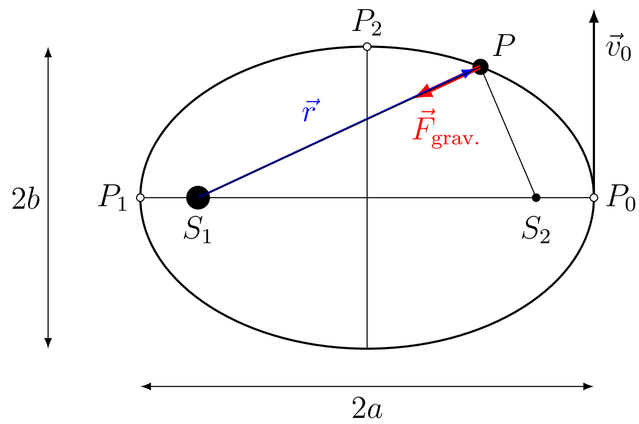
Physique
Semestre de printemps 2025

Roger Sauser
Raphaël Butté
Guido Burmeister
https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15842

Corrigé 10

Exercice 1

Nous allons exploiter le théorème du moment cinétique. La démarche est analogue à celle qui conduit à la deuxième loi de Kepler affirmant que la vitesse aréolaire d'une planète est constante.
Nous allons faire l'hypothèse que la planète ne subit qu'une seule force : la force de gravitation $\vec{F}_{\text{grav.}}$ exercée par l'astre. Cette force est dirigée de la planète vers l'astre :



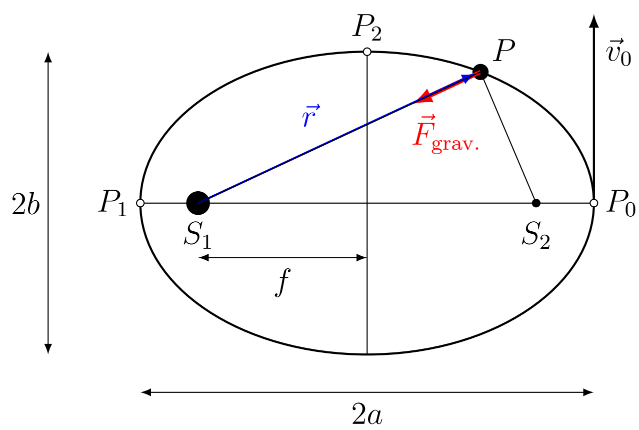
La force de gravitation $\vec{F}_{\text{grav.}}$ est une force centrale : elle est toujours dirigée vers le même point S_1. En choisissant comme origine le point S_1, les vecteurs position $\vec{r}$ et force $\vec{F}_{\text{grav.}}$ sont en tout temps parallèles.
Ainsi, le moment de la force est toujours nul :

$$\vec{M}_{S_1} = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{grav.}} = \vec{0}\,.$$

Le théorème du moment cinétique permet alors d'affirmer que

$$\dot{\vec{L}}_{S_1} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{L}_{S_1} = \vec{r} \times m\vec{v} = \overrightarrow{\text{constante}}\,,$$

où m est la masse de la planète.
Pour pouvoir exploiter la conservation du moment cinétique durant le mouvement de la planète autour de l'astre, il est nécessaire de déterminer les vecteurs positions aux points P_1 et P_2. En particulier, nous allons avoir besoin de la distance f séparant l'astre du centre de l'ellipse.



En utilisant la contrainte $\overline{S_1P}+\overline{S_2P} = 2a$ définissant l'ellipse pour le point P_2, on constate que

$$f^2 + b^2 = a^2 \quad \Longrightarrow \quad f = \sqrt{a^2 - b^2}\,.$$

La conservation du moment cinétique permet alors d'écrire, selon la direction perpendiculaire au plan du mouvement,

$$(a + f)mv_0 = (a - f)mv_1 = bmv_2\,.$$

Ainsi, les vitesses aux points P_1 (périhélie) et P_2 sont, respectivement, données par

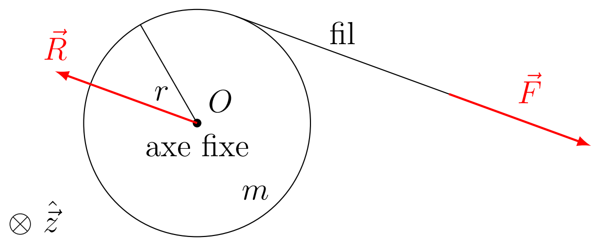
$$v_1 = \frac{a+f}{a-f}v_0 = \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}v_0 \quad \text{et} \quad v_2 = \frac{a+f}{b}v_0 = \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}v_0\,.$$

Numériquement, dans le cas de la Terre en orbite autour du Soleil, on obtient

$$v_1 = 30.29 \text{ km/s} \quad \text{et} \quad v_2 = 29.78 \text{ km/s}\,.$$

Exercice 2

On commence par faire un schéma de la situation :



On suppose qu'il n'y a pas de frottement. Le CM du cerceau ne se déplace pas et la somme des forces exercées sur le cerceau est donc nulle : le poids du cerceau (de masse m et de rayon r) est compensé par une force de soutien au niveau de l'axe et $\vec{F}$ par un second soutien $\vec{R}$ horizontal.

Nous pouvons alors écrire, pour le cerceau par rapport à son centre O,

$$\vec{\tau}_O = I_O\vec{\alpha}\,,$$

où $\alpha \equiv \dot{\omega}$ est l'accélération angulaire. Selon $\hat{\vec{z}}$, on a donc

$$\tau_O = rF = I_O\alpha\,,$$

où $F = ||\vec{F}||$ et $I_O = mr^2$. L'accélération angulaire α est constante et vaut

$$\alpha(t) = \alpha_0 = \frac{rF}{I_O} = \frac{rF}{mr^2} = \frac{F}{mr} = 200\,\text{s}^{-2}\,.$$

Comme l'accélération angulaire est constante, on peut s'inspirer des équations du mouvement uniformément accéléré pour trouver l'expression de la vitesse angulaire :

$$\omega(t) = \alpha_0 t + \omega_0 = \frac{F}{mr}t\,,$$

où l'on a tenu compte de la condition initiale $\omega(t = 0) = 0$ pour fixer ω_0 : $\omega_0 = 0\,\text{s}^{-1}$.
La vitesse angulaire après un temps t_1 est donc

$$\omega_1 = \omega(t_1) = \frac{F}{mr}t_1 = 1000\,\text{s}^{-1}\,.$$

L'angle de rotation au temps t pour la condition initiale $\theta(t=0)=0$ est donné par

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{F}{mr}}_{=\dot{\omega}=\text{cste}} t^2 \,.$$

L'angle après un temps t_1 est ainsi

$$\theta_1 = \theta(t_1) = \frac{F t_1^2}{2mr} = 2500\,,$$

ce qui correspond à un nombre de tours

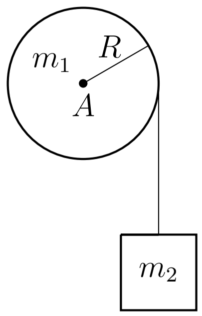
$$n_1 = \frac{\theta_1}{2\pi} = \frac{F t_1^2}{4\pi m r} \cong 398\,\text{tours}\,.$$

Exercice 3

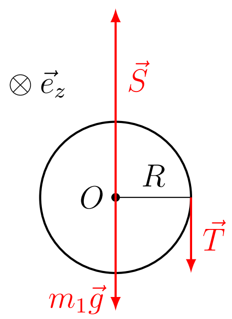
Il n'est pas judicieux de choisir comme objet "cylindre et contrepoids", ces deux parties ne bougeant pas de la même manière. Ainsi,

- on considère tour à tour le cylindre et la masse ;
- on établit la liaison géométrique entre leurs mouvements.

Il est primordial (comme toujours) de faire un dessin convenable de la situation :



Notons que l'axe de rotation A du cylindre est fixe.



Objet : cylindre

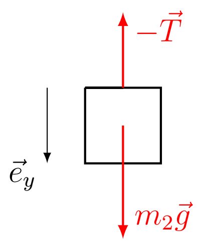
Forces : poids, soutien, tension

Comme le CM est au repos, il n'est pas nécessaire de considérer la translation.
Rotation autour de O :

$$\vec{M}_O = \underbrace{\vec{M}_O(m_1\vec{g})}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{M}_O(\vec{S})}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{M}_O(\vec{T})}_{\otimes} = I_O\dot{\vec{\omega}}$$

Selon $\vec{e}_z$:

$$RT = I_0\dot{\omega}\,.$$



Objet : contrepoids

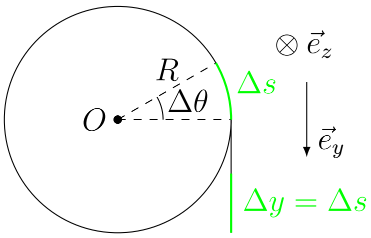
Forces : poids, tension

$$m_2\vec{g} - \vec{T} = m_2\vec{a}_2$$

Selon $\vec{e}_y$:

$$m_2 g - T = m_2 a_2\,.$$

Pour établir les équations de liaison, on peut considérer un petit angle de rotation du cylindre et déterminer le mouvement correspondant du contrepoids :

- 

  Si la poulie tourne d'un angle $\Delta\theta$ dans le sens donné par $\vec{e}_z$, le fil se déroule et le contrepoids se déplace de $\Delta y = R\Delta\theta$ dans le sens donné par $\vec{e}_y$.

- La variation par rapport au temps (dérivée) donne alors la liaison entre les vitesses :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \Leftrightarrow \quad v_2 = R\omega\,.$$

- La variation des vitesses par rapport au temps (dérivée) donne ensuite la liaison entre les accélérations :

$$a_2 = R\dot{\omega}\,.$$

Nous sommes donc amenés à résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} RT &=& I_O\dot{\omega} \\ m_2 g - T &=& m_2 a_2 \\ a_2 &=& R\dot{\omega}\,. \end{array}\right.$$

Il est souvent plus simple de d'abord exprimer les accélérations en fonction de $\dot{\omega}$ ($a_2 = R\dot{\omega}$) et de résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} RT &=& I_O\dot{\omega} \\ m_2 g - T &=& m_2 R\dot{\omega} \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \cdot\, 1 \\ \cdot\, R \end{array}\right.$$

en amplifiant les équations respectivement par 1 et par R, de sorte que l'addition membre à membre fasse tomber les termes en T, inconnue non recherchée. On obtient alors

$$m_2 g R = (I_O + m_2 R^2)\dot{\omega}\,.$$

Avec $I_O = \frac{1}{2} m_1 R^2$ pour un cylindre plein, il vient

$$\dot{\omega} = \frac{m_2 g R}{I_O + m_2 R^2} = \frac{2m_2 g}{(m_1 + 2m_2)R}$$

et donc

$$a_2 = R\dot{\omega} = \frac{2m_2}{m_1 + 2m_2}\, g > 0\,.$$

Le contrepoids accélère vers le bas avec une accélération inférieure à g :

$$a_2 = R\dot{\omega} = \frac{2m_2}{m_1 + 2m_2}\, g = \frac{1}{\frac{m_1}{2m_2} + 1}\, g < g\,.$$

Remarque : on est libre de choisir les repères comme on veut. Par exemple, avec le même choix de $\vec{e}_z$ entrant et le choix (différent) de $\vec{e}_y$ vers le haut, les projections et équations de liaison sont modifiées comme suit.

$$\left\{\begin{array}{rcll} RT &=& I_O\dot{\omega} & \text{(inchangée)} \\ -m_2 g + T &=& m_2 a_2 & \text{(modifiée)} \\ a_2 &=& -R\dot{\omega} & \text{(modifiée)}\,. \end{array}\right.$$

Avec $a_2 = -R\dot{\omega}$, il vient

$$\left\{\begin{array}{rcl} RT &=& I_O\dot{\omega} \\ -m_2 g + T &=& -m_2 R\dot{\omega} \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \cdot\, 1 \\ \cdot\, (-R) \end{array}\right.$$

En amplifiant les équations respectivement par 1 et par $-R$, de sorte que l'addition membre à membre fasse tomber les termes en T, inconnue non recherchée, on obtient alors

$$m_2 g R = (I_O + m_2 R^2)\dot{\omega}$$

et donc, comme ci-dessus,

$$\dot{\omega} = \frac{m_2 g R}{I_O + m_2 R^2}$$

mais

$$a_2 = -R\dot{\omega} = -\frac{m_2 R^2}{I_O + m_2 R^2} g < 0\,.$$

Toutefois, le contrepoids accélère bien vers le bas, $\vec{e}_y$ étant orienté vers le haut.

Connaissant l'accélération, on peut (en principe...) en déduire la vitesse et la position à chaque instant. On considère alors l'instant correspondant à la distance parcourue.
L'accélération du contrepoids est constante. On sait que la vitesse est linéaire dans le temps et la position quadratique (accélération = dérivée de la vitesse, vitesse = dérivée de la position). Pour le contrepoids, avec un choix de l'origine à l'endroit où la vitesse est nulle ($t_0 = 0$), nous obtenons l'évolution temporelle selon $\vec{e}_y$:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{2m_2}{m_1 + 2m_2}\, g = \text{cte} \\ v_2(t) &= a_2\, t \qquad \text{car } v_2(0) = 0 \\ y_2(t) &= \frac{1}{2}\, a_2\, t^2 \qquad \text{car } y_2(0) = 0\,. \end{aligned}$$

Déterminons l'instant correspondant à une descente h. Notons t_h l'instant auquel le contrepoids a parcouru une distance verticale h :

$$y_2(t_h) = \frac{1}{2}\, a_2\, t_h^2 = h \quad \Rightarrow \quad t_h = \sqrt{\frac{2h}{a_2}}\,.$$

Nous obtenons alors la vitesse à cet instant :

$$v_2(t_h) = a_2 t_h = \sqrt{2ha_2} = \sqrt{\frac{4hm_2 g}{m_1 + 2m_2}}\,.$$

Autre méthode de résolution : comme nous cherchons une relation entre une position et une vitesse (sans être intéressés par le temps), nous pouvons imaginer exploiter le théorème de l'énergie cinétique pour les instants $t_0 = 0$ et t_h correspondant à un déplacement vertical h.

Intéressons-nous d'abord au contrepoids soumis à son poids et à la tension $\vec{T}$:

$$\begin{aligned} E_{\text{cin}}(t_h) - E_{\text{cin}}(t_0) &= W_{0\to h}(m_2\vec{g}) + W_{0\to h}(-\vec{T}) \\ \frac{1}{2} m_2 v_h^2 - 0 &= m_2 g h + W_{0\to h}(-\vec{T})\,. \end{aligned}$$

Comme le travail de la tension est inconnu, nous sommes amenés à considérer également la poulie soumise à son poids, au soutien et à la tension $\vec{T}$:

$$\begin{aligned} E_{\text{cin}}(t_h) - E_{\text{cin}}(t_0) &= W_{0\to h}(m_1\vec{g}) + W_{0\to h}(\vec{S}) + W_{0\to h}(\vec{T}) \\ \frac{1}{2} I_O \omega_h^2 - 0 &= W_{0\to h}(\vec{T})\,. \end{aligned}$$

Les travaux de la tension sur le contrepoids et la poulie étant égaux et opposés, nous avons par addition

$$\frac{1}{2}m_2v_h^2 + \frac{1}{2}I_O\omega_h^2 = m_2gh\,.$$

Avec l'équation de liaison $v_2 = R\omega$, nous obtenons finalement

$$\frac{1}{2}m_2v_h^2 + \frac{1}{2}I_O\frac{v_h^2}{R^2} = \frac{1}{2}m_2v_h^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}m_1R^2\frac{v_h^2}{R^2} = \left(\frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}m_1\right)v_h^2 = m_2gh$$

et donc

$$v_h = \sqrt{\frac{4m_2gh}{2m_2+m_1}}\,.$$

Exercice 4

Nous allons appliquer le théorème du moment cinétique aux masses en rotation m_1 et m_2. Il sera également nécessaire de décrire le mouvement des masses m_3 et m_4 se déplaçant verticalement.
Appelons $\vec{T}_3$, respectivement $\vec{T}_4$, la force qu'exerce m_3, respectivement m_4, sur les cylindres solidaires.
En choisissant $\vec{e}_z$ entrant, la projection du théorème du moment cinétique selon $\vec{e}_z$ s'écrit

$$r_1T_3 + r_2T_4 = (I_1 + I_2)\dot{\omega}\,,$$

où $\dot{\omega}$ est l'accélération angulaire des deux cylindres (ces derniers sont supposés solidaires).
La deuxième loi de Newton appliquée aux masses m_3 et m_4 s'écrit

$$m_i\vec{g} + \vec{T}_i = m_i\vec{a}_i\,, \quad \text{où } i = 3, 4\,.$$

En projetant selon $\vec{e}_y$ dirigé vers le bas, nous obtenons les équations

$$m_3g - T_3 = m_3a_3 \quad \text{et} \quad m_4g - T_4 = m_4a_4\,.$$

Il convient maintenant de trouver la liaison entre le mouvement de rotation des cylindres et le mouvement de translation des deux masses m_3 et m_4.

Lorsque les cylindres tournent à une vitesse angulaire ω, les masses m_3 et m_4 descendent avec les vitesses respectives

$$v_3 = r_1\omega \ \text{ et } \ v_4 = r_2\omega.$$

Par conséquent,

$$a_3 = r_1\dot{\omega} \ \text{ et } \ a_4 = r_2\dot{\omega}.$$

En résumé, nous avons les équations

$$\begin{aligned} r_1T_3 + r_2T_4 &= (I_1+I_2)\dot{\omega}\,, \\ m_3g - T_3 &= m_3a_3\,, \\ m_4g - T_4 &= m_4a_4\,, \\ a_3 &= r_1\dot{\omega}\,, \\ a_4 &= r_2\dot{\omega}\,. \end{aligned}$$

En éliminant T_3, T_4, a_3 et a_4, nous obtenons l'expression de l'accélération angulaire :

$$\dot{\omega} = \frac{(r_1m_3 + r_2m_4)}{(m_1+m_3){r_1}^2 + (m_2+m_4){r_2}^2}\,g\,.$$

Les accélérations verticales des deux masses m_3 et m_4 sont alors données par

$$a_3 = \frac{r_1(r_1 m_3 + r_2 m_4)}{(m_1 + m_3){r_1}^2 + (m_2 + m_4){r_2}^2}\, g$$

et

$$a_4 = \frac{r_2(r_1 m_3 + r_2 m_4)}{(m_1 + m_3){r_1}^2 + (m_2 + m_4){r_2}^2}\, g\,.$$

Quant aux tensions dans les fils, elles s'écrivent

$$\begin{aligned} T_3 &= m_3(g - a_3) = m_3 g\Big(1 - \frac{r_1(r_1 m_3 + r_2 m_4)}{(m_1 + m_3){r_1}^2 + (m_2 + m_4){r_2}^2}\Big) \\ &= m_3 g \frac{m_1 {r_1}^2 + m_2 {r_2}^2 + m_4 {r_2}^2 - r_1 r_2 m_4}{(m_1 + m_3){r_1}^2 + (m_2 + m_4){r_2}^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T_4 &= m_4(g - a_4) = m_4 g\Big(1 - \frac{r_2(r_1 m_3 + r_2 m_4)}{(m_1 + m_3){r_1}^2 + (m_2 + m_4){r_2}^2}\Big) \\ &= m_4 g \frac{m_1 {r_1}^2 + m_2 {r_2}^2 + m_3 {r_1}^2 - r_1 r_2 m_3}{(m_1 + m_3){r_1}^2 + (m_2 + m_4){r_2}^2}\,. \end{aligned}$$

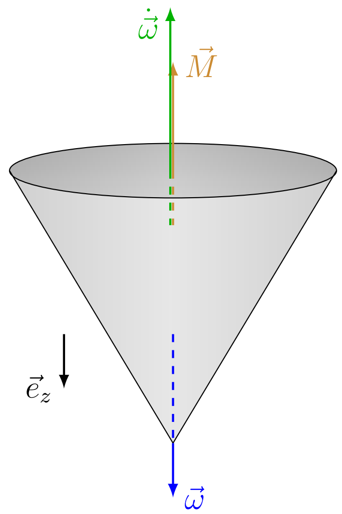
Exercice 5

Nous allons exploiter le théorème du moment cinétique pour étudier la dynamique de la rotation de la toupie.

Nous allons supposer que le couple de freinage est mesuré par rapport au centre de la toupie (axe de rotation). Par hypothèse, ce couple, que nous allons noter $\vec{M}$, est supposé constant. Il s'oppose à la rotation de la toupie et conduit à une décélération de celle-ci :

$$\vec{M} = I\dot{\vec{\omega}}\,.$$

Imaginons que la toupie tourne dans le sens des aiguilles d'une montre (vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$) et choisissons un repère dans le même sens ($\vec{\omega} = k\vec{e}_z$, avec $k > 0$).



La projection de l'équation ci-dessus fournit alors

$$-M = I\dot{\omega}\,.$$

Le signe traduit le fait que $\vec{M}$ s'oppose à $\vec{\omega}$.
Ainsi, l'accélération angulaire s'écrit

$$\dot{\omega} = -\frac{M}{I} = \text{constante}\,.$$

On devine alors que la vitesse angulaire est de la forme

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{M}{I}t\,,$$

où ω_0 est une constante.
La constante ω_0 correspond à la vitesse de rotation initiale de la toupie :

$$\omega(t = 0\,\mathrm{s}) = \omega_0 = 50 \cdot 2\pi \cong 314.159\,\mathrm{s}^{-1}\,.$$

Nous savons que la toupie tombe après 30 secondes car sa vitesse angulaire est devenue négligeable ($\omega \cong 0\,\mathrm{s}^{-1}$). Ainsi,

$$\begin{aligned} \omega(t_1 = 30\,\mathrm{s}) &= \omega_0 - \frac{M}{I}t_1 \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Cette équation permet de déterminer le couple de freinage :

$$M = \frac{I\omega_0}{t_1} = \frac{200 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4} \cdot 100\pi}{30} \cong 2.09 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{N\,m}\,.$$

L'expression de la vitesse angulaire de la toupie,

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{M}{I}t\,,$$

permet de deviner l'angle parcouru par la toupie au cours du temps :

$$\theta(t) = \omega_0 t - \frac{M}{2I}t^2\,.$$

On en déduit le nombre de tours effectués par la toupie jusqu'à son arrêt :

$$\begin{aligned} n(t_1 = 30\,\mathrm{s}) &= \frac{\theta(t_1)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\omega_0 t_1 - \frac{M}{2I}{t_1}^2\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\omega_0 t_1 - \frac{\omega_0 t_1}{2}\right) = \frac{\omega_0 t_1}{4\pi} \\ &= \frac{100\pi \cdot 30}{4\pi} = 750\,. \end{aligned}$$

Exercice 6

Comme le courant ne circule que pendant une seconde, il faut différencier deux cas.

Lorsque le moteur est en fonction (c'est-à-dire lorsque le courant circule), le rotor voit sa vitesse angulaire augmenter. Le moment de force $\vec{M}$ est parallèle et de même signe que la vitesse angulaire du rotor $\vec{\omega}$. Ainsi,

$$M = I\dot{\omega}\,,$$

où M est le moment du couple. Ce moment est constant et non nul dans la première seconde après l'enclenchement ($0 < t < 1\,\mathrm{s}$). Ensuite (pour $t > 1\,\mathrm{s}$), il est nul. Il convient donc de procéder en deux étapes.

Pour $0 < t < 1\,\mathrm{s}$, le moment du couple est non nul et provoque une accélération angulaire

$$\dot{\omega} = \frac{M}{I} = \text{constante}\,.$$

La vitesse angulaire est alors donnée par

$$\omega(t) = \frac{M}{I}t + \omega_0\,,$$

où $\omega_0 = \omega(0) = 0\,\mathrm{s}^{-1}$ car le moteur est initialement immobile. L'angle parcouru par le rotor a quant à lui pour expression

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\frac{M}{I}t^2 + \varphi_0\,,$$

où l'on va poser $\varphi_0 = \varphi(0) = 0\,.$

On a donc en particulier,

$$\omega(1\,\mathrm{s}) = \frac{2}{0.1} = 20\,\mathrm{s}^{-1} \quad \text{et} \quad \varphi(1\,\mathrm{s}) = \frac{1}{2}\frac{2}{0.1} = 10\,.$$

Pour $t > 1\,\mathrm{s}$, le moment du couple est nul. Il n'y a donc pas d'accélération angulaire et la vitesse angulaire du rotor est constante :

$$\dot{\omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega(t) = \omega(1\,\mathrm{s}) = \omega_1 = \text{constante}\,.$$

L'angle parcouru par le rotor est ainsi donné par

$$\varphi(t) = \varphi(1\,\mathrm{s}) + \omega_1(t - 1\,\mathrm{s})\,.$$

Ainsi,

$$\varphi(2\,\mathrm{s}) = 10 + 20(2-1) = 30$$

et le nombre de tours correspondant est

$$n(2\,\mathrm{s}) = \frac{\varphi(2\,\mathrm{s})}{2\pi} \cong 4.77\,.$$

Exercice 7

Nous allons exploiter le lien entre moment de force et accélération angulaire. En choisissant $\hat{\vec{z}}$ pointant dans le plan de la feuille ($\hat{\vec{z}}\ \otimes$), nous pouvons écrire, par rapport à l'axe de rotation,

$$\begin{aligned} M &= -RF = -kR\omega \\ &= I\alpha = \frac{1}{2}mR^2\alpha\,. \end{aligned}$$

Comme $\alpha = \alpha(t) = \dot{\omega}(t)$, on obtient alors l'équation différentielle

$$\dot{\omega}(t) = -\frac{2k}{mR}\,\omega(t)\,.$$

On devine que la vitesse angulaire $\omega(t)$ solution de cette équation différentielle est une fonction de type exponentielle. On va donc poser, dans le cas le plus général,

$$w(t) = Ae^{Bt}\,,$$

où A et B sont des constantes.
L'accélération angulaire s'écrit alors

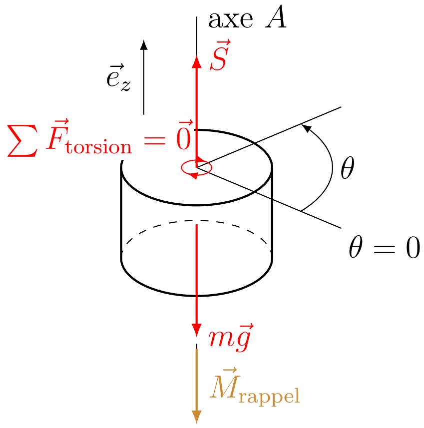
$$\alpha(t) = \dot{\omega}(t) = BAe^{Bt} = B\omega(t)\,.$$

On obtient alors que $A = \omega(0) = \omega_0$ et $B = -\frac{2k}{mR}$.
L'évolution de la vitesse angulaire est ainsi donnée par

$$\omega(t) = \omega_0\, e^{-\frac{2k}{mR}t}\,.$$

Exercice 8

Nous allons appliquer les lois de la dynamique à l'objet.



Objet : cet objet (sans le fil)

Forces : poids, soutien, forces de torsion

Les forces de torsion sont exercées par le fil au niveau du contact avec l'objet. Elles sont de résultante nulle et donnent lieu au couple de rappel $\vec{M}_{\text{rappel}}$.
Le CM étant au repos, nous ne considérons que la rotation autour de l'axe défini par le fil vertical :

$$\vec{M}_A = \underbrace{\vec{M}_A(m\vec{g})}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{M}_A(\vec{S})}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{M}_{\text{rappel}}}_{\text{opposé à } \vec{e}_z} = I\dot{\vec{\omega}}_A$$

Selon $\vec{e}_z$:

$$-C\theta = I\dot{\omega}_A = I\ddot{\theta}\,.$$

Pour déterminer la période d'oscillation, nous devons connaître l'évolution temporelle de l'angle θ. Nous cherchons donc une fonction du temps $\theta(t)$ vérifiant l'équation

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{C}{I}\,\theta(t)\,.$$

Nous connaissons les fonctions ayant cette propriété : sin et cos. Pour rappel,

$$\begin{array}{lll} f(x) = \sin(\Omega x) & f'(x) = \Omega\cos(\Omega x) & f''(x) = -\Omega^2\sin(\Omega x) = -\Omega^2 f(x) \\ f(x) = \cos(\Omega x) & f'(x) = -\Omega\sin(\Omega x) & f''(x) = -\Omega^2\cos(\Omega x) = -\Omega^2 g(x)\,. \end{array}$$

Posons donc

$$\Omega^2 = \frac{C}{I} \text{ et donc } \Omega = \sqrt{\frac{C}{I}}\,.$$

La solution à notre équation est alors

$$\theta(t) = A\sin(\Omega t) + B\cos(\Omega t)\,,$$

où A et B sont des constantes données par les conditions initiales (l'angle et la vitesse angulaire à un instant donné).
La période d'oscillation T est le plus petit réel strictement positif tel que

$$\theta(t+T) = \theta(t) \quad \forall t\,.$$

Pour notre solution,

$$A\sin(\Omega t + \Omega T) + B\cos(\Omega t + \Omega T) = A\sin(\Omega t) + B\cos(\Omega t) \quad \forall t$$

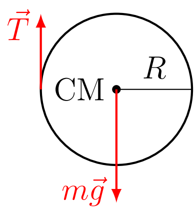
et ΩT doit donc être un multiple de 2π .
Le plus petit T positif est ainsi donné par

$$\Omega T = 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}\,.$$

En effet, plus le moment d'inertie I est grand, plus l'oscillation est lente. Et plus le fil est rigide (C grand), plus l'oscillation est rapide.

Exercice 9

On procède comme toujours : dessin, objet, forces...
On a à disposition les lois de la dynamique (translation et rotation autour d'un point fixe ou du CM).
Considérer le cylindre.



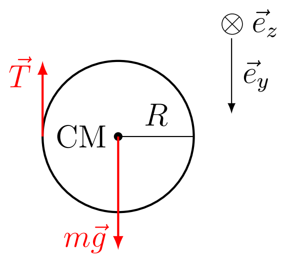
Objet : cylindre

Forces : poids, tension

Newton :

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}_{\text{CM}}$$

et selon $\vec{e}_y$: $mg - T = ma$.
Remarque : il n'y a pas d'accélération selon l'horizontale.



Rotation autour du CM :

$$\underbrace{\vec{M}_{\text{CM}}(m\vec{g})}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{M}_{\text{CM}}(\vec{T})}_{\otimes} = I_{\text{CM}}\dot{\vec{\omega}}_{\text{CM}}$$

et selon $\vec{e}_z$: $RT = I_{\text{CM}}\dot{\omega}_{\text{CM}}$.

Avec $I_{\text{CM}} = \frac{1}{2}mR^2$, $2T = mR\dot{\omega}_{\text{CM}}$.

Ecrire les équations de liaison.
Liaison : si, pendant Δt , le cylindre tourne autour du CM de $\Delta\varphi$ selon $\vec{e}_z$, son CM avance selon $\vec{e}_y$ de

$$\Delta y = +R\Delta\varphi\,.$$

Alors

$$v = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = +R\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\omega_{\text{CM}} \qquad \forall\, t\,.$$

En dérivant,

$$a = R\dot{\omega}_{\text{CM}}\,.$$

Résolvons le système d'équation avec $a = R\dot{\omega}_{\text{CM}}$:

$$\begin{aligned} mg - T &= mR\dot{\omega}_{\text{CM}} \\ 2T &= mR\dot{\omega}_{\text{CM}} . \end{aligned}$$

Par addition après amplification de la première équation par 2, on a

$$2mg = 3mR\dot{\omega}_{\text{CM}}$$

et donc selon $\vec{e}_z$ et selon $\vec{e}_y$ respectivement :

$$\dot{\omega}_{\text{CM}} = \frac{2g}{3R} \qquad a = \frac{2g}{3} .$$