Physique
Semestre de printemps 2025

Roger Sauser
Raphaël Butté
Guido Burmeister

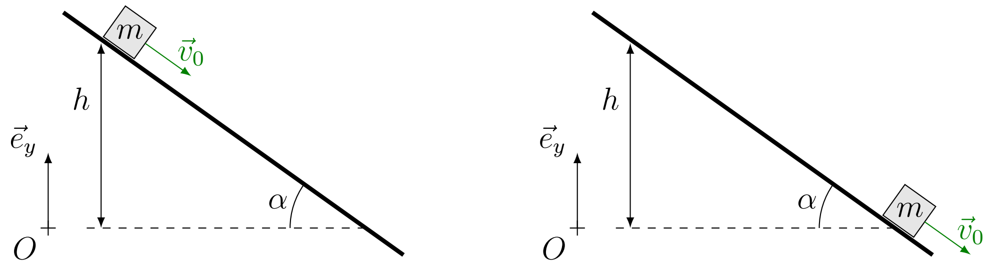
https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15842

Corrigé 8

Exercice 1

(a) Nous allons considérer deux instants t_1 et t_2 :

i) instant t_1 ii) instant t_2



En choisissant l'origine comme sur le dessin, les énergies mécaniques en t_1 et t_2 s'écrivent :

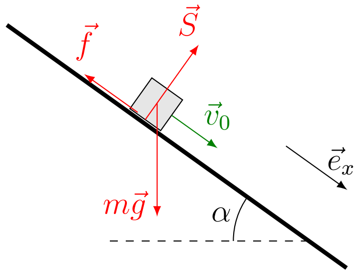
$$E_{\text{méc.}}(1) = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh \quad \text{et} \quad E_{\text{méc.}}(2) = \frac{1}{2}mv_0^2\,.$$

Ainsi, la variation d'énergie mécanique de m sur une dénivellation h est donnée par

$$\Delta E_{\text{méc.}} = E_{\text{méc.}}(2) - E_{\text{méc.}}(1) = -mgh\,.$$

Remarque
L'énergie mécanique diminue. Il doit donc exister un frottement exercé par le plan incliné qui freine la masse m.

(b)



Le plan incliné exerce deux forces sur la masse m : une force de frottement $\vec{f}$ et une force de soutien $\vec{S}$. Comme cette dernière ne travaille pas (le soutien est toujours perpendiculaire au plan incliné, et donc à la trajectoire de la masse m), le théorème de l'énergie cinétique s'écrit

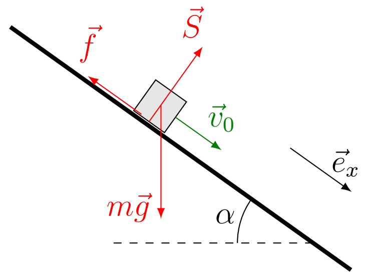
$$\begin{aligned} E_{\text{cin.}}(2) - E_{\text{cin.}}(1) &= W_{1\to 2}(m\vec{g}) + W_{1\to 2}(\vec{f}) \\ 0 &= W_{1\to 2}(m\vec{g}) + W_{1\to 2}(\vec{f}) \end{aligned}$$

et le travail sur m fourni par le plan incliné est donc

$$\begin{aligned} W_{1\to2}(\vec{f}) &= -W_{1\to2}(m\vec{g}) = -mgh \\ &= E_{\text{méc.}}(2) - E_{\text{méc.}}(1)\,. \end{aligned}$$

Remarque
Le travail des forces non conservatives (ou dissipatives) est égal à la variation de l'énergie mécanique.

(c)



La deuxième loi de Newton appliquée à la masse m s'écrit

$$m\vec{g} + \vec{S} + \vec{f} = m\vec{a} = \vec{0}\,.$$

En projetant selon $\vec{e}_x$, le long de la pente, il vient

$$f = mg\sin\alpha = \text{constante.}$$

La force de frottement $\vec{f}$ est donc constante.

Remarque
Comme $f =$ constante, il est possible de calculer aisément le travail de la force de frottement à partir de la définition :

$$\begin{aligned} W_{1\to2}(\vec{f}) &= \int_1^2 \vec{f}\cdot d\vec{r} = -\int_1^2 f\,ds = -f\int_1^2 ds = -f\frac{h}{\sin\alpha} \\ &= -mg\sin\alpha\frac{h}{\sin\alpha} = -mgh\,. \end{aligned}$$

Nous retrouvons bien le résultat obtenu au point (b).

(d) Pendant un intervalle de temps dt, la masse m descend d'une hauteur dh et le travail sur m fourni par le plan incliné s'écrit

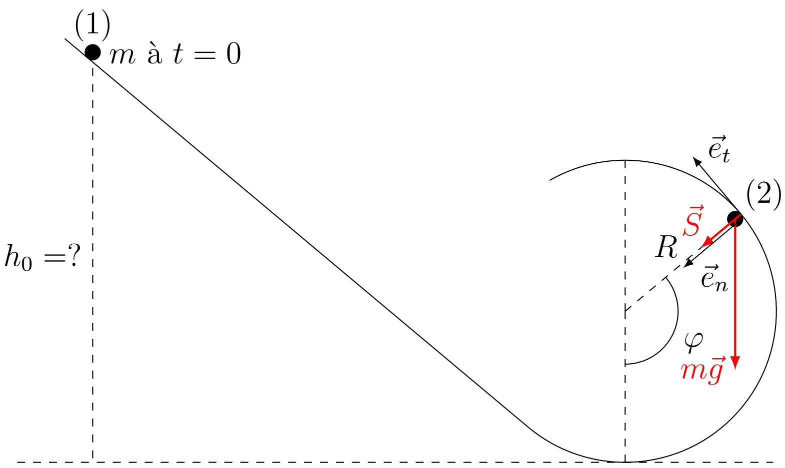
$$dW = -mg\,dh = -f\frac{dh}{\sin\alpha} = -f\,ds\,,$$

où ds est le déplacement le long du plan. La puissance a donc pour expression

$$P = \frac{dW}{dt} = -f\,\frac{ds}{dt} = -f\,v_0\,.$$

Exercice 2
Plus la hauteur du lâcher h_0 est grande, plus la bille va vite dans l'anneau. Plus la hauteur est petite, plus la bille va lentement et risque de quitter l'anneau.
La bille doit rester en contact avec le rail en tout point : on exploite la condition de non-décrochement.

Considérer d'abord une position quelconque pour la bille



Objet : bille

Forces : poids, soutien

$$m\vec{g} + \vec{S} = m\vec{a}\,.$$

Le non-décrochement de la bille du rail est caractérisé par la condition $||\vec{S}|| > 0$.

La condition de décrochement s'exprime le mieux selon la normale $\vec{e}_n$. Effectuer donc la projection selon le repère $(\vec{e}_t, \vec{e}_n)$.
Selon $\vec{e}_t$:

$$-mg\sin\varphi = ma_t\,.$$

Selon $\vec{e}_n$:

$$S - mg\cos\varphi = ma_n = m\frac{v^2}{R}\,.$$

La condition de non-décrochement en tout point s'écrit

$$S = m\frac{v^2}{R} + mg\cos\varphi > 0 \quad \forall\,\varphi\,.$$

La projection selon $\vec{e}_t$ est exploitée à travers le théorème de l'énergie cinétique.
Toutes les forces exercées sur la bille sont conservatives (poids) ou ne travaillent pas (soutien). Par conséquent, l'énergie mécanique de la bille est conservée.
En choisissant l'origine des hauteurs au niveau du point le plus bas du cercle, on a

- Au point de départ (1) (à $t=0$), la vitesse de la bille est nulle et sa hauteur h_0 :

$$E_{\text{méc}}(1) = mgh_0\,.$$

- Au point (2) (à t quelconque), la bille a une vitesse de norme v et se trouve à la hauteur $h = R(1-\cos\varphi)$:

$$E_{\text{méc}}(2) = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1-\cos\varphi)\,.$$

La conservation de l'énergie mécanique donne donc

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1-\cos\varphi)\,.$$

C'est une relation entre la vitesse et la position de la bille.
Introduire la relation entre vitesse et position dans la condition de non-décrochement.
Avec

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1-\cos\varphi) \Leftrightarrow v^2 = 2gh_0 - 2gR(1-\cos\varphi)\,,$$

la condition de non-décrochement devient

$$\frac{SR}{m} = v^2 + gR\cos\varphi = 2gh_0 - gR(2-3\cos\varphi) > 0 \quad \forall\,\varphi\,.$$

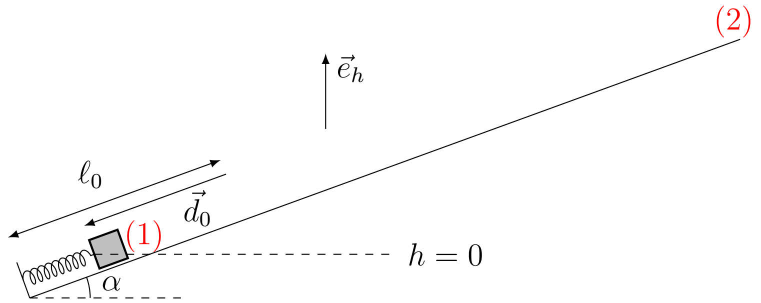
L'angle pour lequel l'expression est minimale est $\varphi = \pi$: la position critique est le haut du cercle. Si la bille y passe sans décoller du rail, elle ne décolle nulle part.
Pour $\varphi = \pi$, $\cos\varphi = -1$ et la condition de non-décrochement doit être vérifiée :

$$\frac{SR}{m} = 2gh_0 - gR(2+3) = g(2h_0 - 5R) > 0 \Rightarrow h_0 > \frac{5R}{2} \,.$$

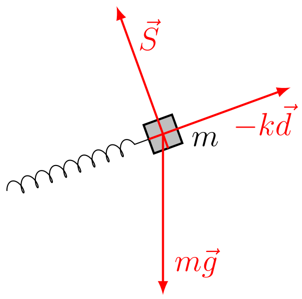
Remarque : cette hauteur minimale est supérieure à celle du point le plus haut du cercle.

Exercice 3

(a) La dénivellation est la différence de hauteur entre le point de départ et le point où la masse m s'arrête : utiliser le théorème de l'énergie cinétique pour m (comme il n'y a pas de frottements, on peut même penser que l'énergie mécanique de la masse m est conservée).
Faire un dessin.



Considérer l'objet de masse m .



Objet : masse m

Force : poids (conservatif), force élastique (conservative), soutien du plan (de travail nul).

Newton :

$$m\vec{g} - k\vec{d} + \vec{S} = m\vec{a} \,.$$

Toutes les forces étant effectivement conservatives (ou ne travaillant pas), l'énergie mécanique est conservée entre tous points (1) et (2) du parcours de m :

$$E_{\text{méc}}(1) = E_{\text{méc}}(2) \,.$$

Exprimer l'énergie mécanique aux points (1) et (2).
Prenons comme origine des hauteurs le point de départ de m .
Choisissons le point (1) au départ de m ($\vec{v}_1 = \vec{0}$) :

$$E_{\text{méc}}(1) = \frac{1}{2}kd_0^2 \,.$$

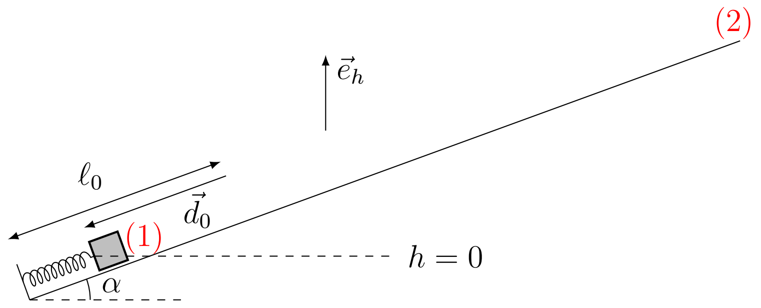
Choisissons le point (2) au point le plus haut atteint par m ($\vec{v}_2 = \vec{0}$) :

$$E_{\text{méc}}(2) = mgh \,.$$

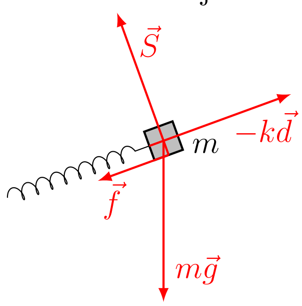
Ainsi,

$$E_{\text{méc}}(1) = E_{\text{méc}}(2) \Leftrightarrow \frac{1}{2}kd_0^2 = mgh \Leftrightarrow h = \frac{kd_0^2}{2mg} = 28.8\,\text{m}.$$

(b) La dénivellation est la différence de hauteur entre le point de départ et le point où la masse m s'arrête : utiliser le théorème de l'énergie cinétique pour m (comme il y a des frottements, l'énergie mécanique de la masse m n'est pas conservée.).
Faire un dessin.



Considérer l'objet de masse m.



Objet : masse m

Force : poids (conservatif), force élastique (conservative), soutien du plan (de travail nul), frottement (non conservatif).

Newton :

$$m\vec{g} - k\vec{d} + \vec{S} + \vec{f} = m\vec{a}\,.$$

La norme du frottement vaut 60% de celle du soutien. Selon la normale au plan, $S = mg\cos\alpha$. Alors

$$f = 0.6mg\cos\alpha\,.$$

L'énergie mécanique n'est pas conservée entre les points (1) et (2) : la différence est égale au travail des forces non conservatives, à savoir celui du frottement :

$$E_{\text{méc}}(2) - E_{\text{méc}}(1) = W_{1\to2}(\vec{f})\,.$$

Prenons comme origine des hauteurs le point de départ de m.
Choisissons le point (1) au départ de m ($\vec{v}_1 = \vec{0}$) :

$$E_{\text{méc}}(1) = \frac{1}{2}kd_0^2\,.$$

Choisissons le point (2) au point le plus haut atteint par m ($\vec{v}_2 = \vec{0}$) :

$$E_{\text{méc}}(2) = mgh\,.$$

Le frottement $\vec{f}$ étant de norme constante, son travail vaut

$$W_{1\to2}(\vec{f}) = \int_1^2 \vec{f}\cdot d\vec{r} = -\int_1^2 f ds = -f\int_1^2 ds = -fL\,,$$

L étant la longueur du parcours avec

$$h = L\sin\alpha \Leftrightarrow L = \frac{h}{\sin\alpha}\,.$$

Ainsi,

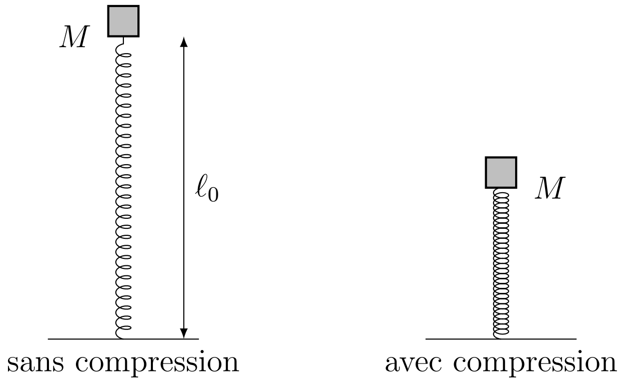
$$E_{\text{méc}}(2) - E_{\text{méc}}(1) = W_{1\to2}(\vec{f}) \Leftrightarrow mgh - \frac{1}{2}kd_0^2 = -0.6mg\cos\alpha\frac{h}{\sin\alpha}$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{kd_0^2}{2mg(1 + 0.6\,\cot\alpha)} = 10.87\,\text{m}.$$

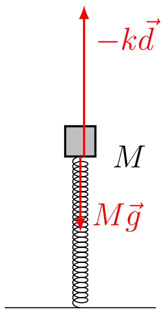
Exercice 4

(a) Comme on considère la masse M dans deux situations différentes, on peut essayer de lui appliquer le théorème de l'énergie cinétique (ou, le cas échéant, la conservation de l'énergie mécanique).

Faire un dessin.



Considérer l'objet de masse M .



Objet : masse M

Force : poids (conservatif), force élastique (conservative).

Newton :

$$M\vec{g} - k\vec{d} = M\vec{a}\,.$$

Toutes les forces étant effectivement conservatives (ou ne travaillant pas), l'énergie mécanique est conservée entre tous points (1) et (2) du parcours de M :

$$E_{\text{méc}}(1) = E_{\text{méc}}(2)\,.$$

Exprimer l'énergie mécanique aux points (1) et (2).

Prenons comme origine des hauteurs le point de départ de M , lorsque le ressort est non déformé.

Au point (1) (vitesse, hauteur et déformation toutes nulles) :

$$E_{\text{méc}}(1) = 0\,.$$

Au point (2) (point le plus bas atteint par m) (vitesse nulle, hauteur minimale $-d$, déformation d) :

$$E_{\text{méc}}(2) = -Mgd + \frac{1}{2}kd^2\,.$$

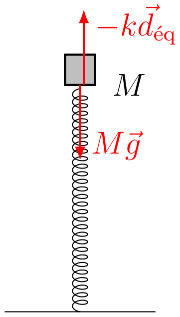
Ainsi,

$$E_{\text{méc}}(1) = E_{\text{méc}}(2) \Leftrightarrow \frac{1}{2}kd^2 = Mgd \Leftrightarrow d = 0 \text{ ou } d = \frac{2Mg}{k}.$$

La seconde solution donne la compression maximale du ressort.

(b) C'est une situation d'équilibre.

Faire un dessin et considérer M .



Objet : masse M

Force : poids, force élastique.

Newton :

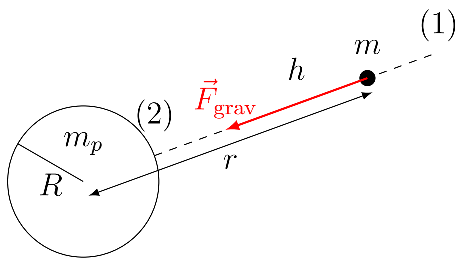
$$M\vec{g} - k\vec{d}_{\text{éq}} = \vec{0}\,.$$

Selon la verticale, la compression vaut $d_{\text{éq}} = \dfrac{Mg}{k}$.

(c) Considérer les forces en jeu pour ces deux compressions.
Au point d'équilibre (cas (b)), la résultante des forces est nulle. La force du ressort est alors de même norme que le poids.
Au point le plus bas (cas (a)), la résultante des forces est vers le haut et la masse M remonte, la force du ressort étant plus importante que le poids. La masse M va alors osciller autour de la position d'équilibre, située au milieu des deux positions extrêmes.

Exercice 5

La masse est en chute libre (depuis une hauteur élevée). Son énergie mécanique est conservée.
Faire un dessin et considérer la masse qui tombe.



Référentiel d'inertie lié au centre de la planète.

Objet : la masse m.

Force : gravitation (conservative).

Toutes les forces étant effectivement conservatives (ou ne travaillant pas), l'énergie mécanique est conservée entre tous points (1) et (2) du parcours de m :

$$E_{\text{méc}}(1) = E_{\text{méc}}(2)\,.$$

La force de gravitation n'est pas constante sur une grande distance.

$$E_{\text{méc}}(1) = E_{\text{méc}}(2) \Longleftrightarrow 0 - G\frac{mm_p}{R+h} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mm_p}{R}$$

et alors

$$v = \sqrt{2Gm_p\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)}\,.$$

Remarque : si $h \ll R$, on peut faire une approximation au premier ordre

$$f(R+h) = \frac{1}{R+h} \simeq f(R) + f'(R)h = \frac{1}{R} - \frac{h}{R^2}$$

et on obtient

$$v \simeq \sqrt{2Gm_p\frac{h}{R^2}} = \sqrt{2gh}\,,$$

avec $g \simeq \frac{Gm_p}{R^2}$. Ce résultat est bien celui obtenu si on peut considérer la gravitation comme constante.

Exercice 6

On suppose que la seule force appliquée à l'objet est la force de gravitation liée à la présence de l'astre (de la Terre). Comme cette force est conservative, l'énergie mécanique de l'objet est conservée.
La vitesse de libération propre à un astre est la vitesse minimale que doit posséder un corps au moment de quitter la surface de l'astre pour que le corps puisse échapper définitivement à l'attraction (gravitationnelle) de l'astre. En d'autres termes, il s'agit de la vitesse initiale nécessaire au corps pour atteindre un point à l'infini avec une vitesse finale nulle.
L'énergie mécanique du corps à un instant donné a pour expression :

$$E_{\text{méc.}} = E_{\text{cin.}} + E_{\text{pot.}}^{\text{grav.}} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM_{\text{astre}}}{d} + C\,,$$

où m est la masse du corps, v est la vitesse de ce dernier, et d est la distance qui sépare le corps du centre de masse de l'astre. L'énergie potentielle de gravitation est définie à une constante arbitraire C près.

L'énergie mécanique du corps est conservée. Elle ne varie pas au cours du temps :

$$E_{\text{méc.}} = \text{constante}\,.$$

Nous écrivons l'énergie mécanique que possède le corps à deux instants :

- Au moment où le corps quitte la surface de l'astre. Il possède alors une vitesse $\vec{v}_0$ (de norme $v_0 = ||\vec{v}_0||$) et se trouve à une distance $d = R$ du centre de masse de l'astre (R est le rayon de l'astre).
- Au moment où le corps est très éloigné de l'astre. Il possède alors une vitesse $\vec{v}_\infty \cong \vec{0}$ et se trouve à une distance $d \to \infty$ du centre de masse de l'astre.

La conservation de l'énergie mécanique permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\underbrace{\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM_{\text{astre}}}{R} + C}_{E_{\text{méc.}}\text{ à la surface de l'astre}} &= \underbrace{\frac{1}{2}mv_\infty^2 - \lim_{d\to\infty} G\frac{mM_{\text{astre}}}{d} + C}_{E_{\text{méc.}}\text{ très loin de l'astre}} \\ &= 0 + 0 + C\,.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM_{\text{astre}}}{R} = 0\,,$$

et la vitesse initiale v_0 a pour expression :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2M_{\text{astre}}G}{R}}\,.$$

Numériquement, nous obtenons, dans le cas de la Terre,

$$v_0 = \sqrt{\frac{2M_{\text{astre}}G}{R}} \cong \sqrt{\frac{2\cdot 5.9742\cdot 10^{24}\cdot 6.6732\cdot 10^{-11}}{6.3710\cdot 10^{6}}} \cong 1.1187\cdot 10^4\,\text{m}\,\text{s}^{-1} \cong 11\,\text{km}\,\text{s}^{-1}\,.$$

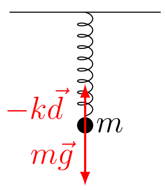
Remarque

Nous avons obtenu une vitesse de libération scalaire (et non pas vectorielle). Tout corps possédant cette vitesse v_0 est susceptible d'échapper à l'attraction gravitationnelle de l'astre, et ce, quelle que soit la direction de sa vitesse initiale.

Notons également que la vitesse de libération ne dépend pas de la masse du corps.

Exercice 7

Etudier la masse m.



Objet : m. Forces : poids et rappel.

Newton :

$$m\vec{g} - k\vec{d} = m\vec{a}\,.$$

(a) A l'équilibre,

$$m\vec{g} - k\vec{d} = \vec{0}\,.$$

Le ressort est en extension et de longueur

$$\ell_{\text{éq}} = \ell_0 + d = \ell_0 + \frac{mg}{k}\,.$$

(b) Hors équilibre, $m\vec{g} - k\vec{d} = m\vec{a}$.
Pour le choix de l'origine au plafond et selon le repère $\vec{e}_z$ vers le bas,

$$mg - kd = mg - k(z - \ell_0) = ma = m\ddot{z}\,.$$

Pour retrouver une forme plus habituelle du type $-kx = ma$, nous pouvons écrire

$$-k\left(z - \ell_0 - \frac{mg}{k}\right) = -k(z - \ell_{\text{éq}}) = m\ddot{z}\,.$$

$z - \ell_{\text{éq}}$ étant l'écart par rapport à la position d'équilibre, nous pouvons choisir l'origine sur la position d'équilibre. Cela revient à faire le changement de variable

$$x = z - \ell_{\text{éq}} \qquad \ddot{x} = \ddot{z}$$

et l'équation de Newton devient

$$-kx = m\ddot{x}\,.$$

Posant $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, nous retrouvons l'équation de l'oscillateur harmonique

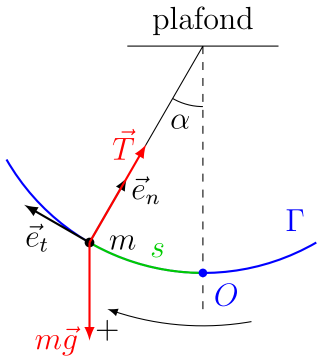
$$-\omega_0^2\, x = \ddot{x}$$

aux solutions connues. La pulsation et la période sont

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

Exercice 8

Considérer la masse m.
Travailler avec le repère $(\vec{e}_t, \vec{e}_n)$ et bien définir l'abscisse curviligne et sa relation avec l'angle que fait le fil avec la verticale.



Objet : m

Forces : poids et tension.

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}\,.$$

Selon $\vec{e}_n$:

$$-mg\cos\alpha + T = ma_n = m\frac{v^2}{L}$$

Selon $\vec{e}_t$:

$$-mg\sin\alpha = ma_t = m\ddot{s} = mL\ddot{\alpha}\,.$$

(a) Au point le plus bas, m est en virage.
A la verticale $\alpha = 0$:

$$-mg + T = m\frac{v_0^2}{L} \Longrightarrow T = m\left(g + \frac{v_0^2}{L}\right)\,.$$

(b) Comparer le point le plus bas et le point le plus haut.
Toutes les forces étant conservatives (ou ne travaillant pas), l'énergie mécanique est conservée : $E_{\text{méc,bas}} = E_{\text{méc,haut}}$:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh_{\max} \Longrightarrow h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}\,.$$

(c) Faire l'approximation des petits angles.
Pour de petits angles, $\sin\alpha \simeq \alpha$: $-mg\alpha = mL\ddot{\alpha}$. Posant

$$\omega_0^2 = \frac{g}{L}\,,$$

nous retrouvons l'équation de l'oscillateur harmonique $-\omega_0^2\,\alpha = \ddot{\alpha}$ de solution

$$\alpha(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

avec les conditions initiales

$$\alpha(0) = A\sin(0+\varphi) = 0 \qquad \dot{\alpha}(0) = \omega_0 A\cos(0+\varphi) = \frac{v_0}{L}\,.$$

Nous avons donc $\varphi = 0$ et $A = \frac{v_0}{L\omega_0} = \frac{v_0}{\sqrt{gL}}$ d'où

$$\alpha(t) = \frac{v_0}{\sqrt{gL}}\sin(\omega_0 t)\,.$$

(d) Utiliser la définition de la fréquence.
Elle est donnée par

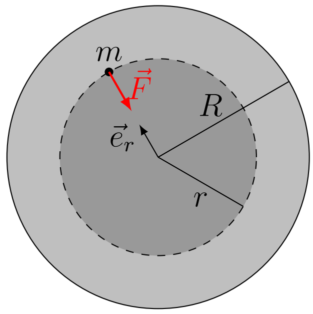
$$\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}\,.$$

Exercice 9

Considérer l'objet et la force qu'il subit.
A l'intérieur d'une boule homogène, la gravitation exercée sur l'objet à une distance r du centre est celle due uniquement à la boule « intérieure » de rayon r.

La force de gravitation exercée sur un objet de masse m à une distance r du centre de l'astre est

$$\vec{F} = -G\frac{M(r)m}{r^2}\,\vec{e}_r\,,$$



où

$$M(r) = \varrho\frac{4}{3}\pi r^3$$

est la masse de la boule « intérieure » de rayon r . Ainsi

$$\vec{F} = -m\frac{4}{3}\pi G\varrho\, r\,\vec{e}_r\,.$$

Pour l'objet m soumis à la gravitation,

$$\vec{F} = m\vec{a}\,.$$

Selon $\vec{e}_r$,

$$-m\frac{4}{3}\pi G\rho\, r = m\ddot{r} \quad \forall\, t$$

et les conditions initiales sont données par le lâcher à vitesse nulle. Pour $t_0 = 0$,

$$r(0) = R \quad v(0) = \dot{r}(0) = 0\,.$$

En posant

$$\omega_0^2 = \frac{4}{3}\pi G\rho\,,$$

nous avons l'évolution d'un OH :

$$\ddot{r} = -\omega_0^2\, r \quad r(0) = R \quad v(0) = 0\,.$$

La solution est

$$r(t) = R\cos(\omega_0 t) \quad \forall\, t\,.$$

L'objet va faire une oscillation dans le couloir creusé à travers l'astre.