Physique

Semestre de printemps 2025

Roger Sauser
Raphaël Butté
Guido Burmeister

https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15842

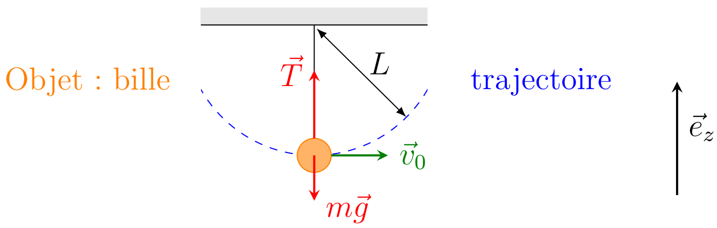
Corrigé 6

Exercice 1

On exploite la deuxième loi de Newton ainsi que l'expression de l'accélération normale. Les forces exercées sur le pendule sont son poids et la traction dans le fil, de sorte que la deuxième loi de Newton s'écrit

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}\,.$$

Lorsque le fil est vertical, le poids et la traction sont parallèles et normales à la trajectoire circulaire du pendule :

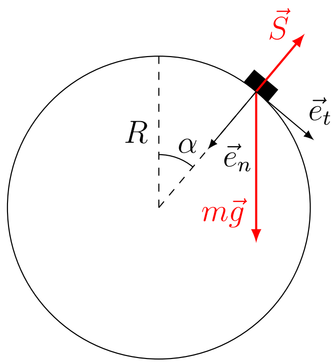


A cet instant l'accélération tangentielle est donc nulle, la norme de la vitesse ne varie plus. Soit $\vec{v}_0$ la vitesse à cet instant, la projection de la deuxième loi de Newton selon un repère vertical vers le haut fournit (en tenant compte de l'expression de l'accélération normale)

$$T - mg = ma_n = m\frac{v_0^2}{L} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{T - mg}{m}\,L}\,.$$

Exercice 2

Exploiter la condition de décrochement pour l'endroit où m quitte la boule.
Considérer d'abord une position quelconque pour le wagonnet.



Objet : wagonnet

Forces : poids, soutien

$$m\vec{g} + \vec{S} = m\vec{a}\,.$$

Le décrochement du wagonnet de la surface de la boule est caractérisé par la disparition du soutien : $\vec{S} = \vec{0}$.

La condition de décrochement s'exprime le mieux selon la normale $\vec{e}_n$. Effectuer donc la projection selon le repère $(\vec{e}_t, \vec{e}_n)$.
Selon $\vec{e}_t$:

$$mg\sin\alpha = ma_t\,.$$

Selon $\vec{e}_n$:

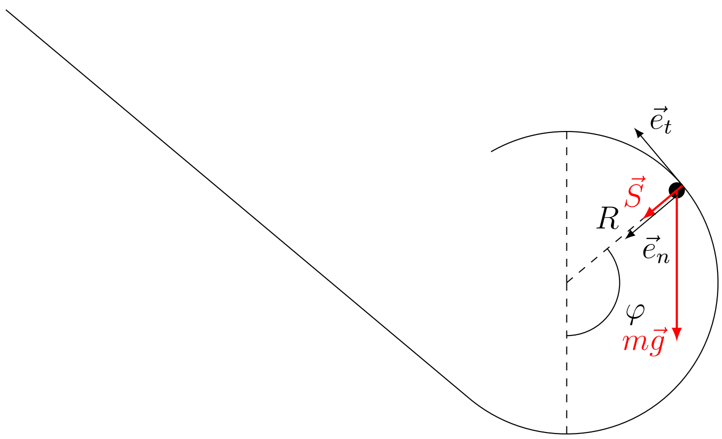
$$mg\cos\alpha - S = ma_n = m\frac{v^2}{R}\,.$$

Au point D du décrochement repéré par l'angle α_D , $S = 0$:

$$mg\cos\alpha_D = m\frac{v_D^2}{R} \Rightarrow Rg\cos\alpha_D = v_D^2\,.$$

Exercice 3

Exploiter la condition de non-décrochement au sommet de la trajectoire (au-dessus du centre du cercle).
Considérer d'abord une position quelconque pour la bille.



Objet : bille

Forces : poids, soutien

$$m\vec{g} + \vec{S} = m\vec{a}\,.$$

Le non-décrochement de la bille du rail est caractérisé par la condition $||\vec{S}|| > 0$.

La condition de décrochement s'exprime le mieux selon la normale $\vec{e}_n$. Effectuer donc la projection selon le repère $(\vec{e}_t, \vec{e}_n)$.
Selon $\vec{e}_t$:

$$-mg\sin\varphi = ma_t\,.$$

Selon $\vec{e}_n$:

$$S - mg\cos\varphi = ma_n = m\frac{v^2}{R}\,.$$

Au sommet, repéré par l'angle $\varphi = \pi$, la condition $S > 0$ s'écrit

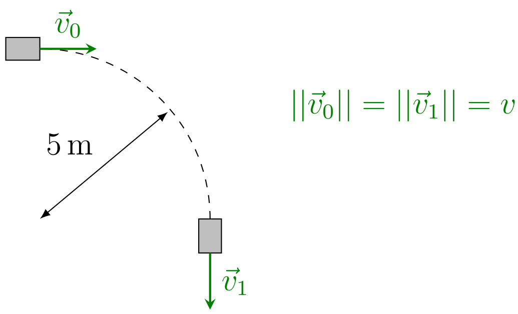
$$S = m\frac{v^2}{R} + mg\cos\varphi = m\frac{v^2}{R} - mg > 0 \Longrightarrow v^2 > Rg$$

ou encore

$$v > \sqrt{Rg}\,.$$

Exercice 4

On exploite la nature circulaire du mouvement et l'expression des accélérations tangentielle et normale.
La voiture fait un virage à angle droit en 2 secondes :



Comme la norme de la vitesse indiquée par le tachymètre est constante, la distance parcourue dans le virage en $t = 2\,\mathrm{s}$ est

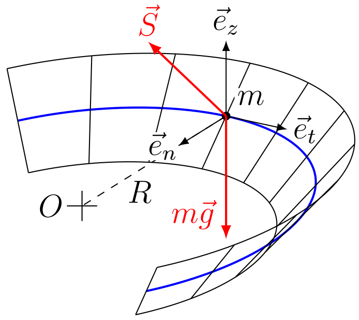
$$L = \frac{2\pi R}{4} = vt \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\pi R}{2t}\,.$$

De plus,

$$a_t = \dot{v} = 0 \quad \text{et} \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\pi^2 R}{4t^2} \cong 3.08\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,.$$

Exercice 5

Esquisser la situation en 3 dimensions, puis à deux dimensions.

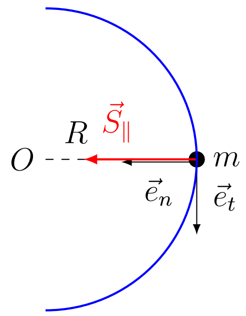


Objet : voiture

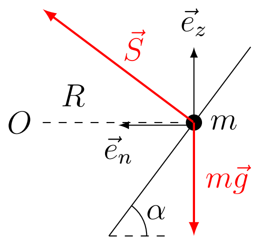
Forces : poids, soutien

$$m\vec{g} + \vec{S} = m\vec{a}\,.$$

De dessus :



De côté :



La trajectoire de la voiture est circulaire : le rayon de courbure R est constant.
Comme R apparaît dans la projection selon la normale, on effectue les projections selon le repère $(\vec{e}_t, \vec{e}_n, \vec{e}_z)$.
Selon $\vec{e}_t$:

$$0 = ma_t \Rightarrow a_t = \dot{v} = 0 \Rightarrow v = \text{cte}.$$

Le mouvement est bien uniforme.

Selon $\vec{e}_n$:

$$S\sin\alpha = ma_n = m\frac{v^2}{R}\,.$$

Selon $\vec{e}_z$:

$$S\cos\alpha - mg = ma_z = 0\,,$$

par absence de mouvement selon $\vec{e}_z$.

En éliminant S, nous avons

$$\frac{S\sin\alpha}{S\cos\alpha} = \tan\alpha = \frac{mv^2}{mgR} = \frac{v^2}{Rg} \Leftrightarrow \alpha = \arctan\frac{v^2}{Rg}\,.$$

Exercice 6

(a) En partant de la deuxième loi de Newton, on détermine les expressions de la vitesse scalaire $v = v(t)$ et de l'abscisse curviligne $s = s(t)$. On peut alors en déduire la force motrice de la voiture en exploitant les données de l'énoncé.

A tout point du virage, la deuxième loi de Newton, projetée selon la tangente $\vec{e}_t$, s'écrit

$$f = ma_t = m\dot{v}\,,$$

où f est la force motrice du moteur. Selon l'énoncé, la norme de la vitesse augmente *régulièrement dans le temps*. La force motrice est donc constante en norme :

$$f = f_0 = \text{constante}\,.$$

Ainsi, le mouvement de la voiture le long de sa trajectoire circulaire est un mouvement uniformément accéléré. On peut donc immédiatement écrire la vitesse scalaire $v(t)$ et l'abscisse curviligne $s(t)$ dans le virage à chaque instant :

$$\begin{aligned} a_t(t) &= \frac{f_0}{m} = \text{constante}\,, \\ v(t) &= a_t\,(t - t_0) + v_0 = \frac{f_0}{m}\,t + v_0\,, \\ s(t) &= \frac{1}{2}a_t\,(t - t_0)^2 + v_0\,(t - t_0) + s_0 = \frac{1}{2}\frac{f_0}{m}\,t^2 + v_0\,t\,, \end{aligned}$$

où on a posé par commodité $t_0 = 0\,\text{s}$ et $s_0 = 0\,\text{m}$.

Connaissant la vitesse à l'entrée ($v(t_0) = v_0$) et à la sortie ($v(t_1) = v_1$) du virage, on détermine alors le temps t_1 :

$$v(t_1) = \frac{f_0}{m}\,t_1 + v_0 = v_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{m(v_1 - v_0)}{f_0}\,.$$

En utilisant la distance parcourue depuis $s(t_0)$, $s(t_1) = \pi R/2$, on en tire finalement la force f_0 :

$$\begin{aligned} s(t_1) &= \frac{1}{2}\frac{f_0}{m}\,{t_1}^2 + v_0\,t_1 \\ &= \frac{1}{2}\frac{f_0}{m}\frac{m^2(v_1 - v_0)^2}{{f_0}^2} + v_0\,\frac{m(v_1 - v_0)}{f_0} \\ &= \frac{1}{2}\frac{m({v_1}^2 + {v_0}^2 - 2v_0v_1)}{f_0} + \frac{mv_0v_1}{f_0} - \frac{m{v_0}^2}{f_0} \\ &= \frac{1}{2}\frac{m({v_1}^2 - {v_0}^2)}{f_0} \\ &= \frac{\pi R}{2}\,, \\ \Rightarrow\; f_0 &= \frac{m({v_1}^2 - {v_0}^2)}{\pi R} \cong 614\ \text{N}. \end{aligned}$$

Variante (plus efficace) : on pourra utiliser le théorème de l'énergie cinétique.

On applique le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2}m{v_1}^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = W_{0\to1} = f_0\frac{\pi R}{2} \qquad (\text{car } \vec{f} \parallel \vec{e}_t \text{ et } f_0 = \text{constante})\,,$$

d'où

$$f_0 = \frac{m}{\pi R}({v_1}^2 - {v_0}^2) \cong 614\,\mathrm{N}.$$

On remarque que cette méthode est beaucoup plus rapide que la méthode exploitant la vitesse scalaire et l'abscisse curviligne à partir de la deuxième loi de Newton.

(b) L'accélération tangentielle de la voiture de masse m est produite par la force motrice du moteur, $f = f_0$. La deuxième loi de Newton, projetée le long de la trajectoire, fournit

$$a_t = \frac{f_0}{m}\,.$$

Quant à l'accélération normale, elle est donnée par

$$a_n = \frac{v^2}{R}\,.$$

(c)
- A $t = t_0$,

$$a_{t,0} = \frac{f_0}{m} \cong 0.614\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

  et

$$a_{n,0} = \frac{v_0^2}{R} \cong 1.543\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,.$$

- A $t = t_1$,

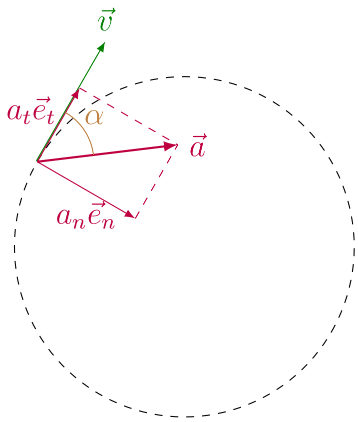
$$a_{t,1} = \frac{f_0}{m} \cong 0.614\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

  et

$$a_{n,1} = \frac{v_1^2}{R} \cong 3.472\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,.$$

Comme la force motrice ne varie pas, l'accélération tangentielle est constante. En revanche, l'accélération normale augmente car la norme de la vitesse augmente. L'accélération s'écrit

$$\vec{a} = a_t\vec{e}_t + a_n\vec{e}_n\,.$$



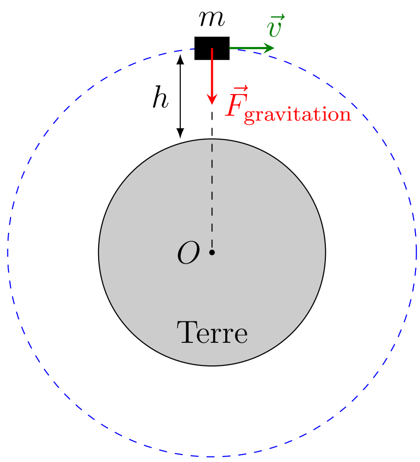
Ainsi,

$$||\vec{a}|| = \sqrt{{a_t}^2 + {a_n}^2} \qquad \text{et} \qquad \cos\alpha = \frac{|a_t|}{||\vec{a}||}\,.$$

- A $t = t_0$,
$$||\vec{a}_0|| = \sqrt{{a_{t,0}}^2 + {a_{n,0}}^2} \cong 1.661\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$
et
$$\cos\alpha_0 = \frac{|a_{t,0}|}{||\vec{a}_0||} \cong 0.370 \quad\Rightarrow\quad \alpha_0 \cong 68.303^\circ\,.$$
- A $t = t_1$,
$$||\vec{a}_1|| = \sqrt{{a_{t,1}}^2 + {a_{n,1}}^2} \cong 3.526\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$
et
$$\cos\alpha_1 = \frac{|a_{t,1}|}{||\vec{a}_1||} \cong 0.174 \quad\Rightarrow\quad \alpha_1 \cong 79.972^\circ\,.$$

Exercice 7

On exploite la deuxième loi de Newton en tenant compte du fait qu'un satellite géostationnaire doit rester en permanence au-dessus du même point de la Terre.
On choisit un référentiel (supposé d'inertie) lié au centre O de la Terre.
Dans ce référentiel, le satellite a un mouvement circulaire uniforme. Il subit une seule force : la force de gravitation due à la présence de la Terre.



La force de gravitation étant centrale, on a
$$||\vec{F}_{\text{gravitation}}|| = G\frac{m_{\mathrm{T}}m}{(R_{\mathrm{T}}+h)^2} = ma_n = m\frac{v^2}{R_{\mathrm{T}}+h}\,.$$
La norme v de la vitesse du satellite doit être telle que ce dernier reste toujours au-dessus du même point de la Terre. Les vitesses angulaires du satellite et de la Terre doivent donc être égales. Or, la vitesse angulaire de la Terre est donnée par $\omega = 2\pi/T$ où $T = 24\,\mathrm{h} = 24\cdot 3600\,\mathrm{s}$ est la période de rotation de la Terre. Ainsi,
$$v = \omega(R_{\mathrm{T}}+h) = \frac{2\pi(R_{\mathrm{T}}+h)}{T}$$
et l'altitude du satellite a pour expression
$$h = \sqrt[3]{\frac{Gm_{\mathrm{T}}T^2}{4\pi^2}} - R_{\mathrm{T}} \cong 3.58\cdot 10^7\,\mathrm{m}\,.$$

Exercice 8

Il s'agit d'un problème de rencontre sur un cercle.

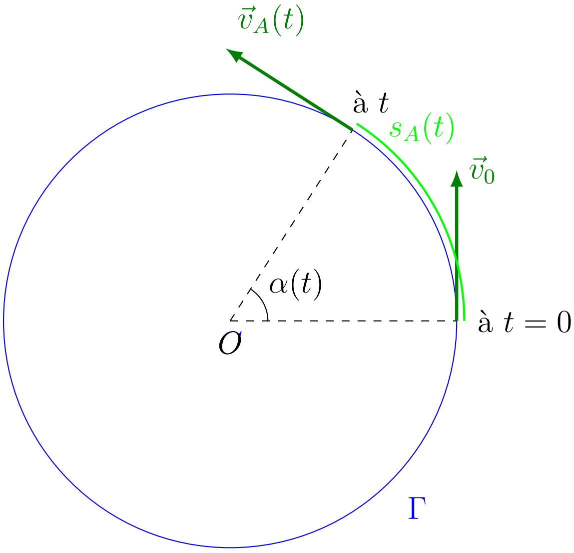
Pour un bon choix de l'origine du temps, noter $\alpha(t)$ l'angle parcouru par A et $\beta(t)$ celui parcouru par B.
En prenant $t = 0$ lorsque A passe devant B, la condition de rencontre sur le cercle s'écrit

$$\exists\, t_r \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } \alpha(t_r) = \beta(t_r) + k2\pi\,.$$

Interprétation :

- $k = 0$: A et B ont parcouru la même angle (premier dépassement)
- $k = +1$: A a un tour d'avance sur B (deuxième dépassement)
- $k = -1$: A a un tour de retard sur B (deuxième dépassement)
- etc...

Que peut-on dire de l'angle $\alpha(t)$ parcouru par A à vitesse de norme constante ?



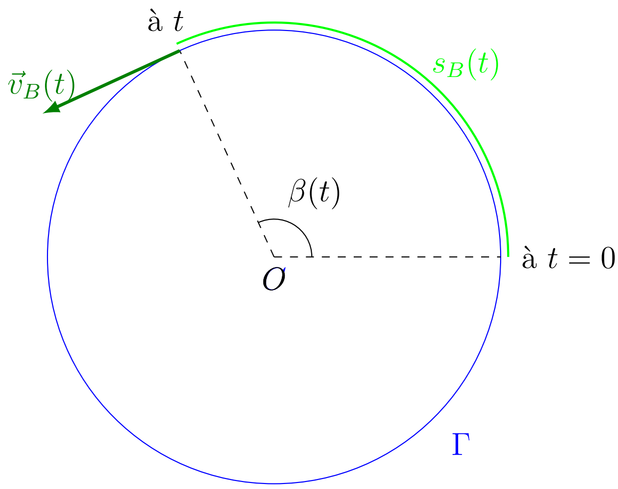
La vitesse de A est de norme constante, la vitesse angulaire est donc aussi constante :

$$v_0 = R\omega_A \Leftrightarrow \omega_A = \frac{v_0}{R} = \text{cte}\,.$$

L'angle parcouru est ainsi linéaire dans le temps :

$$\alpha(t) = \omega_A t\,.$$

Que peut-on dire de l'angle $\beta(t)$ parcouru par B d'accélération tangentielle de norme constante ?



L'accélération tangentielle de B est de norme constante, l'accélération angulaire $\gamma_B = \dot{\omega}_B$ est donc aussi constante

$$a_0 = R\gamma_B \Leftrightarrow \gamma_B = \frac{a_0}{R} = \frac{6\omega_A^2}{\pi} = \text{cte}\,.$$

La vitesse angulaire et l'angle parcouru sont alors donnés par

$$\begin{aligned} \omega_B(t) &= \gamma_B t \\ \beta(t) &= \frac{1}{2}\gamma_B t^2 = \frac{3\omega_A^2}{\pi} t^2\,. \end{aligned}$$

Exploiter la condition de rencontre.
Cherchons $t_r \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\begin{aligned} \alpha(t_r) &= \beta(t_r) + k2\pi \\ \omega_A t_r &= \frac{3\omega_A^2}{\pi} t_r^2 + k2\pi\,. \end{aligned}$$

Voyons pour quels k cette équation en t_r a des solutions :

$$\frac{3\omega_A^2}{\pi} t_r^2 - \omega_A t_r + k2\pi = 0\,.$$

- $k = 0$: A et B ont parcouru la même angle (premier dépassement)

$$\frac{3\omega_A^2}{\pi} t_r^2 - \omega_A t_r = 0 \Leftrightarrow t_r = 0 \text{ ou } t_r = \frac{\pi}{3\omega_A} \, .$$

  $t_r = 0$ est bien sûr l'instant initial : A passe devant B.
  Remarque : B a rattrapé A.

- $k = +1$: A a un tour d'avance sur B (cette situation n'arrive pas)

$$\frac{3\omega_A^2}{\pi} t_r^2 - \omega_A t_r + 2\pi = 0 \, .$$

$$\Delta = \omega_A^2 - 4\frac{3\omega_A^2}{\pi} 2\pi = -23\omega_A^2 < 0 \, .$$

- $k = -1$: A a un tour de retard sur B (deuxième dépassement)

$$\frac{3\omega_A^2}{\pi} t_r^2 - \omega_A t_r - 2\pi = 0 \, .$$

$$\Delta = \omega_A^2 + 4\frac{3\omega_A^2}{\pi} 2\pi = 25\omega_A^2 \, ,$$

  d'où

$$t_r = -\frac{2\pi}{3\omega_A} \text{ ou } t_r = \frac{\pi}{\omega_A} \, .$$

  $t_r < 0$ est bien sûr à rejeter.

Finalement :

- premier dépassement de A par B à $t_r = \dfrac{\pi}{3\omega_A} = \dfrac{\pi R}{3v_0}$
- deuxième dépassement de A par B à $t_r = \dfrac{\pi}{\omega_A} = \dfrac{\pi R}{v_0}$.