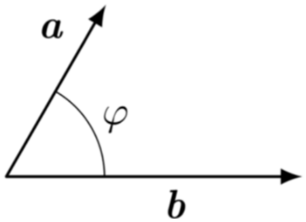
- Le produit scalaire est une mesure du parallélisme de deux vecteurs.

Propriétés :

3.9.1 Produit scalaire

- Soient deux vecteurs **a** et **b**. Leur produit scalaire s'écrit,

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\varphi \quad (3.46)}$$



où φ est l'angle formé par **a** et **b**.

- Le produit scalaire est une mesure du parallélisme de deux vecteurs.

Propriétés :

- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$
- Si l'angle est aigu : $\varphi \in\ ]-\pi/2, \pi/2[\ \Leftrightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} > 0$
- Si l'angle est obtus : $\varphi \in\ ]\pi/2, 3\pi/2[\ \Leftrightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} < 0$
- Si **a** et **b** sont orthogonaux : $\varphi = \pm\pi/2 \Leftrightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$
- Si $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b} \Rightarrow \|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|$ et $\cos\varphi = \cos(0) = 1 \Rightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2$

3.9.1 Produit scalaire et 3.9.2 dérivée temporelle d'un produit

Cas particulier :

Dérivée temporelle d'un produit

3.9.1 Produit scalaire et 3.9.2 dérivée temporelle d'un produit

Cas particulier :

$\|\mathbf{b}\| = 1 \Rightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\cos\varphi$ est la projection (avec signe) du vecteur **a** le long du vecteur unitaire **b**. On peut ainsi obtenir les composantes d'un vecteur **a** dans un repère orthonormé $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ par le produit scalaire : $a_x = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_x$ et $a_y = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_y$.

Dérivée temporelle d'un produit

3.9.1 Produit scalaire et 3.9.2 dérivée temporelle d'un produit

Cas particulier :

$\|\mathbf{b}\| = 1 \Rightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\cos\varphi$ est la projection (avec signe) du vecteur **a** le long du vecteur unitaire **b**. On peut ainsi obtenir les composantes d'un vecteur **a** dans un repère orthonormé $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ par le produit scalaire : $a_x = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_x$ et $a_y = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_y$.

Dérivée temporelle d'un produit

La dérivée temporelle d'un produit (algébrique, scalaire, vectoriel) se calcule comme suit :

3.9.1 Produit scalaire et 3.9.2 dérivée temporelle d'un produit

Cas particulier :

$\|\mathbf{b}\| = 1 \Rightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\cos\varphi$ est la projection (avec signe) du vecteur **a** le long du vecteur unitaire **b**. On peut ainsi obtenir les composantes d'un vecteur **a** dans un repère orthonormé $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ par le produit scalaire : $a_x = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_x$ et $a_y = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_y$.

Dérivée temporelle d'un produit

La dérivée temporelle d'un produit (algébrique, scalaire, vectoriel) se calcule comme suit :

$$\frac{d}{dt}(AB) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta(AB)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[A(t+\Delta t)B(t+\Delta t) - A(t)B(t)\right]$$

$$\begin{aligned}\Delta(AB) &= A(t+\Delta t)B(t+\Delta t) - A(t)B(t+\Delta t) + A(t)B(t+\Delta t) - A(t)B(t)\\ &= \left(A(t+\Delta t) - A(t)\right)B(t+\Delta t) + A(t)\left(B(t+\Delta t) - B(t)\right)\\ &= \Delta A B(t+\Delta t) + A(t)\Delta B\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}(AB) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta(AB)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t}\overbrace{B(t+\Delta t)}^{\to B(t)} + \lim_{\Delta t\to 0}A(t)\frac{\Delta B}{\Delta t}$$

3.9.1 Produit scalaire et 3.9.2 dérivée temporelle d'un produit

Cas particulier :

$\|\mathbf{b}\| = 1 \Rightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\cos\varphi$ est la projection (avec signe) du vecteur **a** le long du vecteur unitaire **b**. On peut ainsi obtenir les composantes d'un vecteur **a** dans un repère orthonormé $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ par le produit scalaire : $a_x = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_x$ et $a_y = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_y$.

Dérivée temporelle d'un produit

La dérivée temporelle d'un produit (algébrique, scalaire, vectoriel) se calcule comme suit :

$$\frac{d}{dt}(AB) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta(AB)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[A(t+\Delta t)B(t+\Delta t) - A(t)B(t)\right]$$

$$\begin{aligned}\Delta(AB) &= A(t+\Delta t)B(t+\Delta t) - A(t)B(t+\Delta t) + A(t)B(t+\Delta t) - A(t)B(t)\\ &= \left(A(t+\Delta t) - A(t)\right)B(t+\Delta t) + A(t)\left(B(t+\Delta t) - B(t)\right)\\ &= \Delta A B(t+\Delta t) + A(t)\Delta B\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}(AB) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta(AB)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t}\overbrace{B(t+\Delta t)}^{\to B(t)} + \lim_{\Delta t\to 0}A(t)\frac{\Delta B}{\Delta t}$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{d}{dt}(AB) = \dot{A}B + A\dot{B} \quad (3.47)}$$

3.9.2 Dérivée temporelle d’un produit

Remarque :

Remarque :

3.9.2 Dérivée temporelle d'un produit

- Pour un vecteur $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_t$: $\boxed{\dfrac{d}{dt}\left(v\mathbf{e}_t\right) = \dot{v}\mathbf{e}_t + v\dot{\mathbf{e}}_t \quad (3.48)}$

Remarque :

Remarque :

3.9.2 Dérivée temporelle d'un produit

- Pour un vecteur $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_t$:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(v\mathbf{e}_t\right) = \dot{v}\mathbf{e}_t + v\dot{\mathbf{e}}_t \quad (3.48)}$$

Remarque :

Le premier terme $\dot{v}\mathbf{e}_t$ correspond à la dérivée du vecteur $\mathbf{v}$ lorsque sa norme v varie et son orientation reste constante. Le deuxième terme $v\dot{\mathbf{e}}_t$ correspond à la dérivée du vecteur $\mathbf{v}$ lorsque son orientation varie mais sa norme v reste constante.

Remarque :

3.9.2 Dérivée temporelle d'un produit

- Pour un vecteur $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_t$: $\boxed{\dfrac{d}{dt}\left(v\mathbf{e}_t\right) = \dot{v}\mathbf{e}_t + v\dot{\mathbf{e}}_t \quad (3.48)}$

Remarque :

Le premier terme $\dot{v}\mathbf{e}_t$ correspond à la dérivée du vecteur $\mathbf{v}$ lorsque sa norme v varie et son orientation reste constante. Le deuxième terme $v\dot{\mathbf{e}}_t$ correspond à la dérivée du vecteur $\mathbf{v}$ lorsque son orientation varie mais sa norme v reste constante.

- Pour le carré de la norme du vecteur $\mathbf{v}$:

$$\boxed{\frac{d}{dt}v^2 = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right) = \dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}} = 2\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}} \quad (3.49)}$$

Remarque :

3.9.2 Dérivée temporelle d'un produit

- Pour un vecteur $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_t$: $\boxed{\dfrac{d}{dt}\left(v\mathbf{e}_t\right) = \dot{v}\mathbf{e}_t + v\dot{\mathbf{e}}_t \quad (3.48)}$

Remarque :

Le premier terme $\dot{v}\mathbf{e}_t$ correspond à la dérivée du vecteur $\mathbf{v}$ lorsque sa norme v varie et son orientation reste constante. Le deuxième terme $v\dot{\mathbf{e}}_t$ correspond à la dérivée du vecteur $\mathbf{v}$ lorsque son orientation varie mais sa norme v reste constante.

- Pour le carré de la norme du vecteur $\mathbf{v}$:

$$\boxed{\frac{d}{dt}v^2 = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right) = \dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}} = 2\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}} \quad (3.49)}$$

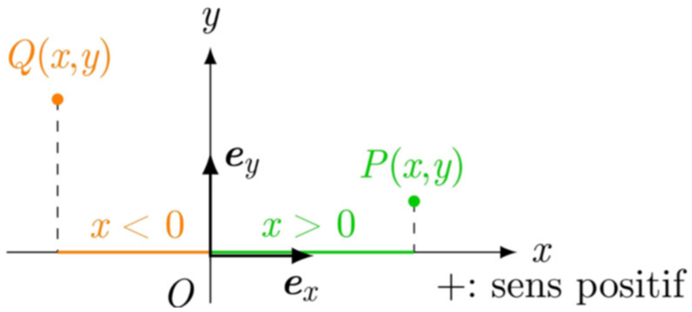
Remarque :

Lorsque la norme du vecteur $\mathbf{v}$ est constante et $\dot{\mathbf{v}} \neq \mathbf{0}$, le vecteur $\mathbf{v}$ est orthogonal à sa dérivée temporelle $\dot{\mathbf{v}}$, c'est-à-dire que $\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}} = 0$.

3.10 Repère lié au mouvement

3.10.1 Abscisse curviligne, repère

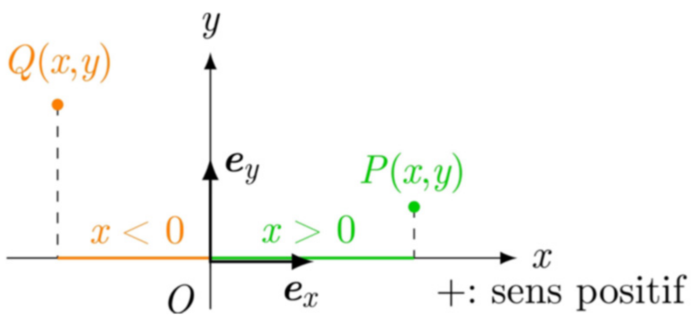
Rappel :



Généralisation à une courbe Γ du plan :

3.10.1 Abscisse curviligne, repère

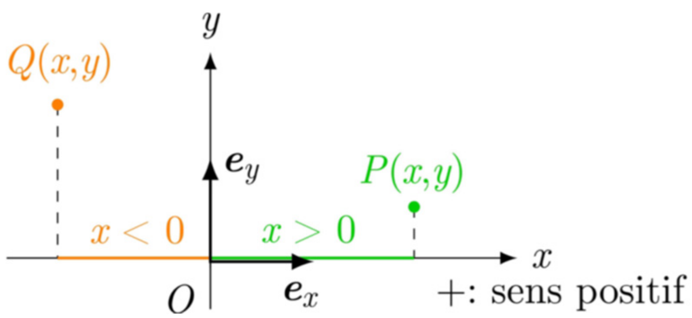
Rappel : Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$)



Généralisation à une courbe Γ du plan :

3.10.1 Abscisse curviligne, repère

Rappel : Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$)

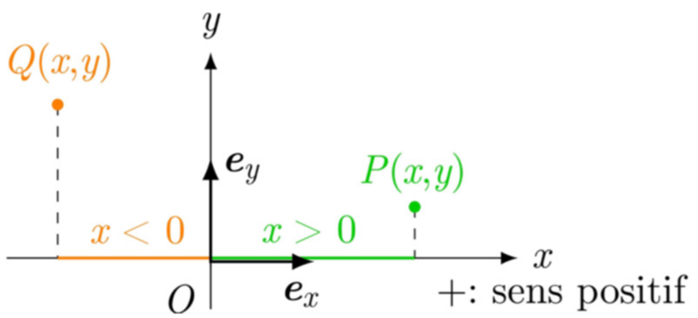


- x est la coordonnée d'abscisse et $\mathbf{e}_x$ donne le sens positif.
- $x > 0$: P est devant O selon $\mathbf{e}_x$.
- $x < 0$: Q est derrière O selon $\mathbf{e}_x$.

Généralisation à une courbe Γ du plan :

3.10.1 Abscisse curviligne, repère

Rappel : Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$)



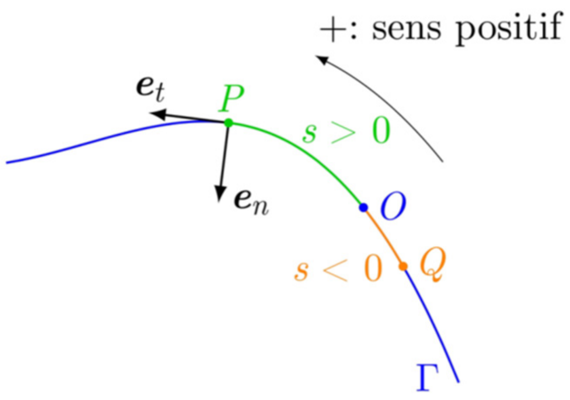
- x est la coordonnée d'abscisse et $\mathbf{e}_x$ donne le sens positif.
- $x > 0$: P est devant O selon $\mathbf{e}_x$.
- $x < 0$: Q est derrière O selon $\mathbf{e}_x$.

Généralisation à une courbe Γ du plan :

On prend un point O sur Γ comme origine et on choisit un sens positif de parcours. La position d'un objet sur Γ est donnée par la longueur s (avec signe) mesurée le long de Γ.

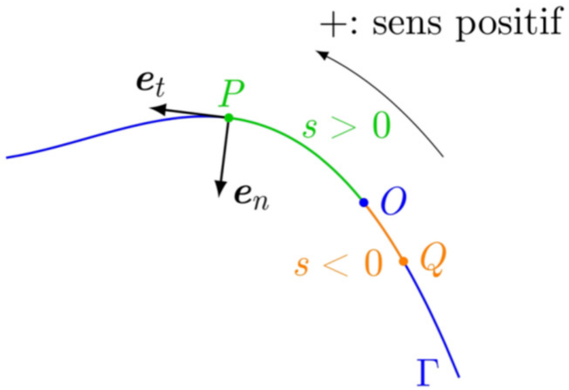
3.10.1 Abscisse curviligne, repère

Abscisse curviligne :



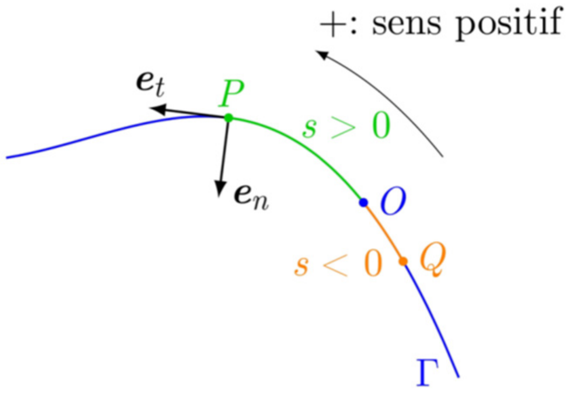
3.10.1 Abscisse curviligne, repère

Abscisse curviligne : Distance s parcourue par le point matériel le long de la courbe Γ.



3.10.1 Abscisse curviligne, repère

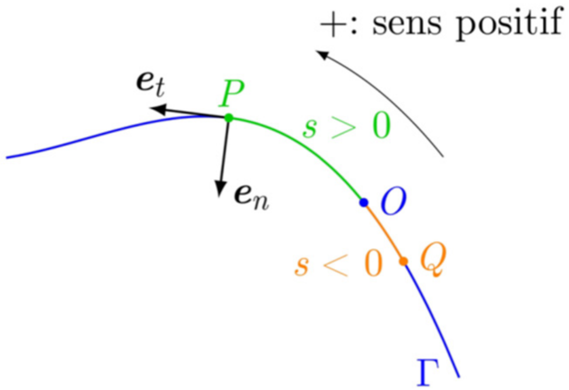
Abscisse curviligne : Distance s parcourue par le point matériel le long de la courbe Γ.



- s est l'abscisse curviligne.
- $s > 0$: P est devant O selon $\mathbf{e}_t$.
- $s < 0$: Q est derrière O selon $\mathbf{e}_t$.

3.10.1 Abscisse curviligne, repère

Abscisse curviligne : Distance s parcourue par le point matériel le long de la courbe Γ.



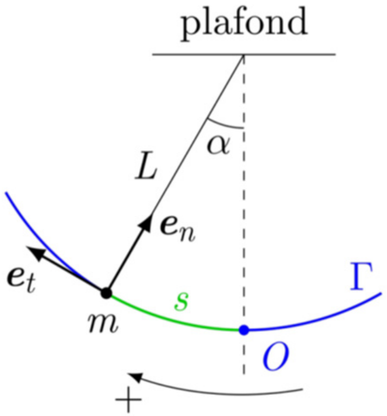
- s est l'abscisse curviligne.
- $s > 0$: P est devant O selon $\mathbf{e}_t$.
- $s < 0$: Q est derrière O selon $\mathbf{e}_t$.

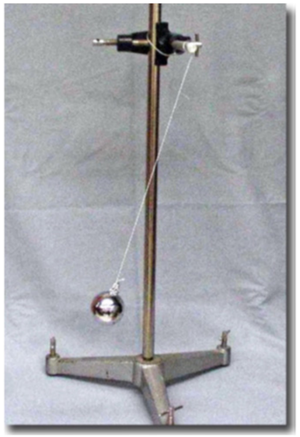
- On définit un repère orthonormé mobile lié au point matériel P $(P, \mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n)$ qui se déplace avec P le long de Γ.

1. $\mathbf{e}_t$ est un vecteur normé, tangent à Γ et donnant le sens positif de parcours.
2. $\mathbf{e}_n$ est un vecteur normé, normal à Γ et formant en P un angle $\pi/2$ avec $\mathbf{e}_t$.

3.10.1 Abscisse curviligne, repère et 3.10.2 vitesse scalaire

Exemple :

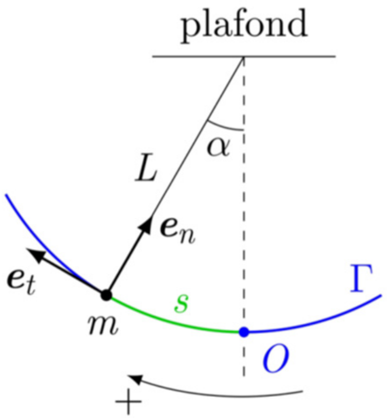


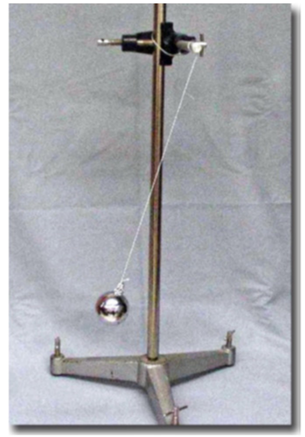


Vitesse scalaire

3.10.1 Abscisse curviligne, repère et 3.10.2 vitesse scalaire

Exemple : Pendule simple

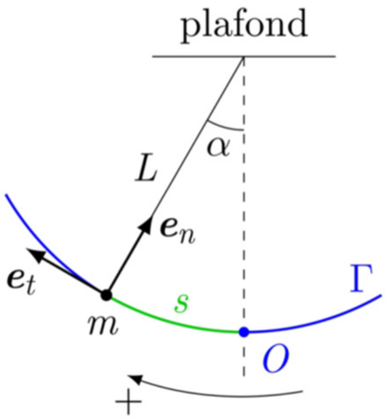




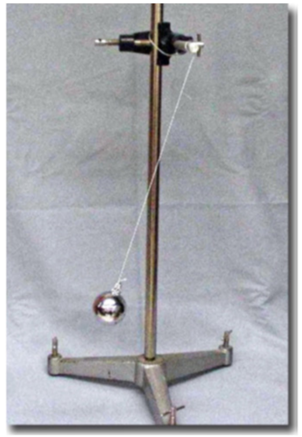
Vitesse scalaire

3.10.1 Abscisse curviligne, repère et 3.10.2 vitesse scalaire

Exemple : Pendule simple



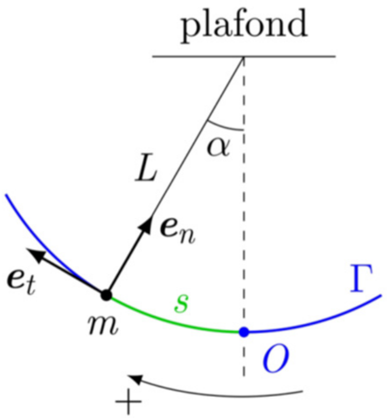
- Abscisse curviligne, $s = L\alpha$
- $\alpha > 0$: gauche
- $\alpha < 0$: droite



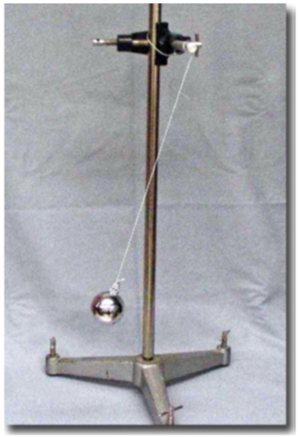
Vitesse scalaire

3.10.1 Abscisse curviligne, repère et 3.10.2 vitesse scalaire

Exemple : Pendule simple



- Abscisse curviligne, $s = L\alpha$
- $\alpha > 0$: gauche
- $\alpha < 0$: droite



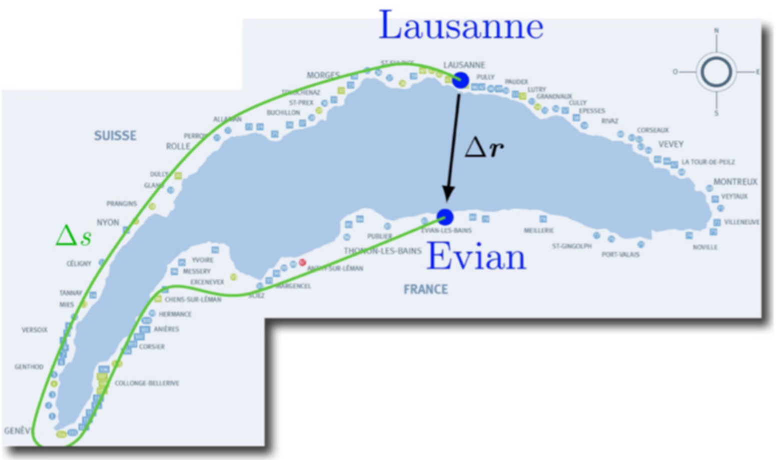
Vitesse scalaire

En tout point de la trajectoire Γ d'un objet, la vitesse est toujours tangente à la trajectoire et s'écrit : $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_t$ où v est la composante scalaire de la vitesse le long de la trajectoire Γ et $\mathbf{e}_t$ est le vecteur unitaire tangent.

3.10.2 Vitesse scalaire

Remarque :

Exemple :



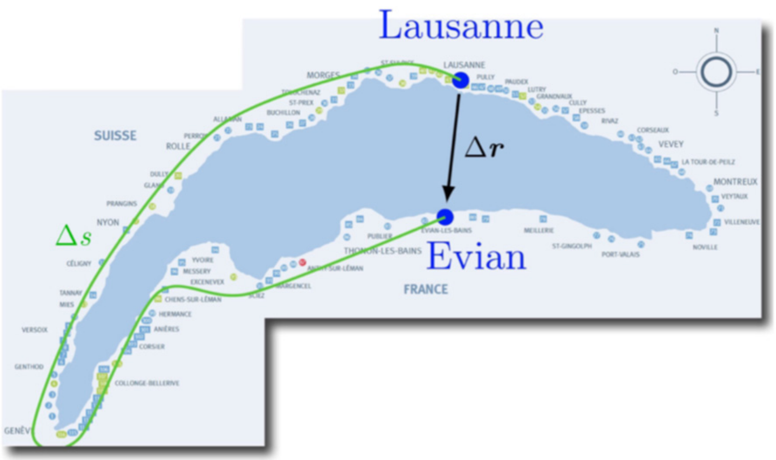
3.10.2 Vitesse scalaire

- La vitesse scalaire est définie comme la dérivée temporelle de l'abscisse curviligne :

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \dot{s} \quad (3.50)}$$

Remarque :

Exemple :



3.10.2 Vitesse scalaire

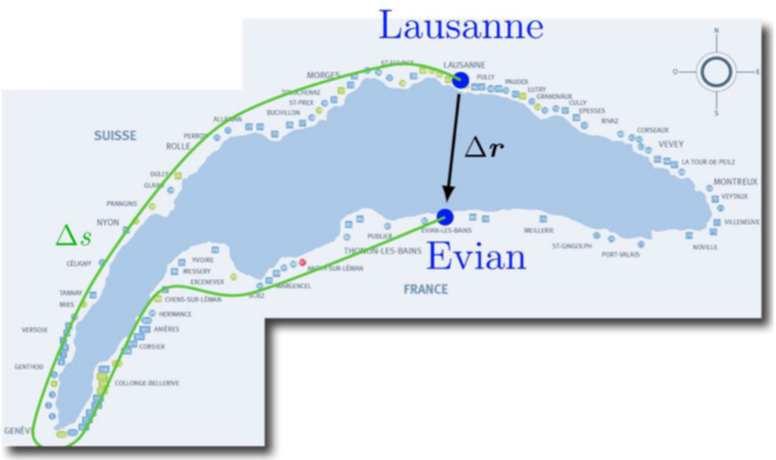
- La vitesse scalaire est définie comme la dérivée temporelle de l'abscisse curviligne :

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \dot{s} \quad (3.50)}$$

- Unité physique (SI) : [$m.s^{-1}$]

Remarque :

Exemple :



3.10.2 Vitesse scalaire

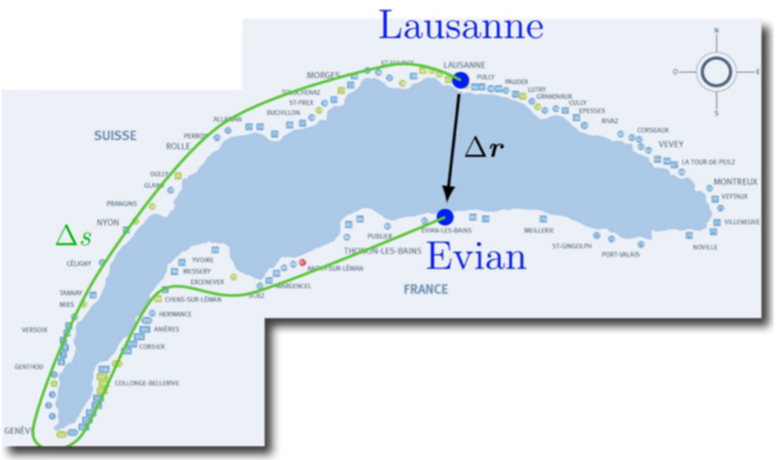
- La vitesse scalaire est définie comme la dérivée temporelle de l'abscisse curviligne :

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \dot{s} \quad (3.50)}$$

- Unité physique (SI) : [m.s^{-1}]

Remarque : $\|\mathbf{v}\| = v$ (vitesse instantanée)

Exemple :



3.10.2 Vitesse scalaire

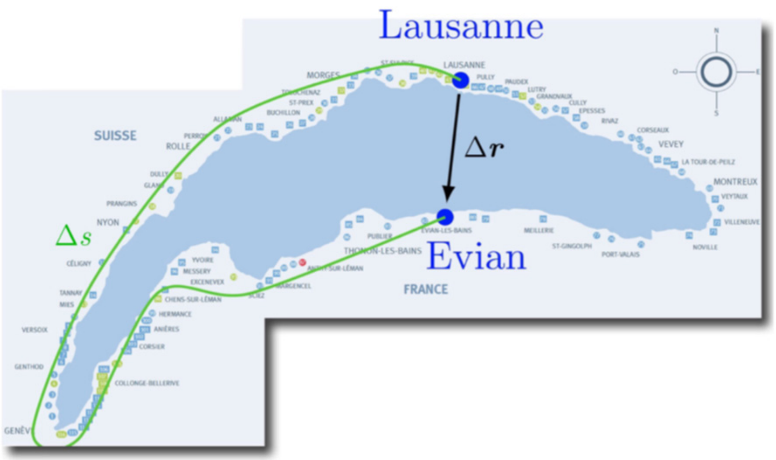
- La vitesse scalaire est définie comme la dérivée temporelle de l'abscisse curviligne :

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \dot{s} \quad (3.50)}$$

- Unité physique (SI) : [m.s^{-1}]

Remarque : $\|\mathbf{v}\| = v$ (vitesse instantanée)

Exemple : trajet Lausanne-Évian



3.10.2 Vitesse scalaire

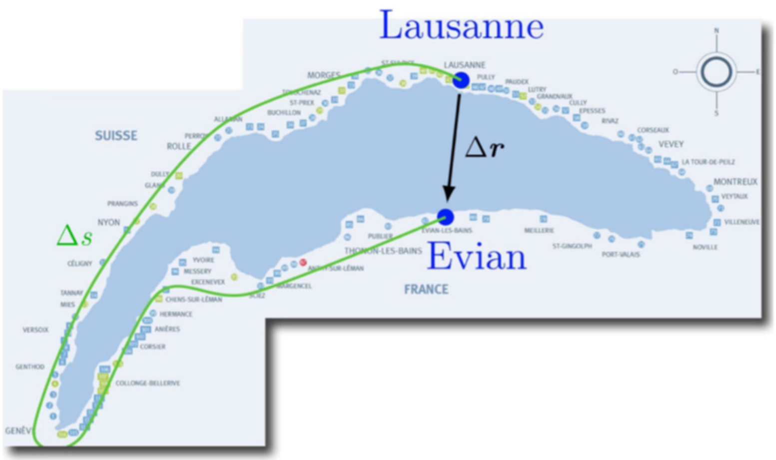
- La vitesse scalaire est définie comme la dérivée temporelle de l'abscisse curviligne :

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \dot{s} \quad (3.50)}$$

- Unité physique (SI) : [$m.s^{-1}$]

Remarque : $\|\mathbf{v}\| = v$ (vitesse instantanée)

Exemple : trajet Lausanne-Évian



- Vitesse moyenne :

$$\|\mathbf{v}_{\text{moy}}\| = \left\|\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}\right\| = \frac{15\,\text{km}}{1,5\,\text{h}} = 10\,\text{km/h}$$

3.10.2 Vitesse scalaire

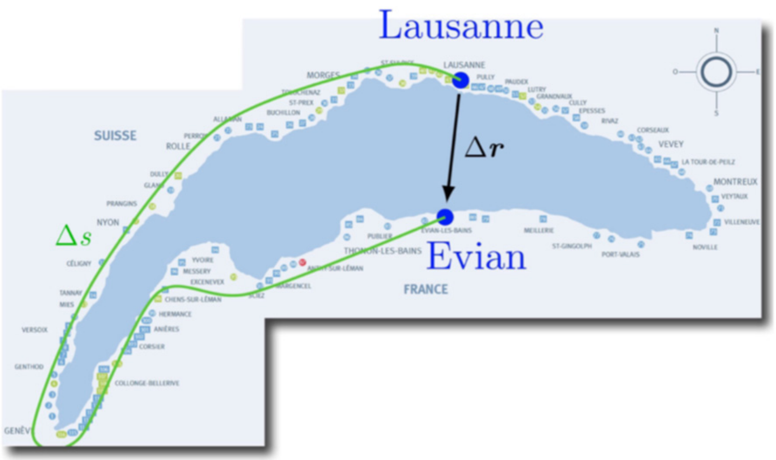
- La vitesse scalaire est définie comme la dérivée temporelle de l'abscisse curviligne :

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \dot{s} \quad (3.50)}$$

- Unité physique (SI) : [m.s^{-1}]

Remarque : $\|\mathbf{v}\| = v$ (vitesse instantanée)

Exemple : trajet Lausanne-Évian



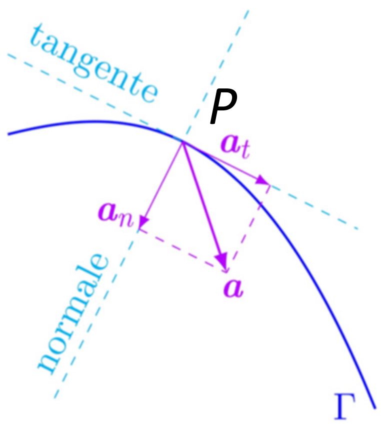
- Vitesse moyenne :

$$\|\mathbf{v}_{\text{moy}}\| = \left\|\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}\right\| = \frac{15\,\text{km}}{1,5\,\text{h}} = 10\,\text{km/h}$$

- Vitesse scalaire moyenne :

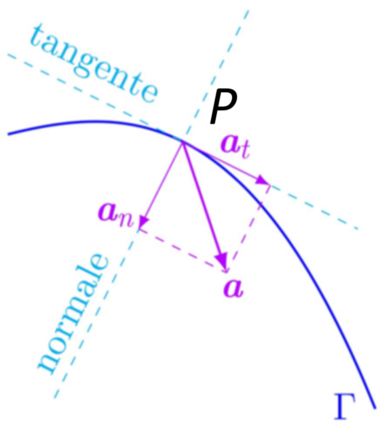
$$v_{\text{moy}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{120\,\text{km}}{1,5\,\text{h}} = 80\,\text{km/h} \quad \Rightarrow \|\mathbf{v}_{\text{moy}}\| \neq v_{\text{moy}}$$

3.10.3 Accélérations tangentielle et normale



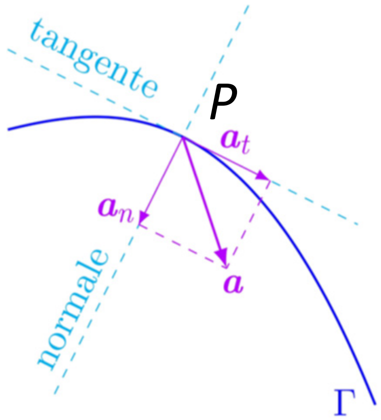
3.10.3 Accélérations tangentielle et normale

En tout point P de la trajectoire Γ d'un objet, l'accélération se décompose dans le repère $(P, \mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n)$ comme suit :



3.10.3 Accélérations tangentielle et normale

En tout point P de la trajectoire Γ d'un objet, l'accélération se décompose dans le repère $(P, \mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n)$ comme suit :

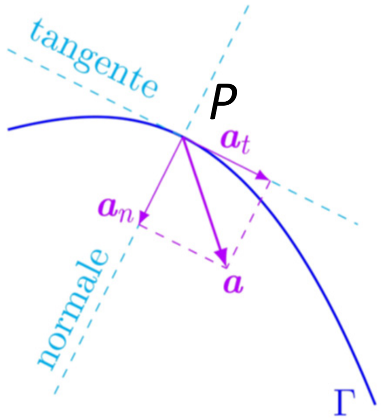


- Accélération :

$$\boxed{\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n \quad (3.51)}$$

3.10.3 Accélérations tangentielle et normale

En tout point P de la trajectoire Γ d'un objet, l'accélération se décompose dans le repère $(P, \mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n)$ comme suit :



- Accélération :

$$\boxed{\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n \quad (3.51)}$$

- Accélération tangentielle :

$\mathbf{a}_t = a_t\mathbf{e}_t = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_t)\mathbf{e}_t$ où $\|\mathbf{e}_t\| = 1$

- Accélération normale :

$\mathbf{a}_n = a_n\mathbf{e}_n = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_n)\mathbf{e}_n$ où $\|\mathbf{e}_n\| = 1$

3.10.3 Accélérations tangentielle et normale

3.10.3 Accélérations tangentielle et normale

1. L'accélération tangentielle scalaire est l'accélération le long de la trajectoire et donc la dérivée temporelle de la vitesse scalaire par rapport au temps.

$$\boxed{a_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \dot{v} = \ddot{s} \quad (3.52)}$$

3.10.3 Accélérations tangentielle et normale

1. L'accélération tangentielle scalaire est l'accélération le long de la trajectoire et donc la dérivée temporelle de la vitesse scalaire par rapport au temps.

$$\boxed{a_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \dot{v} = \ddot{s} \quad (3.52)}$$

- Unité physique (SI) : [m.s^{-2}]

3.10.3 Accélérations tangentielle et normale

1. L'accélération tangentielle scalaire est l'accélération le long de la trajectoire et donc la dérivée temporelle de la vitesse scalaire par rapport au temps.

$$\boxed{a_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \dot{v} = \ddot{s} \quad (3.52)}$$

- Unité physique (SI) : [m.s^{-2}]

- $a_t > 0$: v augmente (l'objet va plus vite dans le sens de $\mathbf{e}_t$).
- $a_t < 0$: v diminue (l'objet va plus lentement dans le sens de $\mathbf{e}_t$).

3.10.3 Accélérations tangentielle et normale

1. L'accélération tangentielle scalaire est l'accélération le long de la trajectoire et donc la dérivée temporelle de la vitesse scalaire par rapport au temps.

$$\boxed{a_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \dot{v} = \ddot{s} \quad (3.52)}$$

- Unité physique (SI) : [m.s^-2^]

- $a_t > 0$: v augmente (l'objet va plus vite dans le sens de $\mathbf{e}_t$).
- $a_t < 0$: v diminue (l'objet va plus lentement dans le sens de $\mathbf{e}_t$).

2. L'accélération normale scalaire est la dérivée temporelle de la direction de la vitesse **v** par rapport au temps.

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{R} \quad (3.53)}$$

3.10.3 Accélérations tangentielle et normale

1. L'accélération tangentielle scalaire est l'accélération le long de la trajectoire et donc la dérivée temporelle de la vitesse scalaire par rapport au temps.

$$\boxed{a_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \dot{v} = \ddot{s} \quad (3.52)}$$

- Unité physique (SI) : [m.s^{-2}]

- $a_t > 0$: v augmente (l'objet va plus vite dans le sens de $\mathbf{e}_t$).
- $a_t < 0$: v diminue (l'objet va plus lentement dans le sens de $\mathbf{e}_t$).

2. L'accélération normale scalaire est la dérivée temporelle de la direction de la vitesse $\mathbf{v}$ par rapport au temps.

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{R} \quad (3.53)}$$

où R est le rayon de courbure de la trajectoire à un instant donné (rayon du cercle osculateur passant par trois points infiniment proches de la trajectoire).

3.10.3 Accélérations tangentielle et normale

Remarque :

3.10.3 Accélérations tangentielle et normale

- Unité physique (SI) : [$m.s^{-2}$]

- L'accélération normale est toujours orientée vers l'intérieur du virage.

Remarque :

3.10.3 Accélérations tangentielle et normale

- Unité physique (SI) : [m.s^{-2}]

- L'accélération normale est toujours orientée vers l'intérieur du virage.

Remarque :

Les relations (3.52) et (3.53) sont une conséquence des intermèdes **3.9**, comme nous allons le montrer.

En effet, l'accélération s'écrit comme : $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dfrac{d}{dt}\left(v\mathbf{e}_t\right) = \dot{v}\mathbf{e}_t + v\dot{\mathbf{e}}_t$

3.10.3 Accélérations tangentielle et normale

- Unité physique (SI) : [m.s^{-2}]

- L'accélération normale est toujours orientée vers l'intérieur du virage.

Remarque :

Les relations (3.52) et (3.53) sont une conséquence des intermèdes **3.9**, comme nous allons le montrer.

En effet, l'accélération s'écrit comme : $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt}\left(v\mathbf{e}_t\right) = \dot{v}\mathbf{e}_t + v\dot{\mathbf{e}}_t$

Puisque $\left\|\mathbf{e}_t\right\|^2 = 1; \frac{d}{dt}\left\|\mathbf{e}_t\right\|^2 = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_t\right) = \dot{\mathbf{e}}_t \cdot \mathbf{e}_t + \mathbf{e}_t \cdot \dot{\mathbf{e}}_t = 2\mathbf{e}_t \cdot \dot{\mathbf{e}}_t = 0,$

3.10.3 Accélérations tangentielle et normale

- Unité physique (SI) : [m.s^{-2}]
- L'accélération normale est toujours orientée vers l'intérieur du virage.

Remarque :

Les relations (3.52) et (3.53) sont une conséquence des intermèdes **3.9**, comme nous allons le montrer.

En effet, l'accélération s'écrit comme : $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt}\left(v\mathbf{e}_t\right) = \dot{v}\mathbf{e}_t + v\dot{\mathbf{e}}_t$

Puisque $\left\|\mathbf{e}_t\right\|^2 = 1; \frac{d}{dt}\left\|\mathbf{e}_t\right\|^2 = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_t\right) = \dot{\mathbf{e}}_t \cdot \mathbf{e}_t + \mathbf{e}_t \cdot \dot{\mathbf{e}}_t = 2\mathbf{e}_t \cdot \dot{\mathbf{e}}_t = 0,$

La dérivée temporelle $\dot{\mathbf{e}}_t$ est donc soit nulle, soit normale à $\mathbf{e}_t$. Ainsi, $\mathbf{a}_t = \dot{v}\mathbf{e}_t$ et $\mathbf{a}_n = v\dot{\mathbf{e}}_t$

3.10.3 Accélérations tangentielle et normale

- Unité physique (SI) : [m.s^{-2}]
- L'accélération normale est toujours orientée vers l'intérieur du virage.

Remarque :

Les relations (3.52) et (3.53) sont une conséquence des intermèdes **3.9**, comme nous allons le montrer.

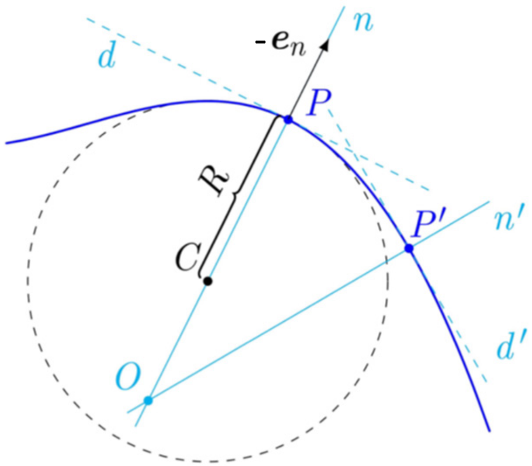
En effet, l'accélération s'écrit comme : $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt}\left(v\mathbf{e}_t\right) = \dot{v}\mathbf{e}_t + v\dot{\mathbf{e}}_t$

Puisque $\left\|\mathbf{e}_t\right\|^2 = 1; \frac{d}{dt}\left\|\mathbf{e}_t\right\|^2 = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_t\right) = \dot{\mathbf{e}}_t \cdot \mathbf{e}_t + \mathbf{e}_t \cdot \dot{\mathbf{e}}_t = 2\mathbf{e}_t \cdot \dot{\mathbf{e}}_t = 0,$

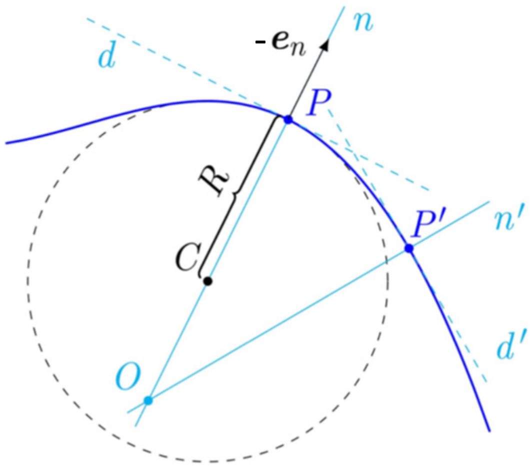
La dérivée temporelle $\dot{\mathbf{e}}_t$ est donc soit nulle, soit normale à $\mathbf{e}_t$. Ainsi, $\mathbf{a}_t = \dot{v}\mathbf{e}_t$ et $\mathbf{a}_n = v\dot{\mathbf{e}}_t$

On considère maintenant un objet sur une trajectoire à deux instants proches t et $t + \Delta t$:

3.10.3 Accélérations tangentielle et normale

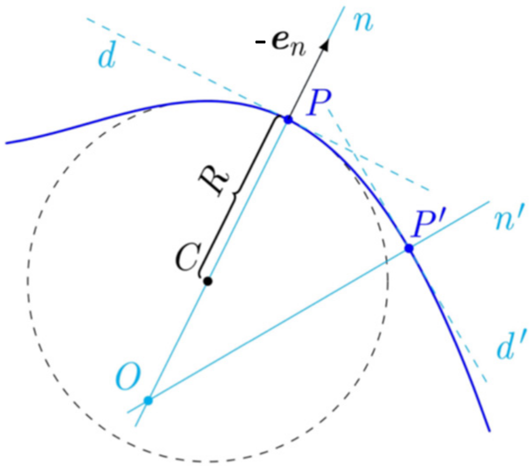


3.10.3 Accélérations tangentielle et normale



- À l'instant t : position **r** = **OP**, tangente d, normale n et vitesse **v**.
- Le cercle osculateur est de centre C et de rayon R.
- À l'instant $t' = t + \Delta t$: position **r'** = **OP'**, tangente d', normale n' et vitesse **v'**.

3.10.3 Accélérations tangentielle et normale

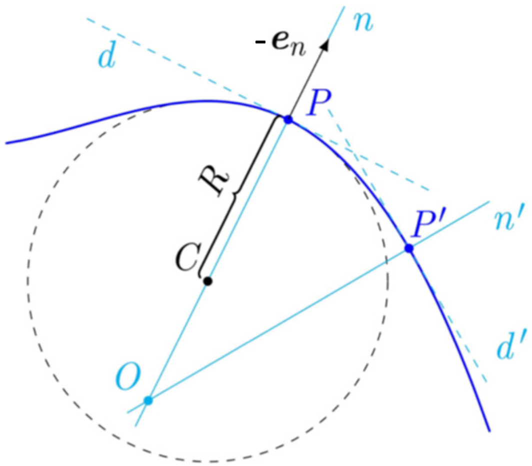


- À l'instant t : position $\mathbf{r}$ = **OP**, tangente d, normale n et vitesse **v**.
- Le cercle osculateur est de centre C et de rayon R.
- À l'instant $t' = t + \Delta t$: position $\mathbf{r}'$ = **OP'**, tangente d', normale n' et vitesse $\mathbf{v}'$.

- L'intersection des normales n et n' définit l'origine O. Ainsi, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{v}'\cdot\mathbf{r}' = 0$.
- Alors, avec $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ et $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$

$$\mathbf{v}\cdot\Delta\mathbf{r} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{r}' - \underbrace{\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}}_{=0} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{r}' - \underbrace{\mathbf{v}'\cdot\mathbf{r}'}_{=0} = -\Delta\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}'$$

3.10.3 Accélérations tangentielle et normale



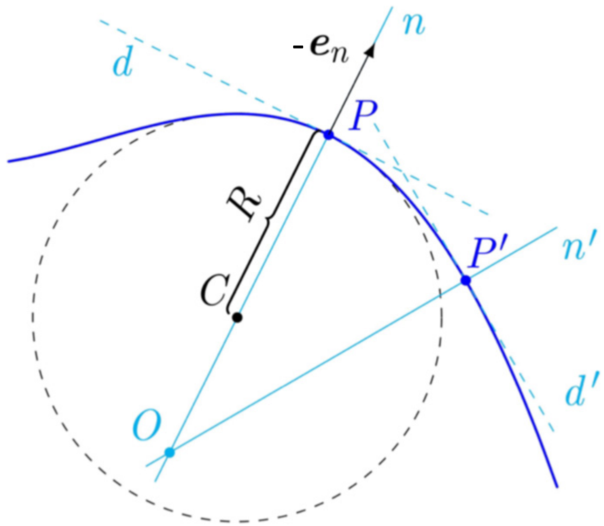
- À l'instant t : position $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$, tangente d, normale n et vitesse $\mathbf{v}$.
- Le cercle osculateur est de centre C et de rayon R.
- À l'instant $t' = t + \Delta t$: position $\mathbf{r}' = \mathbf{OP}'$, tangente d', normale n' et vitesse $\mathbf{v}'$.

- L'intersection des normales n et n' définit l'origine O. Ainsi, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{v}'\cdot\mathbf{r}' = 0$.
- Alors, avec $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}'-\mathbf{r}$ et $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}'-\mathbf{v}$

$$\mathbf{v}\cdot\Delta\mathbf{r} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{r}' - \underbrace{\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}}_{=0} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{r}' - \underbrace{\mathbf{v}'\cdot\mathbf{r}'}_{=0} = -\Delta\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}'$$

- En divisant par Δt, on obtient : $\mathbf{v}\cdot\dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = -\dfrac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}\cdot\mathbf{r}'$

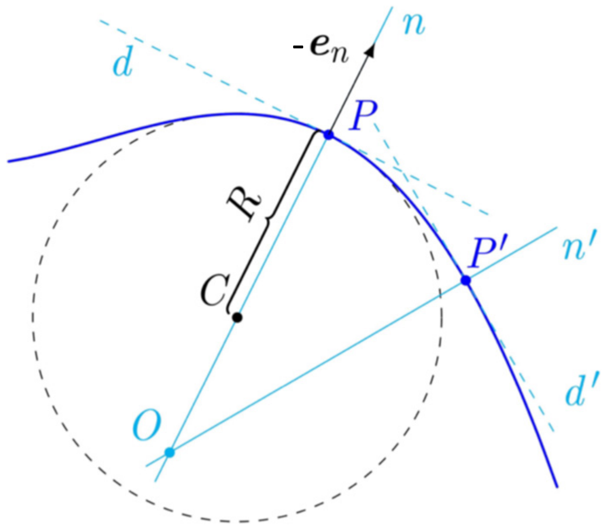
3.10.3 Accélérations tangentielle et normale



3.10.3 Accélérations tangentielle et normale

- Dans la limite d'un déplacement infinitésimal,

$$\boxed{\lim_{\Delta t\to 0}\mathbf{v}\cdot\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}=-\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}\cdot\mathbf{r}' \quad (3.53\text{b})} \quad \text{où} \quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}=\mathbf{v}; \quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}=\mathbf{a}; \quad \lim_{\Delta t\to 0}\mathbf{r}'(t+\Delta t)=\mathbf{r}(t)$$



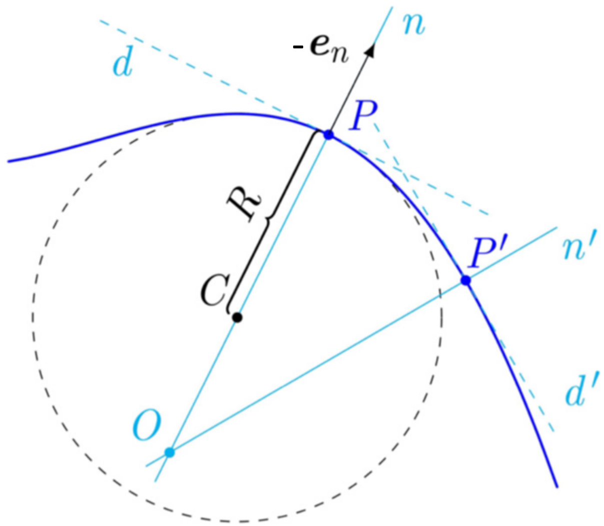
3.10.3 Accélérations tangentielle et normale

- Dans la limite d'un déplacement infinitésimal,

$$\boxed{\lim_{\Delta t\to 0} \mathbf{v}\cdot\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}\cdot\mathbf{r}' \quad (3.53\text{b})} \quad \text{où} \quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \mathbf{v}; \quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \mathbf{a}; \quad \lim_{\Delta t\to 0}\mathbf{r}'(t+\Delta t) = \mathbf{r}(t)$$

De plus, dans la limite d'un déplacement infinitésimal, le point *P'* se trouve sur le cercle osculateur passant par *P*. Ainsi, l'origine coïncide avec le centre du cercle osculateur, i.e., $O \equiv C$,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\mathbf{r}' = \mathbf{r} = \mathbf{CP} = -R\mathbf{e}_n$$



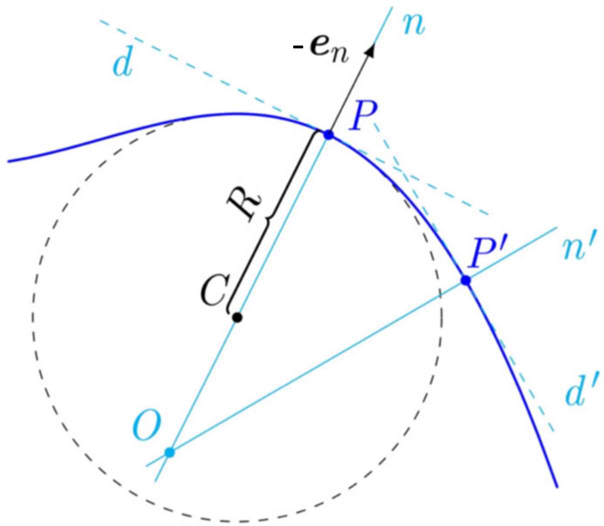
3.10.3 Accélérations tangentielle et normale

- Dans la limite d'un déplacement infinitésimal,

$$\boxed{\lim_{\Delta t\to 0}\mathbf{v}\cdot\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}=-\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}\cdot\mathbf{r}'\quad(3.53\text{b})}\quad \text{où}\quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}=\mathbf{v};\quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}=\mathbf{a};\quad \lim_{\Delta t\to 0}\mathbf{r}'(t+\Delta t)=\mathbf{r}(t)$$

De plus, dans la limite d'un déplacement infinitésimal, le point *P'* se trouve sur le cercle osculateur passant par *P*. Ainsi, l'origine coïncide avec le centre du cercle osculateur, i.e., $O\equiv C$,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\mathbf{r}'=\mathbf{r}=\mathbf{CP}=-R\mathbf{e}_n$$



Donc (3.53b) devient :

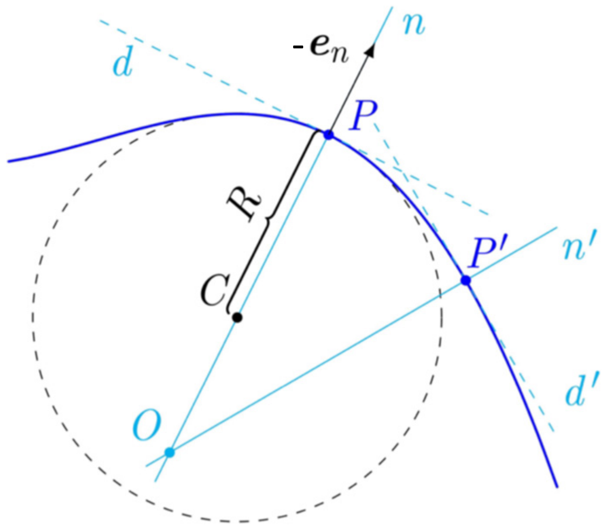
3.10.3 Accélérations tangentielle et normale

- Dans la limite d'un déplacement infinitésimal,

$$\boxed{\lim_{\Delta t\to 0} \mathbf{v}\cdot\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}\cdot\mathbf{r}' \quad (3.53\text{b})} \quad \text{où} \quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \mathbf{v}; \quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \mathbf{a}; \quad \lim_{\Delta t\to 0}\mathbf{r}'(t+\Delta t) = \mathbf{r}(t)$$

De plus, dans la limite d'un déplacement infinitésimal, le point *P'* se trouve sur le cercle osculateur passant par *P*. Ainsi, l'origine coïncide avec le centre du cercle osculateur, i.e., $O \equiv C$,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\mathbf{r}' = \mathbf{r} = \mathbf{CP} = -R\mathbf{e}_n$$



Donc (3.53b) devient : $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = v^2 = -\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} = -\left(\underbrace{a_t\mathbf{e}_t}_{=0} + a_n\mathbf{e}_n\right)\cdot\left(-R\mathbf{e}_n\right)$

$$= Ra_n\underbrace{\mathbf{e}_n\cdot\mathbf{e}_n}_{=1} = Ra_n$$

Ainsi, $a_n = \dfrac{v^2}{R}$