Physique
Semestre de printemps 2025

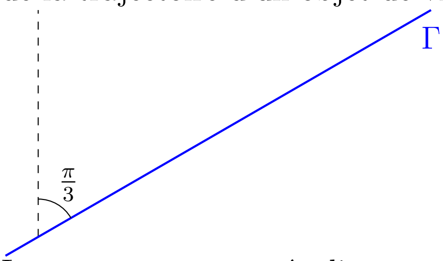
Roger Sauser
Raphaël Butté
Guido Burmeister

https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15842

Corrigé 2

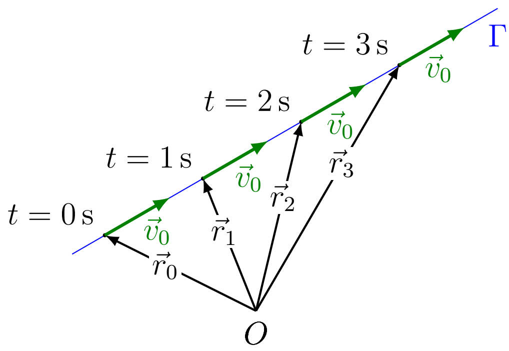
Exercice 1

Donner une représentation soignée.
Un vecteur est constant ssi sa direction, son sens et sa norme le sont. Que peut-on dire de la trajectoire d'un objet de vitesse constante ?



La vitesse étant constante, le mouvement de la voiture est rectiligne et uniforme (MRU) : la trajectoire est une droite.

Le mouvement est régulier : comment est l'espacement entre les points atteints par la voiture à des intervalles réguliers ?



Le déplacement est proportionnel à sa durée,

$$\Delta\vec{r} = \vec{v}_0 \Delta t\,.$$

Sur une durée $\Delta t = 2\,\mathrm{s}$,

- le déplacement est

$$\Delta\vec{r} = \vec{v}_0 \Delta t = \vec{r}_2 - \vec{r}_0 = \vec{r}_3 - \vec{r}_1$$

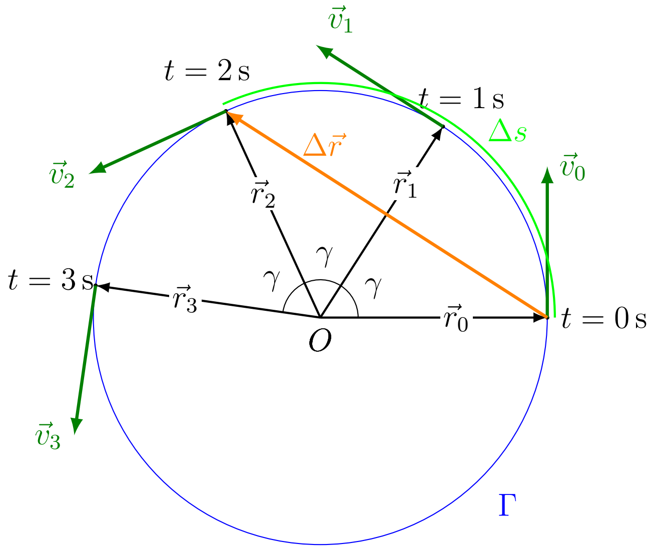
- la distance parcourue, mesurée le long de la trajectoire, est

$$\Delta s = v_0 \Delta t = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot 2\,\mathrm{s} = 2\,\mathrm{m}.$$

Remarque : $||\Delta\vec{r}|| = \Delta s\,.$

Exercice 2

Donner une représentation soignée.
Que peut-on dire de la distance parcourue par un objet de vitesse de norme constante ?
Comment est l'espacement entre les points sur le cercle atteints par la voiture à des intervalles réguliers ?



Prenons pour origine le centre du cercle.
Comme la norme de la vitesse est constante, la distance parcourue est proportionnelle à l'intervalle de temps,

$$\Delta s = v_0 \Delta t\,.$$

Il en est donc de même pour l'angle φ parcouru :

$$\Delta s = R\Delta\varphi \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{\Delta s}{R} = \frac{v_0}{R}\Delta t\,.$$

Sur une durée $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$,

$$\gamma = \Delta\varphi = \frac{1\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{1\,\mathrm{m}} \cdot 1\,\mathrm{s} = 1\,\mathrm{rad} \simeq 57.30^\circ\,.$$

Sur une durée $\Delta t = 2\,\mathrm{s}$,

- le déplacement est

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_0$$

(rem. : $\vec{r}_2 - \vec{r}_0 \neq \vec{r}_3 - \vec{r}_1$).

- la distance parcourue, mesurée le long de la trajectoire, est

$$\Delta s = v_0 \Delta t = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot 2\,\mathrm{s} = 2\,\mathrm{m}.$$

Remarque : $||\Delta\vec{r}|| < \Delta s$.

Exercice 3

Reprendre les définitions, intuitives et exactes, des vecteurs position, vitesse et accélération.
Le vecteur position (grandeur vectorielle) indique la position de l'objet à partir de l'origine choisie.

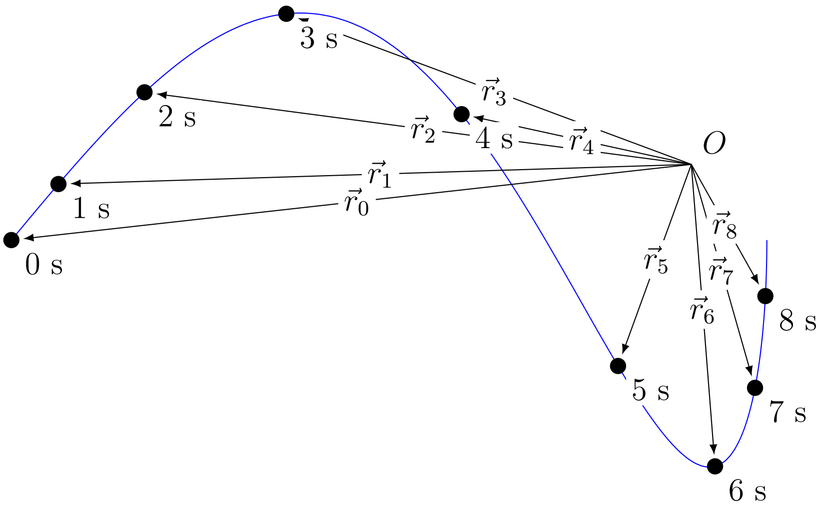
La vitesse (grandeur vectorielle) donne le sens du mouvement et indique le taux de variation de la position par rapport au temps. Elle est tangente à la trajectoire.

L'accélération (grandeur vectorielle) donne le taux de variation de la vitesse par rapport au temps. Elle est ainsi toujours dirigée vers l'intérieur du virage.
Les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{a}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas réalistes :

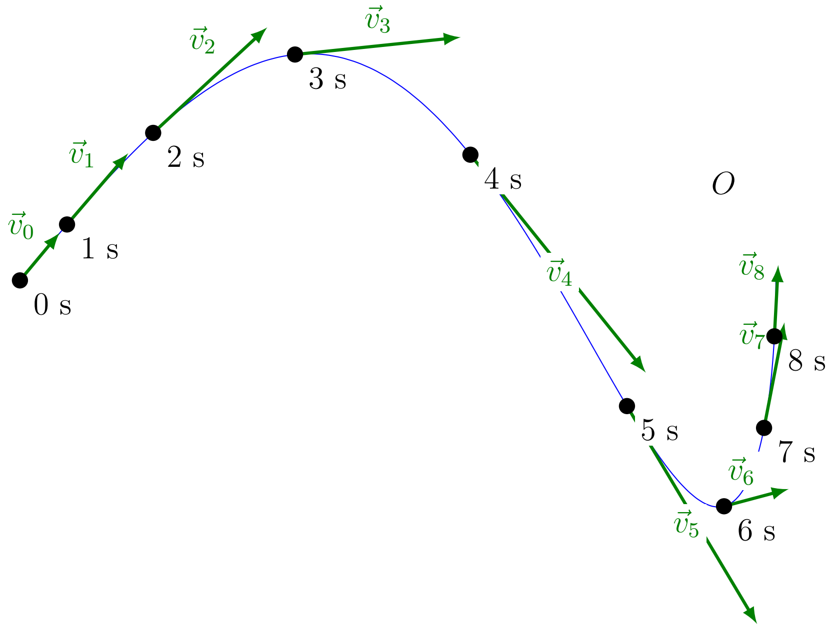
- La vitesse $\vec{v}$ doit être tangente à la trajectoire ;
- l'accélération $\vec{a}_1$ doit être dirigée vers l'intérieur du virage ;
- la vitesse $\vec{v}_2$ doit être tangente à la trajectoire.

Exercice 4

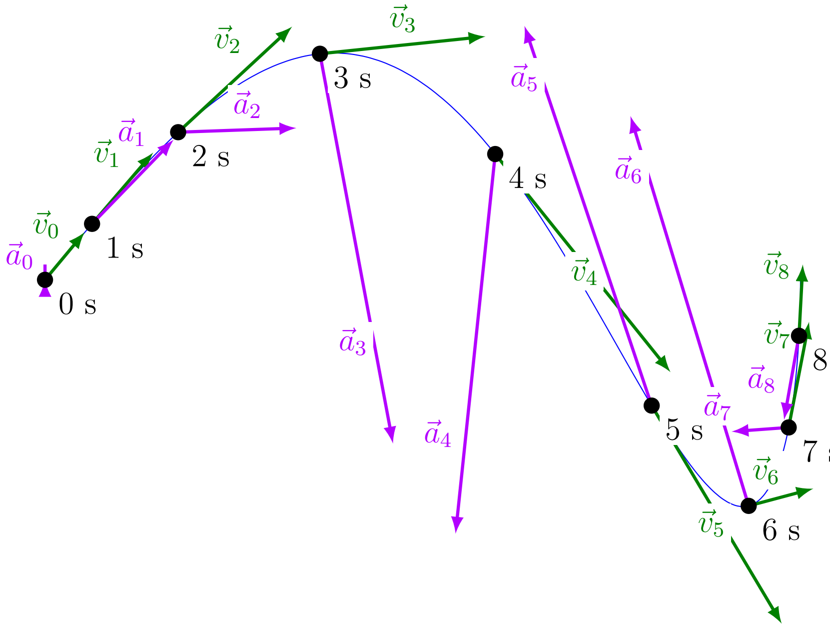
Utiliser la définition du vecteur position.
Choisir une origine.



Imaginer le mouvement de l'objet.
Se rappeler la définition intuitive de la vitesse (grandeur vectorielle) : elle est tangente à la trajectoire, donne le sens du mouvement et indique le taux de variation de la position par rapport au temps.
On peut comparer les normes des différents vecteurs vitesse en se basant sur les distances parcourues en 1 seconde par l'objet. On en déduit par exemple que la norme de la vitesse est plus grande à l'instant $t = 4\,\mathrm{s}$ qu'à l'instant $t = 6\,\mathrm{s}$.



Imaginer le mouvement de l'objet.
Se rappeler la définition intuitive de l'accélération (grandeur vectorielle) : elle indique le taux de variation de la vitesse par rapport au temps (et est ainsi toujours dirigée vers l'intérieur du virage).
Les changements dans la norme de la vitesse permettent alors d'approximer la composante de l'accélération tangente à la trajectoire. On obtient ainsi par exemple que l'accélération tangentielle doit être dirigée vers l'arrière à l'instant $t = 5\,\mathrm{s}$. La composante de l'accélération normale à la trajectoire est absente (lorsque l'objet se déplace en ligne droite) ou dirigée vers l'intérieur du virage.



Exercice 5

On choisit un repère horizontal $\vec{e}_x$ dirigé selon la vitesse initiale de la luge.
La condition initiale est $x(0) = 0\,\text{m}$ (choix de l'origine) et $v(0) = v_0 = 5\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.
L'accélération de la luge est constante : $a(t) = a_0 = -0.5\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$.
La vitesse et la position de la luge sont donc données par (MUA)

$$\begin{aligned} v(t) &= a_0 t + v_0\,, \\ x(t) &= \frac{1}{2}a_0 t^2 + v_0 t\,. \end{aligned}$$

(a) Après $t_1 = 1\,\text{s}$, la vitesse vaut donc

$$v(t_1) = a_0 t_1 + v_0 = -0.5\,\text{m}\,\text{s}^{-2} \cdot 1\,\text{s} + 5\,\text{m}\,\text{s}^{-1} = 4.5\,\text{m}\,\text{s}^{-1}.$$

(b) La distance de freinage est parcourue pendant le temps de freinage t_f défini par la condition d'arrêt de la luge ($v(t_f) = 0\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$) :

$$v(t_f) = a_0 t_f + v_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_f = -\frac{v_0}{a_0} = -\frac{5\,\text{m}\,\text{s}^{-1}}{-0.5\,\text{m}\,\text{s}^{-2}} = 10\,\text{s}\,.$$

La distance de freinage d_f est alors donnée par

$$d_f = x(t_f) = \frac{1}{2}a_0 t_f^2 + v_0 t_f = 25\,\text{m}.$$

(c) La distance $d = 1\,\text{m}$ a été parcourue au temps t_d :

$$x(t_d) = \frac{1}{2}a_0 t_d^2 + v_0 t_d = d\,.$$

Cette équation possède deux solutions positives. Seule la plus petite a un sens :

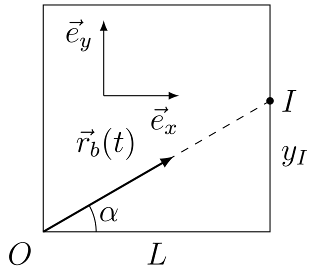
$$t_d = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2a_0 d}}{a_0} \cong 0.202\,\text{s}.$$

On note que ce temps t_d est bien légèrement supérieur à celui que l'on aurait en absence de freinage ($t = 0.2\,\text{s}$).

La vitesse au temps t_d vaut alors $v(t_d) \cong 4.899\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.

Exercice 6

Sur un dessin muni d'un repère, on esquisse la trajectoire de la bille : le mouvement de la bille est rectiligne et uniforme (MRU).



Le point I où la bille quitte la table est aisément décrit par rapport à une origine O au point de départ de la bille et avec un repère $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ parallèle aux bords de la table :

$$I = (L, y_I)\,.$$

La composante y_I est donnée par la trigonométrie :

$$\tan\alpha = \frac{y_I}{L} \quad\Longrightarrow\quad y_I = L\tan\alpha = \frac{L}{\sqrt{3}}\,.$$

Approche plus générale

La connaissance de la position (vectorielle !) de la bille à chaque instant $\vec{r}_b(t)$ permet de résoudre toutes les questions relatives à sa cinématique.
En choisissant l'instant de départ $t_0 = 0$, l'horaire est donné par

$$\vec{r}_b(t) = \vec{v}_0\, t\,.$$

En projetant cette équation vectorielle selon $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$, on obtient les deux équations scalaires suivantes :

$$\begin{aligned} x_b(t) &= v_{0x}\, t = v_0 \cos\alpha\, t\,, \\ y_b(t) &= v_{0y}\, t = v_0 \sin\alpha\, t\,. \end{aligned}$$

Dans cette description, le temps de séjour t_s est égal à l'instant où la bille quitte la table au point I :

$$\vec{r}_b(t_s) = \overrightarrow{OI}\,.$$

En projetant cette équation vectorielle selon $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$, on obtient les deux équations scalaires suivantes :

$$\begin{aligned} x_b(t_s) &= v_0 \cos\alpha\, t_s = L\,, \\ y_b(t_s) &= v_0 \sin\alpha\, t_s = y_I\,. \end{aligned}$$

La première de ces équations donne le temps nécessaire à la bille pour parcourir une distance L (selon $\vec{e}_x$) :

$$t_s = \frac{L}{v_0\cos\alpha} = \frac{2L}{v_0\sqrt{3}}\,.$$

La seconde équation permet alors de déterminer y_I. Plus simplement encore, le quotient membre à membre des deux équations permet d'éliminer t_s :

$$\frac{y_b(t_s)}{x_b(t_s)} = \frac{v_0 \sin\alpha \, t_s}{v_0 \cos\alpha \, t_s} = \tan\alpha = \frac{y_I}{L} \Longrightarrow y_I = L\tan\alpha = \frac{L}{\sqrt{3}} \, .$$

Remarque : si la trajectoire et le sens du mouvement sont connus, la connaissance de la distance parcourue à chaque instant permet de résoudre certains problèmes de cinématique. Notons $s_b(t)$ cette distance :

$$s_b(t) = v_0 \, t \, .$$

Exploiter le critère caractérisant le temps de séjour de la bille sur la table.
Dans cette description, le temps de séjour t_s est égal à l'instant où la bille quitte la table au point I :

$$s_b(t_s) = ||\overrightarrow{OI}|| \, ,$$

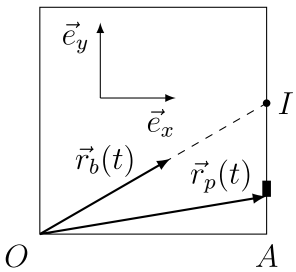
la distance entre O et I étant donnée par le théorème de Pythagore.
Alors

$$s_b(t_s) = v_0 \, t_s = \sqrt{L^2 + y_I^2} = L\sqrt{1 + \frac{1}{3}} = \frac{2L}{\sqrt{3}} \Longrightarrow t_s = \frac{2L}{v_0\sqrt{3}} \, .$$

Cette méthode est certes tout à fait valable. Cependant, elle n'est de loin pas aussi générale que la première méthode proposée.

Exercice 7

Le problème pose la question d'une rencontre éventuelle entre la bille et la paroi mobile : se trouvent-elles au même endroit à un instant donné ?
Notons $\vec{r}_b(t)$ et $\vec{r}_p(t)$ les positions respectives de la bille et de la paroi mobile à l'instant t par rapport à l'origine choisie en O .



Il y a rencontre entre ces deux objets ssi

$$\exists \, t_r \text{ t.q. } \vec{r}_b(t_r) = \vec{r}_p(t_r) \, ,$$

c'est-à-dire ssi il existe un instant t_r auquel les positions (vectorielles !) coïncident.

Donnons l'équation horaire de la bille $\vec{r}_b(t)$ d'une part et celle de la paroi mobile $\vec{r}_p(t)$ d'autre part (par rapport à la même origine).
La bille est en MRU avec la vitesse $\vec{v}_0$ et part de O à l'instant $t = 0$:

$$\vec{r}_b(t) = \vec{v}_0 \, t \, .$$

La paroi mobile est en MRU avec la vitesse $\vec{v}_p$ et part de A à l'instant $t = 0$:

$$\vec{r}_p(t) = \vec{v}_p \, t + \vec{r}_{p0}$$

avec $\vec{r}_{p0} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix}$.
Le critère de rencontre devient

$$\begin{aligned} \vec{r}_b(t_r) &= \vec{r}_p(t_r) \\ \vec{v}_0 \, t_r &= \vec{v}_p \, t_r + \vec{r}_{p0} \, . \end{aligned}$$

Selon $\vec{e}_x$:

$$v_0 \cos\alpha \, t_r = L$$

Selon $\vec{e}_y$:

$$v_0 \sin\alpha \, t_r = v_0 \, t_r \, .$$

La seconde équation impose que $\sin\alpha = 1$ pour $t_r \neq 0$, ce qui est faux.
Un tel temps de rencontre n'existe donc pas.

Modifions alors l'instant de départ t_{p0} de la paroi pour que la rencontre ait lieu : la bille et la paroi mobile doivent se trouver au même endroit à un instant donné.
La bille est en MRU avec la vitesse $\vec{v}_0$ et part de O à l'instant $t = 0$:

$$\vec{r}_b(t) = \vec{v}_0 \, t \, .$$

La paroi mobile est en MRU avec la vitesse $\vec{v}_p$ et part de A à l'instant t_{p0} :

$$\vec{r}_p(t) = \vec{v}_p \,(t - t_{p0}) + \vec{r}_{p0}$$

avec $\vec{r}_{p0} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix}$.
Le critère de rencontre devient

$$\begin{aligned} \vec{r}_b(t_r) &= \vec{r}_p(t_r) \\ \vec{v}_0 \, t_r &= \vec{v}_p \,(t_r - t_{p0}) + \vec{r}_{p0} \, . \end{aligned}$$

Selon $\vec{e}_x$:

$$v_0 \cos\alpha \, t_r = L$$

Selon $\vec{e}_y$:

$$v_0 \sin\alpha \, t_r = v_0 \,(t_r - t_{p0}) \, .$$

La rencontre doit avoir lieu dans les deux composantes ! Autrement dit, l'instant de départ t_{p0} de la paroi doit être tel que t_r vérifie les deux équations simultanément.
La première équation donne

$$t_r = \frac{L}{v_0 \cos\alpha} = \frac{2L}{v_0\sqrt{3}} \, .$$

La seconde équation donne finalement

$$t_{p0} = (1 - \sin\alpha)\, t_r = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \frac{2L}{v_0\sqrt{3}} = \frac{L}{v_0\sqrt{3}} \, .$$

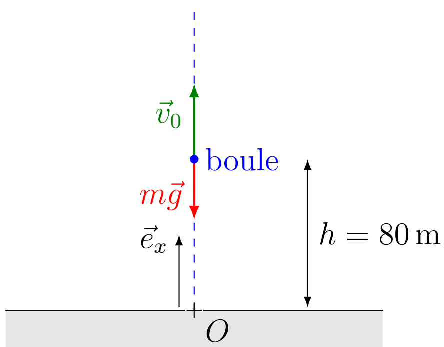
Exercice 8

Tout d'abord, on détermine la (ou les) force(s) extérieure(s) qui s'exerce(nt) sur la boule.
Puis, on écrit les lois de la dynamique avant de les projeter selon un repère choisi.
Une fois lancée, la boule de masse m ne subit que son poids. Elle est donc en chute libre :

$$m\vec{g} = m\vec{a} \, .$$

Nous choisissons par exemple d'orienter le repère vers le haut et de placer l'origine au sol :

$$\vec{a} = \vec{g} = -g\vec{e}_x \, .$$



En tenant compte de la condition initiale $v(0) = v_0 = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $x(0) = h = 80\,\mathrm{m}$, nous obtenons successivement, en projetant selon $\vec{e}_x$,

$$\begin{aligned} a(t) &= -g\,, \\ v(t) &= -gt + v_0\,, \\ x(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h\,. \end{aligned}$$

Le temps de chute t_c correspond à une hauteur nulle (impact sur le sol) :

$$x(t_c) = -\frac{1}{2}gt_c^2 + v_0 t_c + h = 0\,.$$

On en déduit

$$t_c \cong 4.25\,\mathrm{s}\,,$$

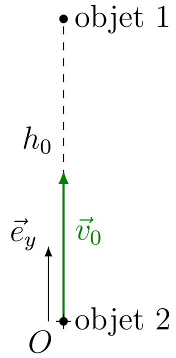
où l'on a utilisé $g \cong 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.
La vitesse au moment de l'impact est la vitesse au temps de chute :

$$v(t_c) = -gt_c + v_0 \cong -39.67\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Exercice 9

On commence par visualiser et représenter la situation grâce à un dessin soigné. On choisit ensuite, judicieusement, un repère pour la description des mouvements. Pour appliquer le critère de rencontre, il convient de déterminer la position des deux objets à chaque instant.

Notons h_0 la hauteur initiale de l'objet 1 et $\vec{v}_0$ la vitesse initiale de l'objet 2 :



Remarque : tous les mouvements se font selon la verticale.

(a) **Critère de rencontre :**

$$\exists\, t_r,\ \vec{r}_1(t_r) = \vec{r}_2(t_r)\,.$$

L'objet 1 est en chute libre.
Ainsi,

$$\vec{a}_1(t) = \vec{g} \quad \forall\, t\,.$$

Selon $\vec{e}_y$,

$$a_1(t) = -g \quad \forall\, t\,.$$

Fixons l'origine au niveau du sol et l'instant $t = 0$ en début de chute.
La vitesse initiale est nulle. Alors,

$$\vec{v}_1(t) = \vec{g}\, t \quad \forall\, t\,.$$

Selon $\vec{e}_y$,

$$v_1(t) = -gt \quad \forall\, t\,.$$

La position initiale se situe à la hauteur h_0. Alors,

$$\vec{r}_1(t) = \frac{1}{2}\vec{g}\, t^2 + \vec{r}_{10} \quad \forall\, t\,.$$

Selon $\vec{e}_y$,

$$y_1(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h_0 \quad \forall\, t \quad \text{, avec } h_0 = +20\,\mathrm{m}\,.$$

L'objet 2 est en chute libre.
Ainsi,

$$\vec{a}_2(t) = \vec{g} \quad \forall\, t\,.$$

Selon $\vec{e}_y$,

$$a_2(t) = -g \quad \forall\, t\,.$$

Remarque : pour pouvoir par la suite comparer les positions des deux objets, il faut prendre les mêmes origines spatiale et temporelle !
La vitesse initiale est verticale. Alors,

$$\vec{v}_2(t) = \vec{g}\, t + \vec{v}_0 \quad \forall\, t\,.$$

Selon $\vec{e}_y$,

$$v_2(t) = -gt + v_0 \quad \forall\, t\,.$$

La position initiale est nulle. Alors,

$$\vec{r}_2(t) = \frac{1}{2}\vec{g}\,t^2 + \vec{v}_0\,t \quad \forall\, t\,.$$

Selon $\vec{e}_y$,

$$y_2(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \quad \forall\, t \quad , \text{avec } v_0 = +16\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,.$$

On applique alors le critère (vectoriel) pour la rencontre des objets.
Selon $\vec{e}_y$, la condition de rencontre est $y_1(t_r) = y_2(t_r)$:

$$-\frac{1}{2}gt_r^2 + h_0 = -\frac{1}{2}gt_r^2 + v_0 t_r \Rightarrow t_r = \frac{h_0}{v_0} = \frac{20\,\mathrm{m}}{16\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = 1.25\,\mathrm{s}.$$

L'instant t_r existe, la rencontre a lieu.
Connaissant le mouvement des objets et l'instant de leur rencontre, on calcule l'endroit de la rencontre. Par exemple avec la position de l'objet 1 (égale à celle de l'objet 2),

$$y_1(t_r) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{h_0}{v_0}\right)^2 + h_0 = -\frac{1}{2}\cdot 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}\cdot(1.25\,\mathrm{s})^2 + 20\,\mathrm{m} = 12.34\,\mathrm{m}\,.$$

(b) Pour répondre à la question posée, on utlise un **critère d'arrivée au sol** : un objet est au sol si sa hauteur est nulle.
Objet 1 : il touche le sol à l'instant t_1 tel que

$$y_1(t_1) = 0\,.$$

Alors

$$y_1(t_1) = -\frac{1}{2}gt_1^2 + h_0 = 0 \;\Rightarrow\; t_1 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 20\,\mathrm{m}}{9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}}} = 2.02\,\mathrm{s}$$

Objet 2 : il touche le sol à l'instant t_2 tel que

$$y_2(t_2) = 0\,.$$

Alors

$$y_2(t_2) = -\frac{1}{2}gt_2^2 + v_0 t_2 = \left(-\frac{1}{2}gt_2 + v_0\right)t_2 = 0\,.$$

Les solutions sont

$$t_2 = 0 \text{ (sans intérêt)} \qquad \text{ou} \qquad t_2 = \frac{2v_0}{g} = \frac{2\cdot 16\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 3.26\,\mathrm{s}.$$

L'intervalle entre les impacts avec le sol est donc

$$t_2 - t_1 = 1.24\,\mathrm{s}.$$

(c) On modifie les conditions initiales pour satisfaire à la nouvelle condition de rencontre. Les équations du mouvement restent les mêmes, à la différence que la vitesse $\vec{v}_0$ n'est pas connue. Toutes les expressions obtenues pour le temps de rencontre et la hauteur de rencontre restent valables. En particulier, le temps de croisement est donné par $t_r = \dfrac{h_0}{v_0}$.
Nous cherchons v_0 telle que, à cet instant t_r, les objets se trouvent à mi-hauteur :

$$y_1(t_r) = y_2(t_r) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{h_0}{v_0}\right)^2 + h_0 = \frac{h_0}{2}$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{gh_0} = \sqrt{9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}\cdot 20\,\mathrm{m}} = 14.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$