Physique
Semestre de printemps 2025

Roger Sauser
Raphaël Butté
Guido Burmeister

https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15842

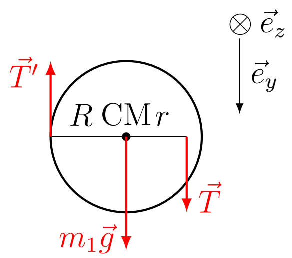
Corrigé 11

Exercice 1

Il n'est pas judicieux de choisir comme objet cylindre et contrepoids, ces deux parties ne bougeant pas de la même manière. Ainsi,

- on considère tour à tour le cylindre et la masse
- on établit la liaison géométrique entre leurs mouvements.

a) Cylindre



Objet : cylindre

Forces : poids, tensions

Le CM est accéléré :

$$m_1\vec{g} + \vec{T} + \vec{T}' = m_1\vec{a}_1 \,.$$

Selon $\vec{e}_y$,

$$m_1 g + T - T' = m_1 a_1 \,.$$

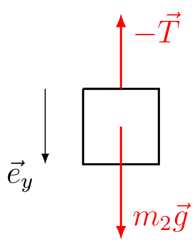
Rotation autour du CM :

$$\vec{M}_{\mathrm{CM}} = \underbrace{\vec{M}_{\mathrm{CM}}(m_1\vec{g})}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{M}_{\mathrm{CM}}(\vec{T})}_{\otimes} + \underbrace{\vec{M}_{\mathrm{CM}}(\vec{T}')}_{\otimes} = I_{\mathrm{CM}}\dot{\vec{\omega}}_{\mathrm{CM}}$$

Selon $\vec{e}_z$:

$$rT + RT' = I_{\mathrm{CM}}\dot{\omega}_{\mathrm{CM}} \,.$$

b) Masse (contrepoids)



Objet : contrepoids

Forces : poids, tension

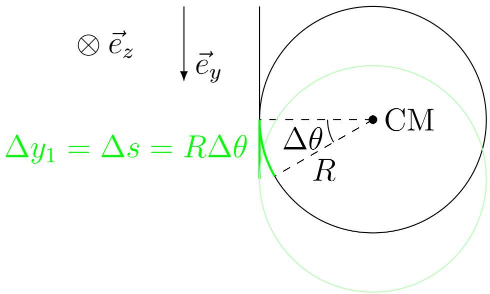
$$m_2\vec{g} - \vec{T} = m_2\vec{a}_2$$

Selon $\vec{e}_y$:

$$m_2 g - T = m_2 a_2 \,.$$

c) Liaison géométrique

Pour établir les équations de liaison, on peut considérer un petit angle de rotation du cylindre et déterminer le mouvement correspondant du CM du cylindre et celui du contrepoids.

- 

Si, pendant Δt, le cylindre tourne d'un angle $\Delta\theta$ dans le sens donné par $\vec{e}_z$, le fil à gauche se déroule de

$$\Delta s = R\Delta\theta$$

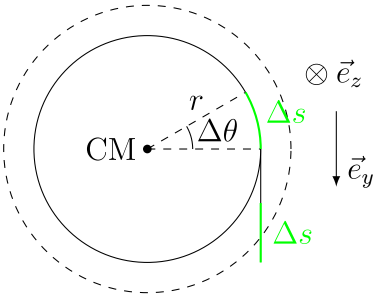
et le CM du cylindre se déplace de

$$\Delta y_1 = \Delta s = R\Delta\theta$$

dans le sens donné par $\vec{e}_y$.

Les variations temporelles (dérivées) donnent alors

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y_1}{\Delta t} = R\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad\Leftrightarrow\quad v_1 = R\omega_{\mathrm{CM}} \quad\Rightarrow\quad a_1 = R\dot{\omega}_{\mathrm{CM}}\,.$$

- 

Si, pendant Δt, le cylindre tourne d'un angle $\Delta\theta$ dans le sens donné par $\vec{e}_z$, le fil se déroule et le contrepoids se déplace de $\Delta s = r\Delta\theta$ **par rapport au cylindre** dans le sens donné par $\vec{e}_y$.
Donc par rapport au plafond, m_2 se déplace de

$$\Delta y_2 = \Delta y_1 + \Delta s = (R+r)\Delta\theta$$

dans le sens donné par $\vec{e}_y$.

Les variations temporelles (dérivées) donnent alors

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y_2}{\Delta t} = (R+r)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad\Leftrightarrow\quad v_2 = (R+r)\omega_{\mathrm{CM}} \quad\Rightarrow\quad a_2 = (R+r)\dot{\omega}_{\mathrm{CM}}\,.$$

d) Résolution du système

$$\left\{\begin{array}{rcl} m_1g + T - T' &=& m_1a_1 \\ rT + RT' &=& I_{\mathrm{CM}}\dot{\omega}_{\mathrm{CM}} \\ m_2g - T &=& m_2a_2 \\ a_1 &=& R\dot{\omega}_{\mathrm{CM}} \\ a_2 &=& (R+r)\dot{\omega}_{\mathrm{CM}}\,. \end{array}\right.$$

Il est souvent plus simple de d'abord exprimer les accélérations en fonction de $\dot{\omega}_{\mathrm{CM}}$ et de résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} m_1g + T - T' &=& m_1R\dot{\omega}_{\mathrm{CM}} \\ rT + RT' &=& I_{\mathrm{CM}}\dot{\omega}_{\mathrm{CM}} \\ m_2g - T &=& m_2(R+r)\dot{\omega}_{\mathrm{CM}} \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \cdot R \\ \cdot 1 \\ \cdot (R+r) \end{array}\right.$$

en amplifiant les équations respectivement par R, 1 et $R+r$, de sorte que l'addition membre à membre fasse tomber les termes en T et T', inconnues non recherchées. On obtient alors

$$m_1gR + m_2g(R+r) = (m_1R^2 + I_{\mathrm{CM}} + m_2(R+r)^2)\dot{\omega}_{\mathrm{CM}}\,.$$

Il vient alors (avec $I_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{2}m_1R^2$ pour un cylindre plein)

$$\dot{\omega}_{\mathrm{CM}} = \frac{m_1gR + m_2g(R+r)}{\frac{3}{2}m_1R^2 + m_2(R+r)^2} = \frac{2m_1 + 2m_2(1+p)}{3m_1 + 2m_2(1+p)^2}\,\frac{g}{R}$$

et donc

$$
\begin{aligned}
a_1 &= R\dot{\omega}_{\mathrm{CM}} = \frac{2m_1 + 2m_2(1+p)}{3m_1 + 2m_2(1+p)^2}\, g \\
a_2 &= R(1+p)\dot{\omega}_{\mathrm{CM}} = \frac{2m_1(1+p) + 2m_2(1+p)^2}{3m_1 + 2m_2(1+p)^2}\, g \,.
\end{aligned}
$$

Discussion

- Comme $2m_1 < 3m_1$ et $2m_2(1+p) < 2m_2(1+p)^2$, on a $0 < a_1 < g$. Le CM du cylindre accélère vers le bas et moins fortement qu'en chute libre.
- Comme $a_2 > 0$, m_2 accélère bien vers le bas. Mais elle ne peut pas le faire aussi fortement qu'en chute libre (la tension ne peut pas pousser m_2 vers le bas). La relation est donc correcte seulement si $a_2 < g$, soit si $1 + p < 1 \Leftrightarrow p < \frac{1}{2}$!
  Si $p > \frac{1}{2}$, le fil est détendu et m_2 est en chute libre. En effet, le calcul de T donne

$$
\begin{aligned}
T = m_2(g - a_2) &= \left(1 - \frac{2m_1(1+p) + 2m_2(1+p)^2}{3m_1 + 2m_2(1+p)^2}\right) m_2 g \\
&= \left(\frac{3m_1 + 2m_2(1+p)^2 - 2m_1(1+p) - 2m_2(1+p)^2}{3m_1 + 2m_2(1+p)^2}\right) m_2 g \\
&= \left(\frac{m_1(1-2p)}{3m_1 + 2m_2(1+p)^2}\right) m_2 g
\end{aligned}
$$

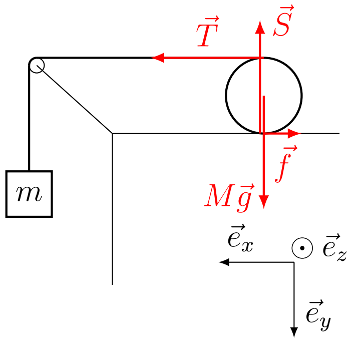
  d'où la condition $T > 0 \Leftrightarrow p < \frac{1}{2}$.

Exercice 2

Comme dans l'exercice 1,

- on considère tour à tour le cylindre et la masse
- on établit la liaison géométrique entre leurs mouvements.

a) Cylindre



Objet : cylindre

Forces : poids, soutien, tension, frottement

Le CM est accéléré :

$$M\vec{g} + \vec{S} + \vec{T} + \vec{f} = M\vec{a}_M \,.$$

Selon $\vec{e}_x$,

$$T - f = Ma_M \quad (a_{M,y} = 0)\,.$$

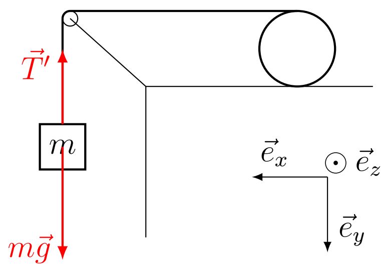
Rotation autour du CM :

$$\vec{M}_{\mathrm{CM}} = \underbrace{\vec{M}_{\mathrm{CM}}(M\vec{g})}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{M}_{\mathrm{CM}}(\vec{S})}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{M}_{\mathrm{CM}}(\vec{T})}_{\odot} + \underbrace{\vec{M}_{\mathrm{CM}}(\vec{f})}_{\odot} = I_{\mathrm{CM}}\dot{\vec{\omega}}_{\mathrm{CM}}$$

Selon $\vec{e}_z$:

$$RT + Rf = I_{\mathrm{CM}}\dot{\omega}_{\mathrm{CM}}\,.$$

b) Masse (contrepoids)



Objet : contrepoids

Forces : poids, tension

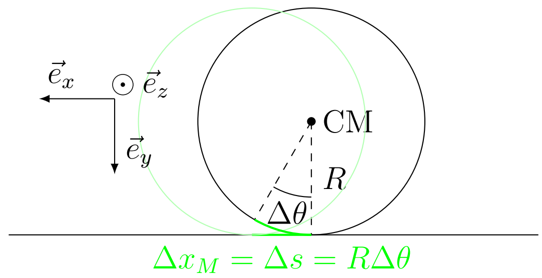
$$m\vec{g} + \vec{T}' = m\vec{a}_m$$

Selon $\vec{e}_y$:

$$mg - T = ma_m\,.$$

c) Liaison géométrique

Pour établir les équations de liaison, on peut considérer un petit angle de rotation du cylindre et déterminer le mouvement correspondant du CM du cylindre et celui du contrepoids.

- 

  Si, pendant Δt, le cylindre tourne d'un angle $\Delta\theta$ dans le sens donné par $\vec{e}_z$, il "enroule" sur le sol une longueur

  $$\Delta s = R\Delta\theta$$

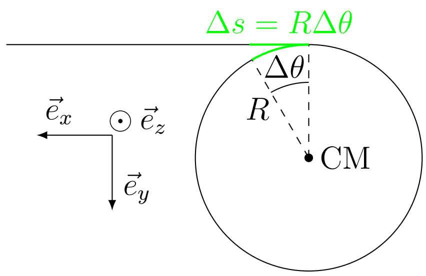
  et le CM du cylindre se déplace de

  $$\Delta x_M = \Delta s = R\Delta\theta$$

  dans le sens donné par $\vec{e}_x$.

  Les variations temporelles (dérivées) donnent alors

  $$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x_M}{\Delta t} = R\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad\Leftrightarrow\quad v_M = R\omega_{\mathrm{CM}} \quad\Rightarrow\quad a_M = R\dot{\omega}_{\mathrm{CM}}\,.$$

- 

  Si, pendant Δt, le cylindre tourne d'un angle $\Delta\theta$ dans le sens donné par $\vec{e}_z$, le fil se déroule et le contrepoids se déplace de $\Delta s = R\Delta\theta$ **par rapport au cylindre** dans le sens donné par $\vec{e}_y$. Comme le cylindre avance de Δx_M, m se déplace de

  $$\Delta y_m = \Delta x_M + \Delta s = 2R\Delta\theta$$

  dans le sens donné par $\vec{e}_y$.

  Les variations temporelles (dérivées) donnent alors

  $$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y_m}{\Delta t} = 2R\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad\Leftrightarrow\quad v_m = 2R\omega_{\mathrm{CM}} \quad\Rightarrow\quad a_m = 2R\dot{\omega}_{\mathrm{CM}}\,.$$

d) Résolution du système

$$\begin{cases} T - f &= Ma_M \\ RT + Rf &= I_{\mathrm{CM}}\dot{\omega}_{\mathrm{CM}} \\ mg - T &= ma_m \\ a_M &= R\dot{\omega}_{\mathrm{CM}} \\ a_m &= 2R\dot{\omega}_{\mathrm{CM}}\,. \end{cases}$$

Il est souvent plus simple de d'abord exprimer les accélérations en fonction de $\dot{\omega}_{\text{CM}}$ et de résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcl|l} T-f & = & MR\dot{\omega}_{\text{CM}} & \cdot R \\ RT+Rf & = & I_{\text{CM}}\dot{\omega}_{\text{CM}} & \cdot 1 \\ mg-T & = & m2R\dot{\omega}_{\text{CM}} & \cdot 2R \end{array}\right.$$

en amplifiant les équations respectivement par R, 1 et $2R$, de sorte que l'addition membre à membre fasse tomber les termes en T et f, inconnues non recherchées. On obtient alors

$$2mgR = (MR^2 + I_{\text{CM}} + 4mR^2)\dot{\omega}_{\text{CM}}\,.$$

Avec $I_{\text{CM}} = \frac{1}{2}MR^2$ pour un cylindre plein, il vient

$$\dot{\omega}_{\text{CM}} = \frac{2mgR}{MR^2 + I_{\text{CM}} + 4mR^2} = \frac{4mg}{(3M+8m)R}$$

et donc

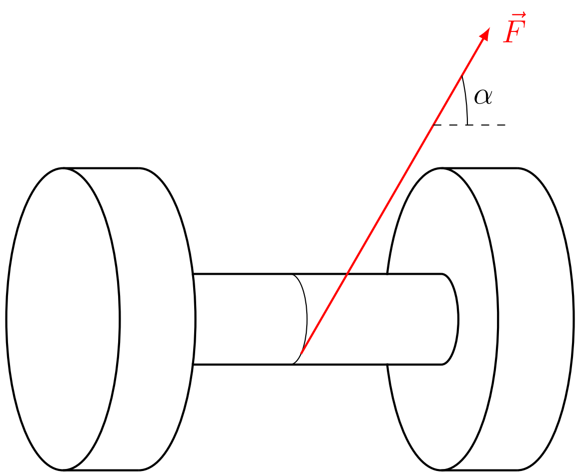
$$\begin{aligned} a_M &= R\dot{\omega}_{\text{CM}} = \frac{4m}{3M+8m}\,g > 0 \\ a_m &= 2R\dot{\omega}_{\text{CM}} = \frac{8m}{3M+8m}\,g > 0\,. \end{aligned}$$

Le cylindre accélère vers la gauche et la masse vers le bas.

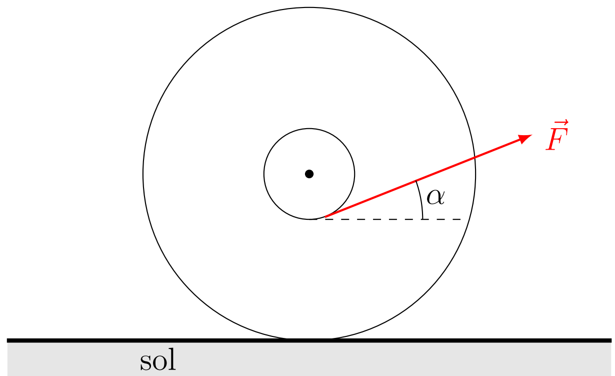
Exercice 3

On considère l'objet "haltère" pour la **translation** (**deuxième loi de Newton**) et pour la **rotation** (**théorème du moment cinétique**).

Commençons par faire un dessin de l'haltère en trois dimensions :

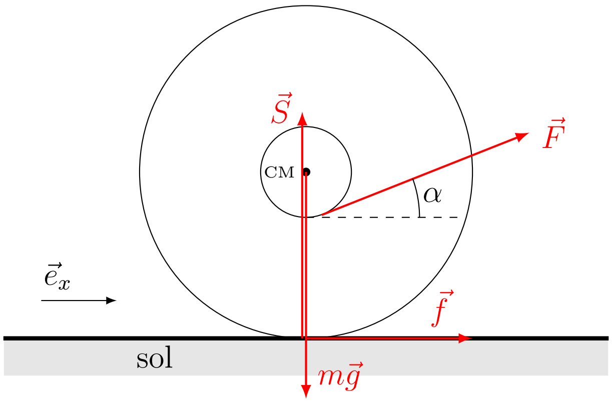


On peut également représenter l'haltère telle qu'elle apparaît perpendiculairement à son axe de rotation :



On note que le point de contact avec le support est plus éloigné du centre que le point de contact avec le fil.

Nous allons appliquer la **deuxième loi de Newton** à l'objet "haltère" :



Objet : haltère

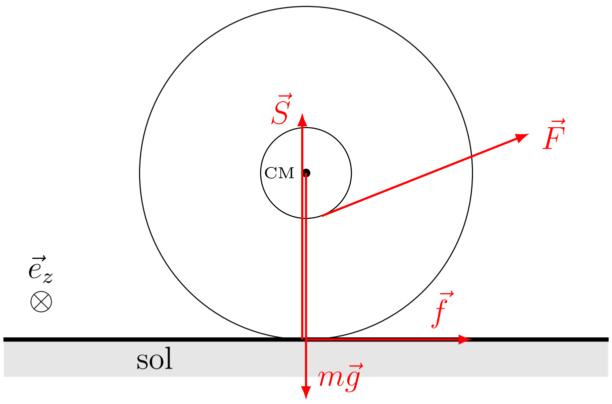
$$\vec{F} + \vec{f} + m\vec{g} + \vec{S} = m\vec{a}_{\text{CM}}\,.$$

Selon $\vec{e}_x$:

$$F\cos\alpha + f = ma_{\text{CM}}\,.$$

Il convient de remarquer que le sens de la force de frottement $\vec{f}$ n'est pas connu a priori. Dans l'équation ci-dessus, sa composante f selon $\vec{e}_x$ peut donc être positive ou négative.

Nous allons maintenant considérer le **théorème du moment cinétique** appliqué à l'objet "haltère" :



Rotation par rapport au CM :

$$\vec{M}_{\text{CM}} = I_{\text{CM}}\dot{\vec{\omega}}\,.$$

Selon $\vec{e}_z$:

$$-rF - Rf = I_{\text{CM}}\dot{\omega}\,.$$

Comme on suppose que le cylindre roule sans glisser, l'**équation de liaison** s'écrit :

$$a_{\text{CM}} = R\dot{\omega}\,.$$

On obtient le **sytème suivant** :

$$\left.\begin{array}{rcl} F\cos\alpha + f &=& mR\dot{\omega} \\ -rF - Rf &=& I_{\text{CM}}\dot{\omega} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad FR\cos\alpha - rF = mR^2\dot{\omega} + I_{\text{CM}}\dot{\omega}\,.$$

Ainsi,

$$F(R\cos\alpha - r) = (mR^2 + I_{\text{CM}})\dot{\omega}\,,$$

de sorte que l'accélération angulaire et l'accélération s'écrivent :

$$\dot{\omega} = \frac{R\cos\alpha - r}{mR^2 + I_{\text{CM}}}F \quad \text{et} \quad a_{\text{CM}} = R\dot{\omega} = \frac{R\cos\alpha - r}{mR^2 + I_{\text{CM}}}RF\,.$$

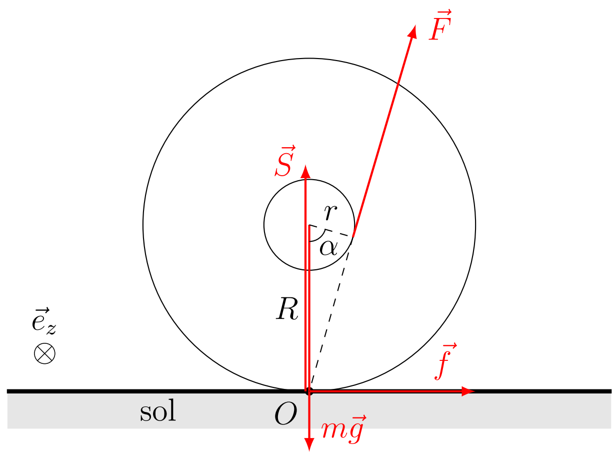
On peut alors trouver l'expression de la force de frottement :

$$\begin{aligned} f &= -\frac{rF}{R} - \frac{I_{\text{CM}}F}{R}\frac{R\cos\alpha - r}{mR^2 + I_{\text{CM}}} \\ &= -\frac{rmR + rI_{\text{CM}}/R + I_{\text{CM}}\cos\alpha - rI_{\text{CM}}/R}{mR^2 + I_{\text{CM}}}F \\ &= -\frac{rmR + I_{\text{CM}}\cos\alpha}{mR^2 + I_{\text{CM}}}F\,. \end{aligned}$$

Il est intéressant de discuter le signe de l'accélération de manière à caractériser complètement le mouvement de l'haltère :

- Si $R\cos\alpha - r > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos\alpha > \frac{r}{R}$ (situation où $|\alpha|$ est petit), l'accélération est dirigée vers la droite et la force de frottement vers la gauche ($f < 0$).
- Si $R\cos\alpha - r = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos\alpha = \frac{r}{R}$, l'haltère est immobile et la force de frottement est vers la gauche ($f = -\frac{r}{R}F$).
- Si $R\cos\alpha - r < 0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos\alpha < \frac{r}{R}$ (situation où $|\alpha|$ est grand), l'accélération est dirigée vers la gauche et la force de frottement est vers la gauche ou la droite selon le moment d'inertie.

On se convainc facilement de l'existence de ces trois situations en considérant le moment des forces extérieures par rapport au point de contact O avec le support.



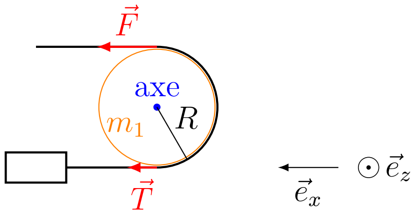
Le moment des forces $\vec{S}$, $m\vec{g}$ et $\vec{f}$ est toujours nul par rapport à ce point. A l'équilibre, le moment de $\vec{F}$ doit donc être nul, ce qui signifie que le support de $\vec{F}$ (tangent au cylindre intérieur) passe par O, d'où $\cos\alpha = \frac{r}{R}$.

Exercice 4 (facultatif)

Nous allons appliquer le théorème du moment cinétique à la masse en rotation m_1. Il sera également nécessaire de décrire le mouvement de translation horizontal des deux masses m_1 et m_2.

Dynamique de l'objet "roue"

Appelons $\vec{T}$ la tension dans le fil entre la roue et la masse m_2.



Avec le choix de $\vec{e}_x$ dirigé vers la gauche et $\vec{e}_z$ sortant, la deuxième équation de Newton appliquée à la roue s'écrit

$$F + T = m_1 a_1 \,.$$

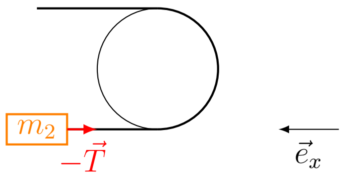
D'autre part, dans le référentiel du CM et par rapport à un axe passant par le CM, le théorème du moment cinétique fournit

$$R(F - T) = I\dot{\omega}\,,$$

où R est le rayon de la roue.

Dynamique de la masse m_2

La masse ne tourne pas, mais subit une accélération dont l'expression est donnée par la deuxième loi de Newton projetée selon $\vec{e}_x$:

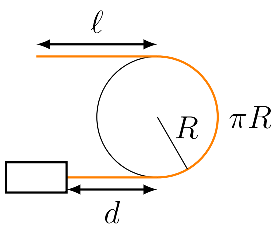


$$-T = m_2 a_2 \,.$$

(a) Nous avons obtenu un système de trois équations :

$$\begin{cases} F + T &= m_1 a_1\,, \\ R(F - T) &= I\dot{\omega}\,, \\ -T &= m_2 a_2\,. \end{cases}$$

Nous devons maintenant établir le lien entre a_1, a_2 et $\dot{\omega}$.
Si ℓ est la longueur du fil entre la roue et l'extrémité du fil et d la longueur du fil entre la roue et la masse, on a



$$\ell + \pi R + d = L \, .$$

Cela implique que

$$\dot{\ell} + \dot{d} = 0$$

(toute longueur prise sur l'un des morceaux se retrouve sur l'autre).

De plus, lorsque la roue tourne d'un angle φ, la longueur ℓ gagne $R\varphi$. Ainsi $\dot{\ell} = R\omega$.

Comme $d = x_2 - x_1$, x_2 et x_1 étant les positions respectives de m_2 et m_1, il vient

$$\ddot{\ell} + \ddot{d} = R\dot{\omega} + a_2 - a_1 = 0 \, .$$

Notre système d'équations est donc finalement, avec $I = m_1 R^2$,

$$\left\{ \begin{array}{rcc} F + T & = & m_1 a_1 \, , \\ F - T & = & m_1 R \dot{\omega} \, , \\ -T & = & m_2 a_2 \, , \\ 0 & = & R\dot{\omega} + a_2 - a_1 \, . \end{array} \right.$$

Résolution : variante I En éliminant T dans les deux premières équations, il vient

$$2F = m_1 a_1 + m_1 R\dot{\omega} = m_1(a_1 + R\dot{\omega}) \, .$$

D'autre part, en réécrivant la deuxième équation à l'aide des deux dernières relations du système, on obtient

$$F + m_2 a_1 = (m_1 R + m_2 R) \, \dot{\omega} \, .$$

Les accélérations de translation et angulaire de la roue ont donc pour expression

$$a_1 = \frac{F}{m_1} \quad \text{et} \quad \dot{\omega} = \frac{F}{m_1 R} \, .$$

On remarque que $a_1 = R\dot{\omega}$, ce qui traduit bien le fait que la roue est entraînée par le fil lorsque ce dernier ne glisse pas sur celle-ci.
Finalement, l'accélération de la masse m_2 et la tension dans le fil sont quant à elles données par

$$a_2 = 0 \quad \text{et} \quad T = 0 \, .$$

Résolution : variante II Eliminons pour commencer a_1, $\dot{\omega}$ et a_2 : multiplions l'éq. 1 par $\frac{1}{m_1}$, l'éq. 2 par $-\frac{1}{m_1}$, l'éq. 3 par $-\frac{1}{m_2}$ et additionnons les 4 équations. Il vient

$$\frac{1}{m_1}(F + T) - \frac{1}{m_1}(F - T) + \frac{1}{m_2} T = 0 \Rightarrow T = 0 \, .$$

Ainsi

$$a_2 = 0 \qquad a_1 = R\dot{\omega} \qquad a_1 = \frac{F}{m_1} \qquad \dot{\omega} = \frac{F}{R m_1} \, .$$

(b) Nous avons obtenu un système de trois équations :

$$\left\{ \begin{array}{rcc} F + T & = & m_1 a_1 \, , \\ R(F - T) & = & I\dot{\omega} \, , \\ -T & = & m_2 a_2 \, . \end{array} \right.$$

Lorsque le fil glisse sur la roue, cette dernière n'est pas entraînée par le fil et $\dot{\omega} = 0$. Ainsi,

$$T = F \, .$$

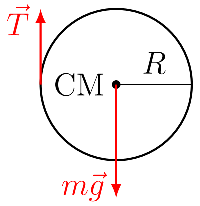
Les accélérations de la roue m_1 et de la masse m_2 sont alors données par

$$a_1 = \frac{2F}{m_1} \quad \text{et} \quad a_2 = -\frac{F}{m_2}\,.$$

Exercice 5

Le théorème de l'énergie cinétique s'applique à un objet choisi. Il convient donc de procéder comme d'habitude : dessin, choix de l'objet, identification des forces, lois de la dynamique.

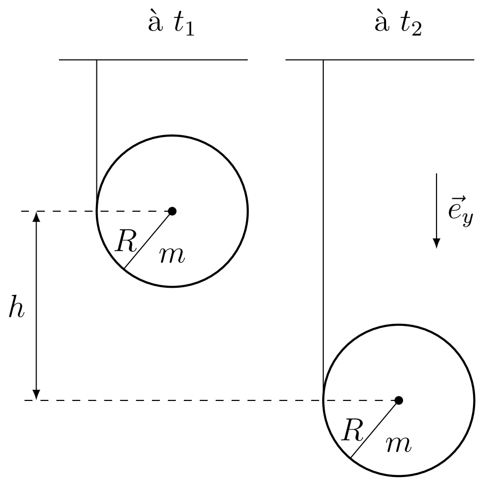
Nous allons considérer le cylindre :



Objet : cylindre

Forces : poids, tension

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au cylindre :



Théorème de l'énergie cinétique entre l'instant initial t_1 , la situation (1), et l'instant final t_2 , la situation (2) :

$$E_{\text{cin}}(2) - E_{\text{cin}}(1) = W^{\text{ext}}_{1\to 2}\,,$$

où l'énergie cinétique du solide (la somme de l'énergie cinétique de toutes les parties) peut s'écrire comme somme des énergies cinétiques de translation du CM et de rotation autour du CM :

$$E_{\text{cin}} = E_{\text{cin,CM}} + E_{\text{cin,rot}}\,.$$

Ecrivons l'énergie cinétique initiale et finale. Initialement (instant t_1) le cylindre est immobile. Après une descente d'une distance h , sa vitesse (celle de son CM) est $\vec{v}_2$ et sa vitesse angulaire autour du CM est $\vec{\omega}_2$:

$$\begin{aligned}
E_{\text{cin}}(1) &= E_{\text{cin,CM}}(1) + E_{\text{cin,rot}}(1) = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2 = 0 \\
E_{\text{cin}}(2) &= E_{\text{cin,CM}}(2) + E_{\text{cin,rot}}(2) = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}I\omega_2^2\,.
\end{aligned}$$

Déterminons maintenant le travail de chacune des forces, en se souvenant que, par définition, le travail d'une force $\vec{F}$ est

$$W_{1\to 2} = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r},$$

où $d\vec{r}$ est le déplacement du point du solide sur lequel la force $\vec{F}$ est appliquée.

- Pour le poids, appliqué au CM,

$$W_{1\to 2}(m\vec{g}) = \int_1^2 m\vec{g}\cdot d\vec{r}_{\text{CM}}\,.$$

Le poids étant constant et le CM en mouvement vertical vers le bas,

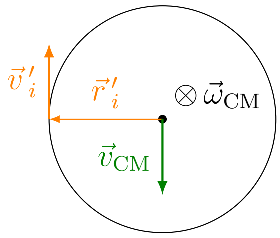
$$W_{1\to 2}(m\vec{g}) = mg\int_1^2 dy_{\text{CM}} = mgh\,.$$

Remarque : ce travail est positif.

- Pour la tension, appliquée au morceau m_i du cylindre lorsqu'il atteint le fil vertical (point C)

$$W_{1\to 2}(\vec{T}) = \int_1^2 \vec{T}\cdot d\vec{r}_i\,.$$

Dans le référentiel du CM, tout m_i sur le cylindre est en rotation autour du CM.



$$\vec{v}'_i = \vec{\omega}_{\text{CM}} \times \vec{r}'_i\,.$$

Dans le référentiel d'inertie, la vitesse de m_i est alors

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{\text{CM}} + \vec{v}'_i = \vec{v}_{\text{CM}} + \vec{\omega}_{\text{CM}} \times \vec{r}'_i\,.$$

En particulier, lorsque m_i atteint le le point C, d'une part $\vec{v}_{\text{CM}}$ est dirigée vers le bas et de norme $R\omega_{\text{CM}}$ (si le fil se déroule de $\Delta s = R\Delta\theta$, le CM descend d'autant) et d'autre part $\vec{\omega}_{\text{CM}} \times \vec{r}'_i$ est vers le haut et de norme $R\omega_{\text{CM}}$,

$$\vec{v}_i = \vec{0} \quad \text{en } C\,.$$

On dit que C est le centre instantané de rotation.
Pendant une durée infinitésimale dt, le déplacement $d\vec{r}_i$ de m_i est donc nul et le travail de la tension également :

$$W_{1\to 2}(\vec{T}) = \int_1^2 \vec{T}\cdot d\vec{r}_i = 0\,.$$

Revenons au théorème de l'énergie cinétique. Ce dernier s'écrit ainsi

$$\begin{aligned} E_{\text{cin}}(2) - E_{\text{cin}}(1) &= W^{\text{ext}}_{1\to 2} \\ \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}I\omega_2^2 &= mgh\,. \end{aligned}$$

De plus, comme déjà indiqué, le mouvement du CM et la rotation autour du CM sont liés par le déroulement du fil. A l'instant t_2,

$$v_2 = R\omega_2\,.$$

Finalement,

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}I\omega_2^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}I\frac{v_2^2}{R^2} = \frac{mR^2+I}{2R^2}\,v_2^2 = mgh\,,$$

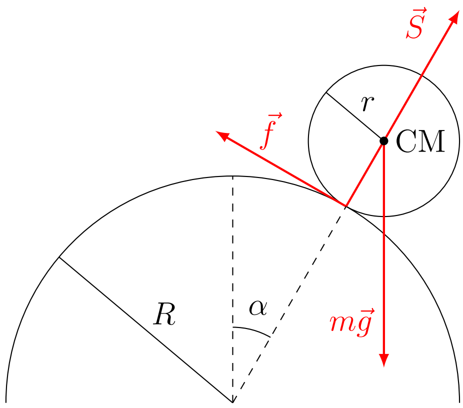
d'où

$$v_2 = \sqrt{\frac{2ghmR^2}{mR^2+I}} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{I}{mR^2}}} < \sqrt{2gh}\,.$$

L'inertie de rotation fait que la descente est plus lente qu'en chute libre.

Exercice 6

Sous l'effet du poids, la bille gagne en vitesse et finit par décrocher.
Exploiter la condition de décrochement pour l'endroit où la bille quitte la boule.
Déterminer ensuite une seconde relation entre vitesse et position de la bille.
Considérer d'abord une position quelconque pour la bille.



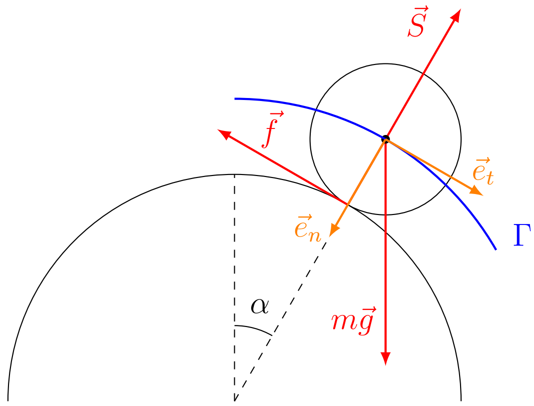
Objet : bille

Forces : poids, soutien, frottement

$$m\vec{g} + \vec{S} + \vec{f} = m\vec{a}\,.$$

Le décrochement de la bille de la surface de la boule est caractérisé par la disparition du soutien : $\vec{S} = \vec{0}$.

La condition de décrochement s'exprime le mieux selon la normale $\vec{e}_n$. Il faut donc caractériser la trajectoire du centre de masse de la bille.



La trajectoire du CM de la bille est un arc de cercle de rayon $R + r$.

Selon $\vec{e}_t$:

$$mg\sin\alpha - f = ma_t\,.$$

Selon $\vec{e}_n$:

$$mg\cos\alpha - S = ma_n = m\frac{v_{\text{CM}}^2}{R+r}\,.$$

Au décrochement repéré par l'angle α_D, $S = 0$:

$$mg\cos\alpha_D = m\frac{v_D^2}{R+r} \Rightarrow (R+r)g\cos\alpha_D = v_D^2\,.$$

Une seconde relation entre α_D et v_D est fournie par le théorème de l'énergie cinétique du solide qu'est la bille.
Notons (1) le départ et (2) le décrochement. Plus précisément, t_1 est l'instant du départ et t_2 l'instant du décrochement.
Pour le choix de l'origine des hauteurs au niveau du centre de la boule et bien sûr $\vec{e}_h$ vers le haut, le théorème de l'énergie cinétique pour la bille s'écrit

$$\begin{aligned} E_{\text{cin}}(2) - E_{\text{cin}}(1) &= W_{1\to2}^{\text{ext}} \\ \frac{1}{2}mv_D^2 + \frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega_D^2 - 0 &= W_{1\to2}(m\vec{g}) + W_{1\to2}(\vec{S}) + W_{1\to2}(\vec{f})\,, \end{aligned}$$

où $\vec{\omega}_D$ est la vitesse angulaire de la bille autour du CM à l'instant t_2 de décrochement.

- Le poids s'exerce au CM :

$$W_{1\to2}(m\vec{g}) = mg(h_1 - h_2) = mg(R+r)(1-\cos\alpha_D)\,.$$

- Le soutien et le frottement s'exercent au point de contact de la bille avec la boule. Comme lors d'un roulement sans glissement le point de la bille entrant en contact avec la bille s'arrête, sa vitesse devient nulle et $\vec{S}$ et $\vec{f}$ ne travaillent pas :
$$W_{1\to 2}(\vec{S}) = W_{1\to 2}(\vec{f}) = 0\,.$$

Ainsi
$$\frac{1}{2}mv_D^2 + \frac{1}{2}I_{\mathrm{CM}}\omega_D^2 = mg(R+r)(1-\cos\alpha_D)\,.$$
C'est la conservation de l'énergie mécanique de la bille.

Ecrire l'équation de liaison entre rotation et déplacement.
La bille roulant sans glisser, si pendant Δt elle tourne de $\Delta\varphi$ selon $\vec{e}_z\otimes$, elle déroule sur la boule une longueur $\Delta s = r\Delta\varphi$. Il suit que l'angle α change de $\Delta\alpha$ avec $\Delta s = R\Delta\alpha$. Le déplacement du CM le long de Γ est alors de $\Delta s_{\mathrm{CM}} = (R+r)\Delta\alpha$. En divisant par Δt et prenant la limite $\Delta t \to 0$, on a
$$r\omega_{\mathrm{CM}} = R\dot{\alpha} \quad v_{\mathrm{CM}} = (R+r)\dot{\alpha} = \frac{R+r}{R}r\omega_{\mathrm{CM}}\,.$$
En particulier à t_2,
$$v_D = \frac{R+r}{R}r\omega_D\,.$$
Des trois équations, déduire α_D.
Rappelons les équations :
$$\begin{aligned}(R+r)g\cos\alpha_D &= v_D^2\\ \frac{1}{2}mv_D^2 + \frac{1}{2}I_{\mathrm{CM}}\omega_D^2 &= mg(R+r)(1-\cos\alpha_D)\\ v_D &= \frac{R+r}{R}r\omega_D\,.\end{aligned}$$
La deuxième équation est « la plus compliquée ». Faisons-y les substitutions pour obtenir une équation en α_D ($I_{\mathrm{CM}} = p\,mr^2$) :
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_D^2 + \frac{1}{2}pmr^2\omega_D^2 &= mg(R+r)(1-\cos\alpha_D)\\ \frac{1}{2}mv_D^2 + \frac{1}{2}pm(\tfrac{R}{R+r})^2v_D^2 &= mg(R+r)(1-\cos\alpha_D)\\ \frac{1}{2}m(R+r)g\cos\alpha_D + \frac{1}{2}pm(\tfrac{R}{R+r})^2(R+r)g\cos\alpha_D &= mg(R+r)(1-\cos\alpha_D)\\ \frac{1}{2}\cos\alpha_D + \frac{1}{2}p(\tfrac{R}{R+r})^2\cos\alpha_D &= 1-\cos\alpha_D\\ \big(1+2+p(\tfrac{R}{R+r})^2\big)\cos\alpha_D &= 2\end{aligned}$$
d'où
$$\cos\alpha_D = \frac{2}{3+p(\frac{R}{R+r})^2}\,.$$
Remarque. Nous connaissons le résultat similaire pour un objet glissant sans frottement : il décroche sous un angle α'_D donné par $\cos\alpha'_D = \frac{2}{3}$. Ainsi
$$\cos\alpha_D < \cos\alpha'_D \iff \alpha_D > \alpha'_D\,.$$
En effet, du fait de la mise en rotation de la bille, celle-ci décroche plus loin.